Analiza matematyczna i algebra liniowa
Wprowadzenie   Ciągi liczbowe

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW)   tel. (61)665-2936   konsultacje: piątek 15:10-16:50

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

25.02.2019

Plan wykładu

Plan wykładu

Analiza

1. Ciągi liczbowe
2. Granica i ciągłość funkcji
3. Pochodna funkcji
4. Zastosowania pochodnych
5. Badanie zmienności funkcji
6. Całka nieoznaczona
7. Całka oznaczona

I kolokwium

8. Równania różniczkowe

Algebra

9. Liczby zespolone
10. Wielomiany
11. Macierze
12. Wyznacznik, odwrotność macierzy
13. Układy równań liniowych

II kolokwium

Zaliczenie

- Brak egzaminu: wspólne zaliczenie dla ćwiczeń i wykładu.
- Krótki sprawdzian i dwa kolokwia
  1. Sprawdzian z pochodnych (piąte zajęcia): 10 pkt
  2. Analiza (ok. połowy kwietnia): 45 pkt
  3. Algebra (ostatni tydzień przed sesją): 45 pkt
- Nie trzeba zaliczyć obu kolokwiów – liczy się suma punktów
- Termin poprawkowy w trakcie sesji egzaminacyjnej

Literatura podstawowa

Cykl podręczników Oficyny Wydawniczej GiS.

- Gewert, Skoczylas: Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory.
- Gewert, Skoczylas: Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania.
- Gewert, Skoczylas: Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory. (tylko rozdziały 2 i 3)
- Gewert, Skoczylas: Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania. (tylko rozdziały 2 i 3)
- Gewert, Skoczylas: Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania. (tylko rozdział 1)
- M. Jurlewicz, Z. Skoczylas: Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory. (wcześniejsza nazwa książki to Algebra liniowa 1).
- M. Jurlewicz, Z. Skoczylas: Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania. (wcześniejsza nazwa książki to Algebra liniowa 1).
- M. Jurlewicz, Z. Skoczylas: Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory. (tylko rozdział 1; wcześniejsza nazwa książki to Algebra liniowa 2).
- M. Jurlewicz, Z. Skoczylas: Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory. (tylko rozdział 1; wcześniejsza nazwa książki to Algebra liniowa 2).

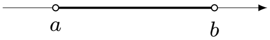
Literatura dodatkowa

- Fichtenholz: Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom 1, 2, 3. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Krysicki, Włodarski: Analiza matematyczna w zadaniach. Tom 1, 2. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Klukowski, Nabiałek: Algebra dla studentów. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Nabiałek: Zadania z algebry liniowej. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

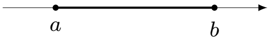
Notacja

- Zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Zbiór liczb całkowitych: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.
- Zbiór liczb wymiernych: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.
- Zbiór liczb rzeczywistych: $\mathbb{R}$.
- Przedziały:

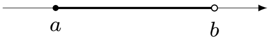
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$$



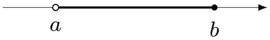
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$$



$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$$



- Kwantyfikatory:

$\forall$ lub $\bigwedge$ „dla każdego"

$\exists$ lub $\bigvee$ „istnieje"

Definicje: element najmniejszy i największy

Element najmniejszy

Liczba a jest najmniejszym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, gdy

$$a \in X \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in X}\ x \geq a.$$

Zapisujemy: $a = \min X$.

Element największy

Liczba b jest największym elementem zbioru $X \subset \mathbb{R}$, gdy

$$b \in X \quad \text{oraz} \quad \forall_{x \in X}\ x \leq b.$$

Zapisujemy: $b = \max X$.

Uwaga: Element największy/najmniejszy może nie istnieć!

Definicje: ograniczenie dolne i kres dolny

Ograniczenie dolne

Liczba a jest ograniczeniem dolnym zbioru $X \subset \mathbb{R}$, gdy:

$$\forall_{x \in X}\ x \geq a.$$

Jeśli nie ma takiej liczby, to mówimy, że X nie jest ograniczony z dołu.

Kres dolny

Liczba a jest kresem dolnym zbioru $X \subset \mathbb{R}$, gdy a jest największym ograniczeniem dolnym zbioru X:

$$\forall_{x \in X}\ x \geq a \quad \text{oraz} \quad \forall_{\epsilon > 0}\ \exists_{x_0 \in X}\ x_0 < a + \epsilon.$$

Zapisujemy: $a = \inf X$.
Jeśli X nie jest ograniczony z dołu, przyjmujemy $\inf X = -\infty$.

Definicje: ograniczenie górne i kres górny

Ograniczenie górne

Liczba b jest ograniczeniem górnym zbioru $X \subset \mathbb{R}$, gdy:

$$\forall_{x \in X} \; x \leq b.$$

Jeśli nie ma takiej liczby, to mówimy, że X nie jest ograniczony z góry.

Kres górny

Liczba b jest kresem górnym zbioru $X \subset \mathbb{R}$, gdy b jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru X:

$$\forall_{x \in X} \; x \leq b \quad \text{oraz} \quad \forall_{\epsilon > 0} \, \exists_{x_0 \in X} \; x_0 > b - \epsilon.$$

Zapisujemy: $b = \sup X$.
Jeśli X nie jest ograniczony z góry, przyjmujemy $\sup X = \infty$.

Definicje: funkcja

Funkcja

Funkcją określoną na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ i przyjmującą wartości ze zbioru $Y \subset \mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję oznaczamy:

$$f \colon X \to Y.$$

- Elementy X nazywamy argumentami funkcji.
- X nazywamy dziedziną i oznaczamy D_f.
- Y nazywamy przeciwdziedziną lub zbiorem wartości funkcji i oznaczamy W_f.

Definicje: funkcja „na" i różnowartościowa

Funkcja „na" (*suriekcja*)

Mówimy, że funkcja odwzorowuje zbiór X na zbiór Y, co oznaczamy $f\colon X \xrightarrow{na} Y$, gdy:

$$W_f = Y, \quad \text{tzn.} \quad \forall_{y\in Y}\, \exists_{x\in X}\, f(x) = y.$$

Funkcja różnowartościowa (*iniekcja*)

Mówimy, że funkcja f jest różnowartościowa, jeżeli:

$$\forall_{x_1,x_2\in X} \left[(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow \big(f(x_1) \neq f(x_2)\big)\right].$$

Definicje: bijekcja, funkcja odwrotna

Bijekcja

Funkcję f, która jest różnowartościowa i „na”, nazywamy bijekcją.

Funkcja odwrotna

Funkcja f będąca bijekcją ma funkcję odwrotną, oznaczaną $f^{-1}\colon Y \to X$, określoną warunkiem:

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x), \quad \text{dla dowolnych } x \in X, y \in Y.$$

Definicje: złożenie funkcji

Złożenie funkcji

Niech X, Y, Z, W będą zbiorami liczb rzeczywistych, przy czym $Y \subset Z$, oraz niech $f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to W$. Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $g \circ f\colon X \to W$ określoną wzorem:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \qquad \text{dla } x \in X.$$

Ciąg liczbowy

Definicja

Ciągiem liczbowym nazywamy dowolną funkcję odwzorowującą zbiór liczba naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych.

Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym elementem ciągu i oznaczamy a_n.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots.$$

Ciąg oznaczamy przez (a_n).

Zbiór wyrazów ciągu $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ oznaczamy $\{a_n\}$.

Przykłady ciągów

- Elementy podane wprost:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

  Wtedy $a_1 = 1$, $a_4 = 3$, itp.

Przykłady ciągów

- Elementy podane wprost:
$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$
Wtedy $a_1 = 1$, $a_4 = 3$, itp.
- Elementy podane poprzez wzór ogólny:
$$a_n = 2^n,$$
$$a_n = n + 1.$$

Przykłady ciągów

- Elementy podane wprost:
$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$
Wtedy $a_1 = 1$, $a_4 = 3$, itp.
- Elementy podane poprzez wzór ogólny:
$$a_n = 2^n,$$
$$a_n = n + 1.$$
- Elementy podane rekurencyjnie:
$$a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

Przykłady ciągów

- Elementy podane wprost:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$

  Wtedy $a_1 = 1$, $a_4 = 3$, itp.

- Elementy podane poprzez wzór ogólny:

$$a_n = 2^n,$$
$$a_n = n + 1.$$

- Elementy podane rekurencyjnie:

$$a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

- Ciąg arytmetyczny:

$$a_n = a_{n-1} + r.$$

- Ciąg geometryczny:

$$a_n = ra_{n-1}$$

Granica ciągu

Granica właściwa

Mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę właściwą $a \in \mathbb{R}$, co zapisujemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

gdy:

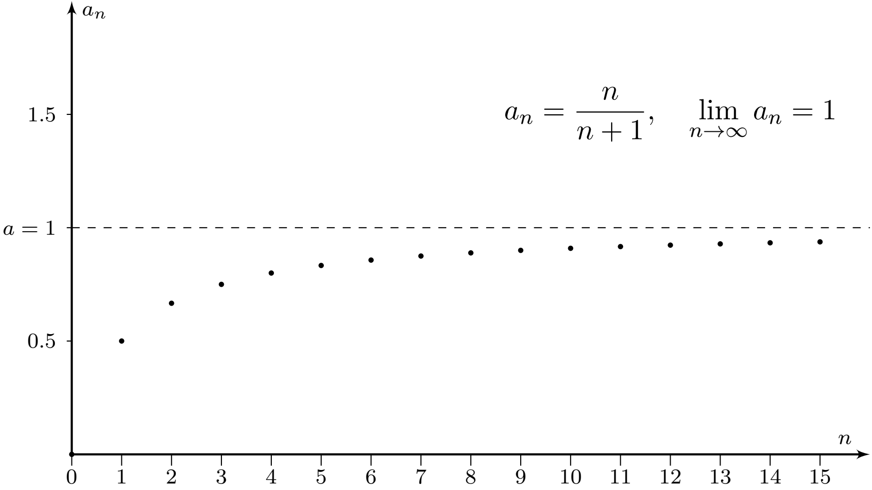
$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \big(n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\big)$$

Czasem zapisujemy też $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ lub krótko:

$$\lim a_n = a \qquad \text{lub} \qquad a_n \longrightarrow a.$$

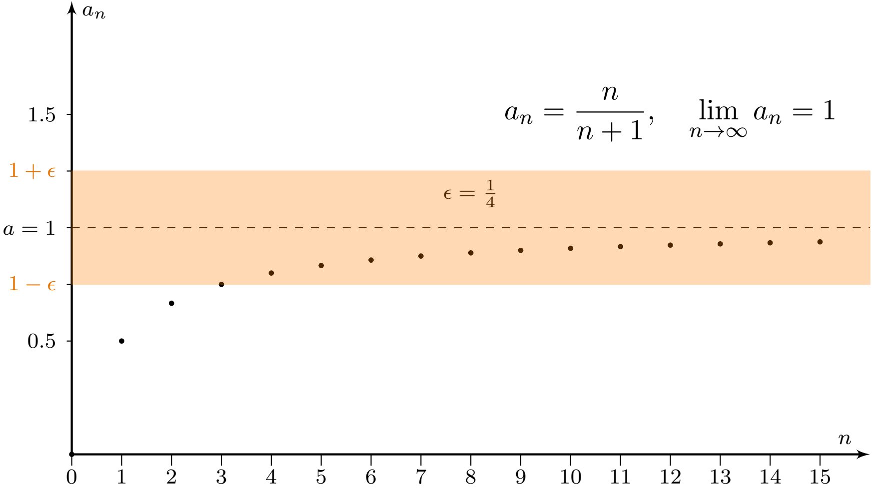
Granica ciągu – przykład

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \left(n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\right)$$



Granica ciągu – przykład

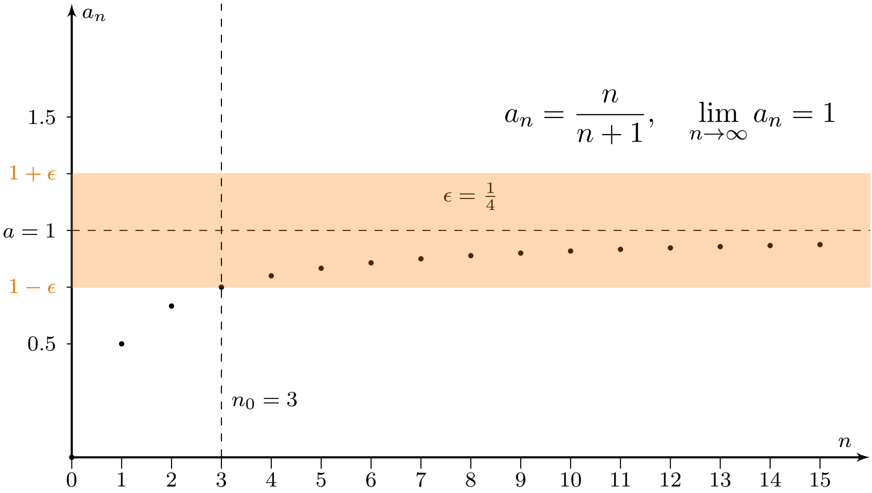
$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \left(n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\right)$$



$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

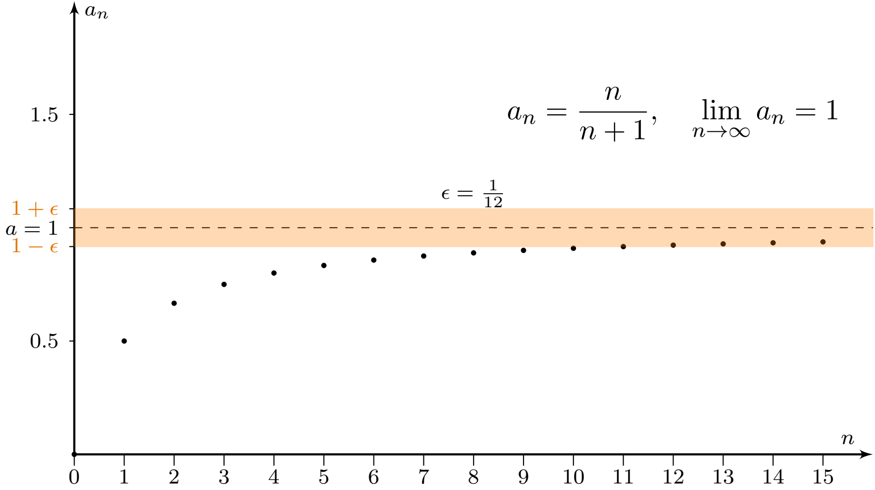
Granica ciągu – przykład

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \left(n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\right)$$



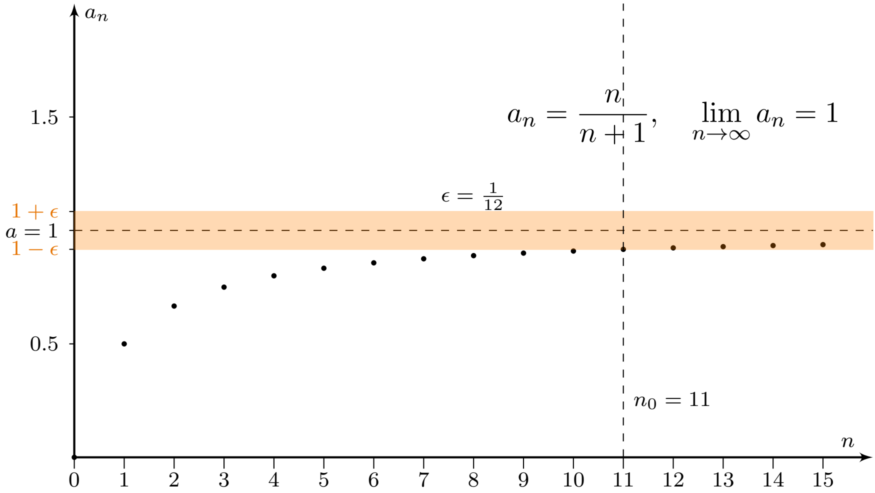
Granica ciągu – przykład

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \left(n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\right)$$



Granica ciągu – przykład

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \big(n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\big)$$



Granica ciągu

Granica niewłaściwa

Mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

gdy:

$$\forall_{\mathcal{E}>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n > n_0 \implies a_n > \mathcal{E})$$

Mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $-\infty$, co zapisujemy:

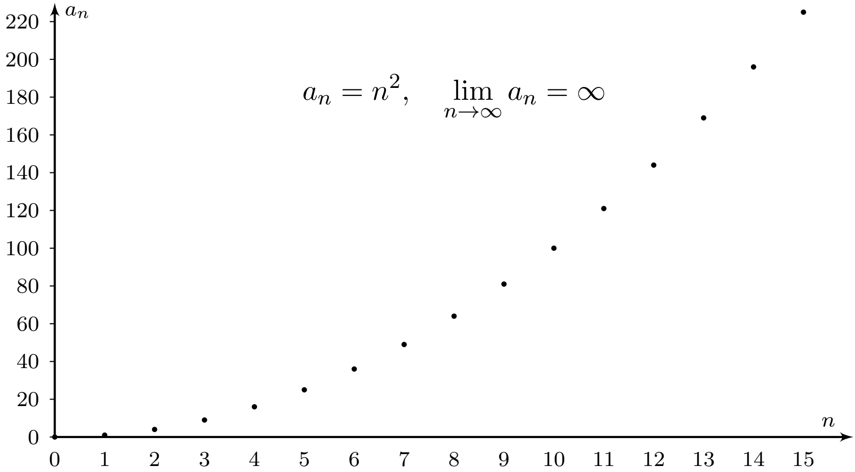
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

gdy:

$$\forall_{\mathcal{E}<0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n > n_0 \implies a_n < \mathcal{E})$$

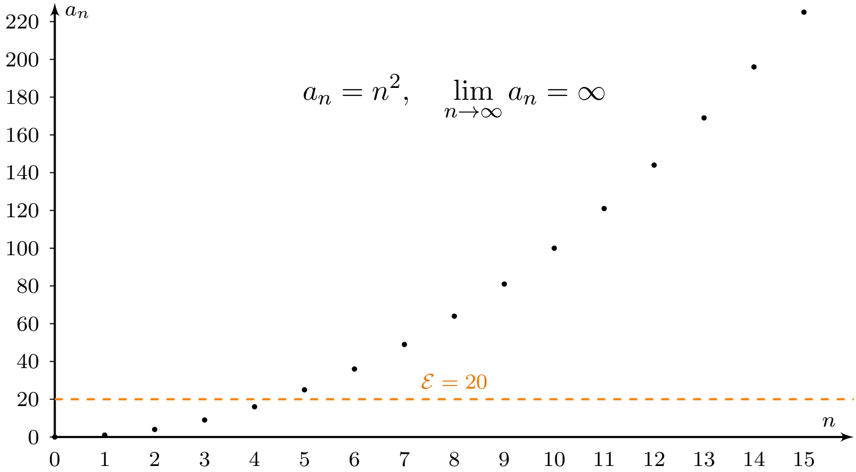
Granica niewłaściwa ciągu – przykład

$$\forall_{\mathcal{E}<0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n > n_0 \implies a_n > \mathcal{E})$$



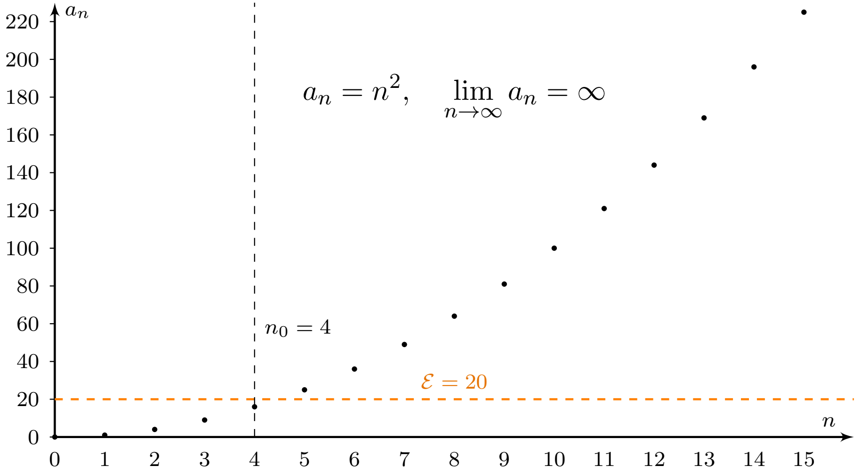
Granica niewłaściwa ciągu – przykład

$$\forall_{\mathcal{E}<0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n>n_0 \implies a_n>\mathcal{E})$$



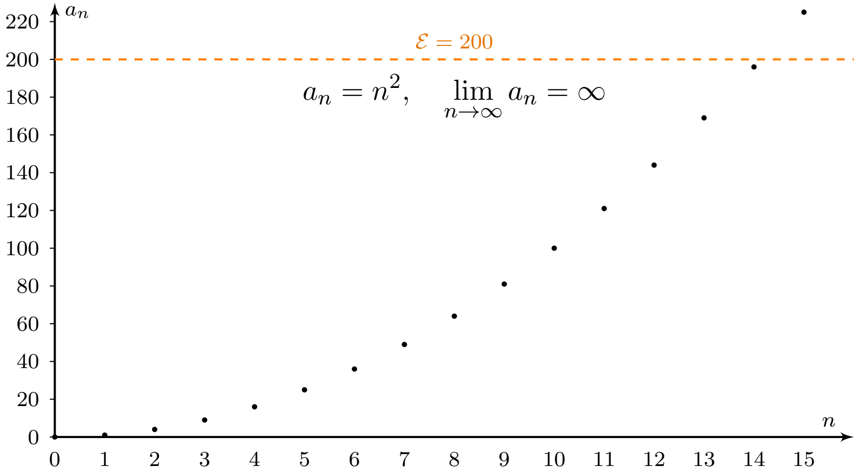
Granica niewłaściwa ciągu – przykład

$$\forall_{\mathcal{E}<0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \left(n > n_0 \implies a_n > \mathcal{E}\right)$$



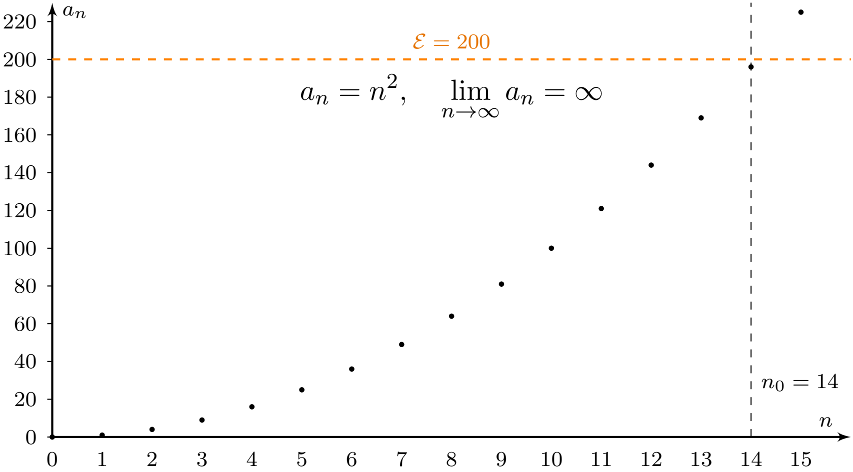
Granica niewłaściwa ciągu – przykład

$$\forall_{\mathcal{E}<0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n > n_0 \implies a_n > \mathcal{E})$$



Granica niewłaściwa ciągu – przykład

$$\forall_{\mathcal{E}<0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n > n_0 \implies a_n > \mathcal{E})$$



Twierdzenia o granicach właściwych ciągów

Twierdzenie

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) mają granice właściwe, to:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{o ile} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p \quad \text{gdzie} \ \ p \in \mathbb{Z}$$

Twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów

Twierdzenie

$$
\begin{aligned}
a+\infty &= \infty && \text{dla} && -\infty < a \le \infty \\
a\cdot\infty &= \infty && \text{dla} && 0 < a \le \infty \\
\frac{a}{\infty} &= 0 && \text{dla} && -\infty < a < \infty \\
\frac{a}{0^+} &= \infty && \text{dla} && 0 < a \le \infty \\
a^\infty &= 0 && \text{dla} && 0^+ \le a < 1 \\
a^\infty &= \infty && \text{dla} && 1 < a \le \infty \\
\infty^b &= 0 && \text{dla} && -\infty \le b < 0 \\
\infty^b &= \infty && \text{dla} && 0 < b \le \infty
\end{aligned}
$$

Wyrażenia nieoznaczone:

$$\infty-\infty, \quad 0\cdot\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

Twierdzenia o granicach właściwych ciągów

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$ spełniają warunki:

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla każdego $n \geq n_0$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$,

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów

Twierdzenie (o dwóch ciągach)

Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n)$ spełniają warunki:

1. $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$,

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla ciągów z granicą $-\infty$.

Liczba e

Definicja

Granicę ciągu (e_n) o postaci:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

oznaczamy przez e.

$e = 2.71828\ldots$.

Liczba e jest podstawą logarytmu naturalnego:

$$\ln x = \log_e x.$$