Ćwiczenia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla bioinformatyki

Zadania dodatkowe z rozwiązaniami (08.04.2019)

Granice ciągów

Zadanie 1. Korzystając z definicji granicy ciągu udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} = 1.$$

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją granicy właściwej musimy pokazać, że:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \big(n > n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon\big)$$

Czyli: a jest granicą ciągu a_n, gdy dla każdego ϵ istnieje takie n_0, że dla wszystkich elementów ciągów a_n, dla n większych od n_0, zachodzi $|a_n - a| < \epsilon$.

Weźmy więc dowolne ϵ i musimy znaleźć n_0, takie, że dla $n > n_0$, mamy

$$\left|\frac{n}{1+n} - 1\right| < \epsilon,$$

Ponieważ:

$$\frac{n}{1+n} - 1 \; = \; \frac{n}{1+n} - \frac{1+n}{1+n} \; = \; -\frac{1}{1+n},$$

równoważnie musimy pokazać, że:

$$\left|-\frac{1}{1+n}\right| \; = \; \frac{1}{1+n} \; < \; \epsilon,$$

co daje po prostych przekształceniach:

$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Czyli jeśli weźmiemy jakiekolwiek $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$, to zajdzie $\left|\frac{n}{1+n} - 1\right| < \epsilon$.

Zadanie 2. Korzystając z definicji granicy ciągu udowodnij, że:

$$\lim_{n\to\infty} \big(n^2 - 2n + 1\big) = \infty$$

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją granicy niewłaściwej musimy pokazać, że:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; (n > n_0 \implies a_n > \mathcal{E})$$

Weźmy więc dowolne $\mathcal{E}$ i musimy znaleźć n_0, takie, że dla $n > n_0$, mamy

$$n^2 - 2n + 1 > \mathcal{E}.$$

Nierówność tą możemy przekształcić

$$(n-1)^2 > \mathcal{E},$$

a przekształcając dalej, otrzymujemy:

$$n > \sqrt{\mathcal{E}} + 1$$

Czyli jeśli weźmiemy jakiekolwiek $n_0 > \sqrt{\mathcal{E}} + 1$, to zajdzie $(n-1)^2 > \mathcal{E}$.

Zadanie 3. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów, oblicz granice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^6 - 3n^4 + 2}{5 - \sqrt{10n^{12}}},$$

Rozwiązanie: Ponieważ licznik dąży do ∞, a mianownik do $-\infty$, musimy wyeliminować symbol nieoznaczony $\frac{\infty}{-\infty}$ przekształcając wyrażenie:

$$\frac{5n^6 - 3n^4 + 2}{5 - \sqrt{10n^{12}}} = \frac{n^6\left(5 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^6}\right)}{n^6\left(\frac{5}{n^6} - \sqrt{10}\right)} = \frac{5 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^6}}{\frac{5}{n^6} - \sqrt{10}}.$$

(równie dobrze mogliśmy po prostu podzielić licznik i mianownik przez n^6, czyli najwyższą potęgę n – dostalibyśmy to samo oczywiście). Teraz korzystać będziemy z artymetyki granic:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^6 - 3n^4 + 2}{5 - \sqrt{10n^{12}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^6}}{\frac{5}{n^6} - \sqrt{10}} = \frac{5 - 3\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right) + 2\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\right)}{5\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\right) - \sqrt{10}}$$
$$= \frac{5 - 3\cdot 0 + 2\cdot 0}{5\cdot 0 - \sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{10}}.$$

Granice funkcji

Zadanie 4. Uzasadnić, że podana granica nie istnieje:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Rozwiązanie: Wystarczy wziąć dwa ciągi x_n i y_n, takie, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, oraz $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, a zarazem odpowiadające im ciągi wartości funkcji zbiegają do różnych granic, tzn. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, gdzie $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Weźmy sobie ciągi:

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad y_n = -\frac{1}{n}.$$

Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0.$$

Równocześnie:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|-\frac{1}{n}\right|}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

Zadanie 5. Korzystając z twierdzeń o artymetyce granic funkcji obliczyć:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}.$$

Rozwiązanie: Ponieważ licznik i mianownik dążą do 0, musimy wyeliminować symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ przekształcając wyrażenie:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Teraz korzystać będziemy z artymetyki granic:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{\left(\lim_{x\to -1}x\right)+1}{\left(\lim_{x\to -1}x\right)-1}=\frac{1-1}{-1-1}=\frac{0}{-2}=0.$$

Zadanie 6. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+\sin^2 x}{x}$$

Rozwiązanie: Ponieważ $0\le \sin^2 x\le 1$, mamy:

$$\frac{x}{x}\le\frac{x+\sin^2 x}{x}\le\frac{x+1}{x}.$$

Obliczmy granice lewej i prawej funkcji:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to -\infty}1=1.$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+0=1.$$

Granica jest taka sama. Czyli z twierdzenia o trzech funkcjach mamy $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+\sin^2 x}{x}=1$.

Zadanie 7. Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x^2}{|x-1|} & \text{dla } x\neq 1,\\ 1 & \text{dla } x=1.\end{cases}$$

Funkcja jest ciągła wszędzie poza $x_0=1$, ponieważ jest złożeniem działań typu różnica, iloraz, potęga, wartość bezwzględna funkcji ciągłych, a więc jest funkcją ciągłą. Tylko w punkcie $x_0=1$ musimy dokładnie przyjrzeć się ciągłości. Wartość funkcji w $x_0=1$ ze wzoru wynosi $f(x_0)=1$. Natomiast granica wynosi:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}(x^2)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}=1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}.$$

Zbadajmy osobno granice lewostronne i prawostronne. Dla granicy lewostronnej $|x-1|=-x+1$, ponieważ x dąży do 1 od strony liczb *mniejszych* od 1: Czyli:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{-x+1}=\lim_{x\to 1^-}-1=-1.$$

Dla granicy prawostronnej $|x-1|=x-1$, ponieważ x dąży do 1 od strony liczb *większych* od 1:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}1=1.$$

Ponieważ granice jednostronne są różne, funkcja $f(x)$ nie ma granicy w $x_0=1$, *nie jest więc w tym punkcie ciągła.* Ale granica prawostronna jest równa wartości funkcji w punkcie $x_0=1$, $f(1)=1$, stąd funkcja jest *prawostronnie ciągła.*

Pochodne

Zadanie 8. Korzystając z definicji pochodnej, udowodnij, że

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją pochodnej:

$$f'(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}.$$

Podstawiając $f(x) = \frac{1}{x}$, mamy:

$$\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} = \frac{\frac{1}{x+\Delta} - \frac{1}{x}}{\Delta} = \frac{\frac{x-(x+\Delta)}{(x+\Delta)x}}{\Delta} = \frac{x-(x+\Delta)}{\Delta(x+\Delta)x} = \frac{-\cancel{\Delta}}{\cancel{\Delta}(x+\Delta)x} = -\frac{1}{(x+\Delta)x}.$$

Biorąc granicę dla $\Delta \to 0$ mamy:

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} -\frac{1}{(x+\Delta)x} = -\frac{1}{x^2}$$

Zadanie 9. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{1+\cos(2x)} - \sqrt{x+\sqrt{x}}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\ln(1+e^x)}{1+\cos(2x)} - \sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' \\
&= \left(\frac{\ln(1+e^x)}{1+\cos(2x)}\right)' - \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' \\
&= \frac{(\ln(1+e^x))'(1+\cos(2x)) - (\ln(1+e^x))(1+\cos(2x))'}{(1+\cos(2x))^2} - \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})'.
\end{aligned}$$

Obliczamy trzy pochodne, które pozostały w wyrażeniu powyżej:

$$\begin{aligned}
(\ln(1+e^x))' &= \frac{1}{1+e^x}(1+e^x)' = \frac{e^x}{1+e^x} \\
(1+\cos(2x))' &= -\sin(2x)(2x)' = -2\sin(2x) \\
(x+\sqrt{x})' &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Stąd:

$$f'(x) = \frac{\frac{e^x}{1+e^x}(1+\cos(2x)) + 2\ln(1+e^x)\sin(2x)}{(1+\cos(2x))^2} - \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Zadanie 10. Używając reguły de L'Hospitala, wyznacz granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x}$$

Rozwiązanie: Po prawej stronie mamy symbol nieoznaczony $\infty - \infty$, stąd aby zastosować regułę de L'Hospitala, trzeba to wyrażenie przekształcić sprowadzając do wspólnego mianownika:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin^2 x}{x \sin^2 x}.$$

Otrzymujemy tutaj wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$ i możemy zastosować regułę de L'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin^2 x}{x \sin^2 x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin^2 x)'}{(x \sin^2 x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2x \cos x \sin x} = \frac{1-0}{0^+ + 0^+} = \infty.$$

Zadanie 11. Wyznacz wielomiany Taylora do 2 stopnia dla funkcji $f(x)$ wokół punktu x_0:

$$f(x) = \sin x, \qquad x_0 = 0.$$

Rozwiązanie: Musimy wyznaczyć wielomiany Taylora zerowego, pierwszego i drugiego stopnia:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= f(x_0) \\ P_1(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) = P_0(x) + f'(x_0)(x - x_0) \\ P_2(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = P_1(x) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

Ponieważ:

$$f'(x) = \cos x,$$
$$f''(x) = -\sin x,$$

stąd:

$$P_0(x) = 0$$
$$P_1(x) = 0 + 1(x - 0) = x$$
$$P_2(x) = x + \frac{1}{2}(-0)(x - 0)^2 = x.$$

Zadanie 12. Zbadać monotoniczność funkcji:

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) - \ln x.$$

Rozwiązanie: Funkcja jest tylko określona dla dodatnich x z powodu logarytmu. Wyznaczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x - (1 + x^2)}{x(1 + x^2)}.$$

Znak mianownika $x(1+x^2)$ jest taki sam jak znak x, a ponieważ argument x musi być dodatni, mianownik jest dodatni w całej dziedzinie funkcji. Jeśli chodzi o licznik, łatwo sprawdzić (np. wyliczając Δ, która wyjdzie ujemna), że $-x^2 + x - 1 < 0$. Stąd $f'(x) < 0$, a więc funkcja jest malejąca w całej swojej dziedzinie.

Zadanie 13. Znaleźć ekstrema funkcji:

$$f(x) = x - \sqrt{x}$$

Rozwiązanie: Wyznaczamy pierwszą pochodną funkcji:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Przyrównujemy pochodną do zera:

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \iff 2\sqrt{x} = 1 \iff x = \frac{1}{4}.$$

Czyli mamy kandydata na ekstremum w $x = \frac{1}{4}$. Teraz wyznaczamy drugą pochodną:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

Sprawdzamy znak drugiej pochodnej w punkcie $x = \frac{1}{4}$:

$$f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

A więc mamy w maksimum w $x = \frac{1}{4}$. Maksimum to wynosi:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}.$$

Zadanie 14. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = x^2(x-2)^2.$$

Rozwiązanie: Wyznaczamy pierwszą i drugą pochodną:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2) = 2x(x-2)(2x-2) = 4x(x-1)(x-2) \\ f''(x) &= 4(x-1)(x-2) + 4x(x-2) + 4x(x-1) \\ &= 4(3x^2 - 6x + 2) = 12\left(x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z policzenia Δ i rozbicia funkcji kwadratowej na iloczyn. A więc $f''(x)$ jest dodatnie na przedziale $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (a tym samym $f(x)$ jest na tym przedziale wypukła) i ujemne poza tym przedziałem (a tym samym $f(x)$ jest wklęsła poza tym przydziałem).

Punkty przegięcia to:

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3},$$

ponieważ funkcja zmienia się w nich z wypukłej na wklęsłą lub odwrotnie.

Całki

Zadanie 15. Oblicz:
$$\int \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Rozwiązanie: Uprośćmy funkcję podcałkową:
$$\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2-x^{1/2}}{x^{1/3}} = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{1}{6}}.$$

Wtedy:
$$\int \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{5}{3}}dx - \int x^{\frac{1}{6}}dx = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C.$$

Zadanie 16. Oblicz:
$$\int x^2 \mathrm{arctg} x dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:
$$\int x^2 \mathrm{arctg} x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \mathrm{arctg} x & f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ g'(x) = x^2 & g(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right| = \frac{1}{3}x^3 \mathrm{arctg}(x) - \int \frac{1}{3}\frac{x^3}{1+x^2}dx.$$

Pozostaje więc jeszcze policzyć całkę:
$$\int \frac{1}{3}\frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx.$$

Jest to niewłaściwa całka wymierna, a więc można obniżyć stopień licznika tak, aby był on niższy od stopnia mianownika:
$$\frac{x^3}{1+x^2} = ax + b + \frac{cx+d}{1+x^2}.$$

Po wymnożeniu obu stron przez $1+x^2$ dostajemy:
$$x^3 = (ax+b)(1+x^2) + cx + d = ax^3 + bx^2 + x(a+c) + d + b$$

Ponieważ współczynniki przy kolejnych potęgach x^3, x^2, x^1, x^0 muszą być równe po obu stronach równania, dostajemy:
$$\begin{aligned} 1 &= a, \\ 0 &= b, \\ 0 &= a + c \quad \Rightarrow \quad c = -1, \\ 0 &= d + b \quad \Rightarrow \quad d = 0. \end{aligned}$$

Tym samym:
$$\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2},$$

Stąd:
$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx &= \frac{1}{3}\left(\int xdx - \int \frac{x}{1+x^2}dx\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{x}{1+x^2}dx\right) \\ &= \left| \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{array} \right| \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{dt}{2t}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln|t|\right) = \frac{1}{6}\left(x^2 - \ln(1+x^2)\right). \end{aligned}$$

Podsumowując:

$$\int x^2 \text{arctg} x dx \;=\; \frac{1}{3}x^3\text{arctg}(x) - \frac{1}{6}\left(x^2 - \ln(1+x^2)\right) + C.$$

Zadanie 17. Oblicz:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx.$$

Rozwiązanie: Rozdzielamy na dwie całki:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4}dx = \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \int \frac{3}{x^2+4}dx.$$

Każdą z tych całek wyliczymy osobno: Dla pierwszej całki stosujemy podstawienie:

$$\begin{aligned} t &= x^2+4\ , \\ dt &= 2xdt\ . \end{aligned}$$

a stąd:

$$\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(x^2+4).$$

W drugiej całce dokonujemy podstawienia:

$$\begin{aligned} t &= x/2 \\ dt &= dx/2 \end{aligned}$$

a stąd:

$$\int \frac{3}{x^2+4}dx = \int \frac{6}{4t^2+4}dt = \frac{6}{4}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{3}{2}\text{arctg}\, t = \frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Podsumowując:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Zadanie 18. Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx$$

Rozwiązanie: Możemy policzyć najpierw całkę nieoznaczoną:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx \;&=\; \left|\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{array}\right| \quad x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \\ &=\; \left|\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array}\right| \quad x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x. \end{aligned}$$

Teraz wyznaczamy całkę oznaczoną:

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = (x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x)\Big|_0^\pi = -2\pi.$$