Analiza matematyczna i algebra liniowa
Macierze

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: poniedziałek 15:10-16:40

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

20.05.2019

Macierz

Definicja

Macierz wymiaru $m \times n$ to prostokątna tablica mn liczb o m wierszach i n kolumnach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz A można też zapisywać jako $[a_{ij}]$. Przykłady macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2i \\ -1+i \end{bmatrix}$$

Rodzaje macierzy

Macierz zerowa

$$\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli wymiar jest jasny z kontekstu, to po prostu zapisujemy $\mathbf{0}$.

Macierz kwadratowa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wymiar $n \times n$ nazywamy często stopniem n.

Rodzaje macierzy

Macierz (kwadratowa) trójkątna dolna

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz (kwadratowa) trójkątna górna

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rodzaje macierzy

Macierz diagonalna

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Macierz jednostkowa

$$I_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Rodzaje macierzy

Wektor kolumnowy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Często oznaczany $\boldsymbol{a}$ lub $\underline{a}$.

Wektor wierszowy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Często oznaczany $\boldsymbol{a}^\top$ lub $\underline{a}^\top$.

Działania na macierzach

Suma i różnica macierzy

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą tego samego wymiaru $m \times n$. Sumą (różnicą) macierzy A i B jest macierz $C = [c_{ij}]$ dana przez:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}.$$

Piszemy $C = A \pm B$.

Iloczyn macierzy przez liczbę

Iloczynem macierzy A wymiaru $m \times n$ przez liczbę α nazywamy macierz B wymiaru $m \times n$ daną przez:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Piszemy $B = \alpha A$.

Własności działań na macierzach

Niech A, B, C będą dowolnymi macierzami tego samego wymiaru oraz α, β dowolnymi liczami. Wtedy:

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + \mathbf{0} = A$
- $A + (-A) = \mathbf{0}$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $1 \cdot A = A$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Iloczyn macierzy

Definicja

Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ ma wymiar $n \times k$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymairu $m \times k$, której elementy są określone wzorem:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Zapisujemy $C = AB$.

Czyli iloczyn AB ma sens tylko wtedy gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B.

Własności iloczynu macierzy

Niech A, B, C będą dowolnymi macierzami o odpowiednim wymiarze oraz α, β dowolnymi liczami. Wtedy:

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$
- $(AB)C = A(BC)$
- $AI_n = A$
- $I_m A = A$

Uwaga: mnożenie macierzy nie jest przemienne!
Tzn. w ogólności $AB \neq BA$.

Tylko jeśli A i B są diagonalne, to zawsze $AB = BA$.

Macierz odwrotna

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczaną przez A^{-1}, która spełnia warunek:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Uwaga: nie każda macierz ma macierz odwrotną!

Np. $A = [0]$, lub $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Macierz, która ma macierz odwrotną nazywamy odwracalną, a jeśli nie ma, nazywamy ją osobliwą.

Macierz transponowana

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$. Macierzą transponowaną do A nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, daną przez:

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Zapisujemy $B = A^\top$.

Własności macierzy transponowanej

- $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
- $\left(A^\top\right)^\top = A$
- $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Macierz dla której $A^\top = A$ nazywamy symetryczną.
Macierz dla której $A^\top = -A$ nazywamy antysymetryczną.

Wyznacznik macierzy 2×2

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej stopnia $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

nazywamy liczbę:

$$\det A = ad - bc.$$

Przykłady:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 7, \qquad \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Wyznacznik macierzy 3×3

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej stopnia $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

nazywamy liczbę:

$$\det A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Przykład:

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &- (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 \\ &= 12 + 0 - 1 + 3 - 0 + 8 = 22.\end{aligned}$$