Analiza matematyczna i algebra liniowa
Układy równań liniowych

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:50

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

03.06.2019

Układ równań liniowych

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Lub zapisane macierzowo $AX = B$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Układ Cramera

Definicja

Układem Cramera nazywamy układów równań $AX = B$, w którym A jest macierzą kwadratową nieosobliwą. Wtedy rozwiązaniem jest:

$$X = A^{-1}B.$$

Istnieje uproszczony wzór:

$$X = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{bmatrix}$$

gdzie A_j oznacza macierz, w której j-tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych B.

Układ Cramera

Osobliwe A

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{bmatrix}$$

Jeśli A jest osobliwa (czyli $\det A = 0$) to:

- Jeśli chociaż jeden z wyznaczników $\det A_i$, $i = 1, \ldots, n$, jest niezerowy, to układ jest sprzeczny.
- Jeśli wszystkie wyznaczniki $\det A_i = 0$, to układ jest nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań) lub sprzeczny.

Układ Cramera

Praktyczna metoda bezwyznacznikowa

Zaczynamy od macierzy $[A|B]$, a następnie na wierszach otrzymanej w tej sposób macierzy wykonujemy operacje elementarne, otrzymując ostatecznie $[I|X]$

Można wykorzystać do tego algorytm Gaussa-Jordana.

Minor i rząd macierzy

Definicja

Minorem stopnia k macierzy nazywamy wyznacznik utworzony z dowolnych k kolumn i k wierszy macierzy.

Rzędem macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Rząd oznaczamy przez $\mathrm{rank}(A)$.

Rząd macierzy kwadratowej nieosobliwej jest równy jej stopniowi.

Operacje elementarne na wierszach (kolumnach) nie zmieniają rzędu.

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Twierdzenie

Układ równań $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu:

- Jeśli $\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}([A|B])$ to układ jest sprzeczny,
- Jeśli $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A|B]) = n$ to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- Jeśli $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A|B]) = r < n$ to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Rozwiązywanie ogólnego układu równań

Praktyczna metoda bezwyznacznikowa

Zaczynamy od macierzy $[A|B]$, a następnie na wierszach otrzymanej w tej sposób macierzy wykonujemy operacje elementarne, otrzymując ostatecznie macierz:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1,r+1} & \cdots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2,r+1} & \cdots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_{r,r+1} & \cdots & s_{rn} & z_r \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right]$$

Można wykorzystać do tego algorytm Gaussa-Jordana.

Rozwiązywanie ogólnego układu równań

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1,r+1} & \cdots & s_{1n} & z_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2,r+1} & \cdots & s_{2n} & z_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & s_{r,r+1} & \cdots & s_{rn} & z_r \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{r+1}
\end{array}\right]$$

- Jeśli $z_{r+1} \neq 0$ to układ jest sprzeczny.
- Jeśli $r+1$ wiersz się nie pojawi i $n = r$ to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x_1 = z_1, \ldots, x_n = z_n$.
- Jeśli $r+1$ wiersz się nie pojawi i $n > r$ to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, przy czym r spośród niewiadomych $x'_1, \ldots, x'_r$ zależy od pozostałych niewiadomych oznaczonych symbolami $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$.

Rozwiązywanie ogólnego układu równań

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1,r+1} & \cdots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2,r+1} & \cdots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_{r,r+1} & \cdots & s_{rn} & z_r \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,r+1} & s_{1,r+2} & \cdots & s_{1n} \\ s_{2,r+1} & s_{2,r+2} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m,r+1} & s_{m,r+2} & \cdots & s_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$