Analiza matematyczna i algebra liniowa
Macierze

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:40

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

27.05.2019

Wyznacznik macierzy

- Wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia $n = 1$:

$$\det[a_{11}] \;=\; a_{11}.$$

- Wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia $n = 2$:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \;=\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia $n = 3$:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \;=\; \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{array}$$

Wyznacznik

Definicja indukcyjna

Wyznacznik macierzy kwadratowej A to funkcja $\det A$, która każdej macierzy przypisuje liczbę rzeczywistą, określona indukcyjnie:

1. Jeśli A ma stopień 1 (wymiar 1×1), to $\det A = a_{11}$.
2. Jeśli macierz A ma stopień $n \geq 2$ (wymiar $n \times n$), to:
$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n},$$
   gdzie A_{ij} to macierz stopnia $n-1$ otrzymana z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyznacznik często oznaczamy również przez $|A|$.

Wyznacznik

Dopełnienie algebraiczne

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$.
Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$.
Wtedy wyznacznik A można obliczyć ze wzorów:

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \ldots + a_{in}D_{in},$$

$$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj},$$

gdzie i oraz j są, odpowiednio, indeksami dowolnego wiersza i dowolnej kolumny macierzy A.

Własności wyznacznika

- Jeśli macierz A ma kolumnę lub wiersz złożone z samych zer, to $\det A = 0$.
- Przestawienie dwóch kolumn lub dwóch wierszy zmienia znak wyznacznika na przeciwny.
- $\det(\alpha A) = \alpha^n A$, gdzie n to stopień macierzy A.
- $\det\left(A^\top\right) = \det A$.
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- Jeśli $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, to $\det A = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.
- Jeśli A jest macierzą górną (dolną) trójkątną, to $\det A$ jest równy ilocznynowi elementów na diagonali: $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.
- Jeśli $\det A = 0$, to A jest osobliwa (nie ma macierzy odwrotnej). Dlaczego?

Własności wyznacznika

- Wyznacznik nie zmienia się, jeśli do pewnej kolumny (wiersza) dodamy inną kolumnę (wiersz) pomnożoną przez dowolną stałą:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & \ldots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} + ca_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2i} + ca_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & \ldots & a_{3i} + ca_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} + ca_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Wniosek: Jeśli A ma dwie takie same kolumny (wiersze) to $\det A = 0$.

Własności wyznacznika

- Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny zawierając wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik macierzy:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & ca_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & ca_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & \ldots & ca_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & ca_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = c \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & \ldots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Własności wyznacznika

- Rozdzielność ze względu na sumę składników w kolumnie:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{3i}+a'_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$+ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a'_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Algorytm Gaussa obliczania wyznacznika

Zmniejszamy stopień wyznacznika o 1, odejmując pierwszy wiersz przemnożony przez odpowiednią stała od wszystkich innych wierszy i wykorzystując rozwinięcie Laplace'a:

$$
\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
$$

$$
= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} & a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{14} \\ a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} & a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{14} \\ a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{12} & a_{43} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{13} & a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{14} \end{bmatrix}
$$

Macierz odwrotna

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczaną przez A^{-1}, która spełnia warunek:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Uwaga: nie każda macierz ma macierz odwrotną!

Np. $A = [0]$, lub $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Macierz, która ma macierz odwrotną nazywamy odwracalną, a jeśli nie ma, nazywamy ją osobliwą.

Wyznacznik a macierz odwrotna

Jeśli macierz $A = [a_{ij}]$ stopnia n jest nieosobliwa (ma niezerowy wyznacznik), to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}^{\top}$$

Operacje elementarne

Na kolumnach:

- Zamiana i-tej i j-tej kolumny: $k_i \longleftrightarrow k_j$.
- Pomnożenie j-tej kolumny przez liczbę c: ck_j.
- Dodanie do elementów i-tej kolumny odpowiadających im elementów j-tej kolumny przemnożonych przez stała c: $k_i + ck_j$.

Na wierszach:

- Zamiana i-tego i j-tego wiersza: $w_i \longleftrightarrow w_j$.
- Pomnożenie j-tego wiersza przez liczbę c: cw_j.
- Dodanie do elementów i-tego wiersza odpowiadających im elementów j-tego wiersza przemnożonych przez stała c: $w_i + cw_j$.

Bezwyznacznikowa metoda obliczania macierzy odwrotnej

Zaczynamy od macierzy $[A|I]$, a następnie na wierszach otrzymanej w ten sposób macierzy wykonujemy operacje elementarne, otrzymując ostatecznie $[I|B]$.

Wtedy $B = A^{-1}$.

Praktyczny przykład tej metody to algorytm Gaussa-Jordana

Algorytm Gaussa-Jordana

I krok: trzeba uzyskać macierz trójkątną górną z jedynkami na głównej przekątnej:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Jeśli $a_{11} \neq 0$, to dokonujemy kolejno przekształceń:

$$\begin{cases} w_1' = w_1/a_{11} \\ w_2' = w_2 - a_{21}w_1' \\ \dots \\ w_n' = w_n - a_{n1}w_1' \end{cases}$$

- $a_{11} = 0$, to przestawiamy wiersze, aby uzyskać $a_{11} \neq 0$.
- Następnie przechodzimy do kolejnej kolumny, itp.

Algorytm Gaussa-Jordana

II krok: uzyskanie macierzy jednostkowej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Dokonujemy kolejno przekształceń:

$$\begin{cases} w''_n = w'_n \\ w''_{n-1} = w'_{n-1} - b_{n-1,n}w''_n \\ w''_{n-2} = w'_{n-2} - b_{n-2,n-1}w''_{n-1} - b_{n-2,n}w''_n \\ \ldots \end{cases}$$