

Ćwiczenia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla bioinformatyki

1. Ciągi liczbowe (25.02.2019)

Zadanie 1. Znaleźć kresy dolne i górne podanych zbiorów:

(a) $A = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

(b) $B = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) $C = \left\{ \frac{1}{x} : x \in (0, 1] \right\}$.

Zadanie 2. Złożenie funkcji: znaleźć funkcje złożone $f \circ g$ oraz $g \circ f$, gdy $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x}$.

Zadanie 3. Znaleźć funkcję odwrotną do podanej:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, dla $D_f = (0, \infty)$, $W_f = (0, \infty)$

(b) $f(x) = 2^x$, dla $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = (0, \infty)$

Zadanie 4. Korzystając z definicji granicy właściwej i niewłaściwej ciągu udowodnij, że:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+5} = 0$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 = \infty$.

Zadanie 5. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+5}$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - n^3 + n}{2n^4 + 5n^2 - 1}$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^5 + 2n^3 - 4}$.

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^3 + 5}{n^2 - 3}$.

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2)^2}{n^2 + 2n + 1}$.

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \sqrt{2n^2 + 1}}{2n + 2}$.

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$.

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^{n+1}}{4^{n+1} + 2^n}$.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{\sqrt{4^n + 1}}$.
- (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n - 5^n}{4^n + 1}$.
- (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n \right)$ (wykorzystaj fakt, że $a - b = (a - b) \left(\frac{a + b}{a + b} \right) = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$).
- (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right)$.
- (m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2n}$.
- (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)}{4 + 7 + 10 + \dots + (3n + 1)}$
(wykorzystaj wzór na sumę ciągu arytmetycznego $S_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2}$).
- (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 1}}$.
- (p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 + n + 1}}$.

Zadanie 6. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granicę:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n + 4n}{3n - 1}$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3^n + 4^n + 5^n}$.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3^n - 2^n}$.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + 3}$ (wykorzystaj fakt, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$).
-

Zadanie domowe. Wyznacz granice następujących ciągów:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{4^n + 5^n}$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n} \right)$.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3 + \sin n}$.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^4 - 3n^2 - 2n^2 - 1 \right)$.