Uczenie ze wzmocnieniem

Na podstawie: AIMA ch21

Wojciech Jaśkowski

Instytut Informatyki,
Politechnika Poznańska

15 maja 2014

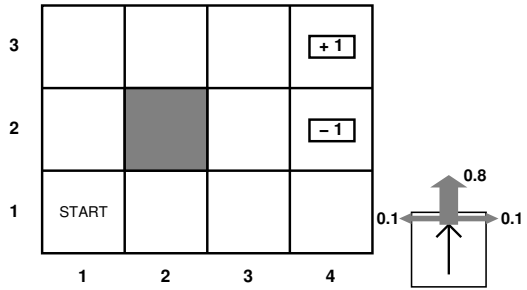
Uczenie ze wzmocnieniem
Na podstawie: AIMA ch21

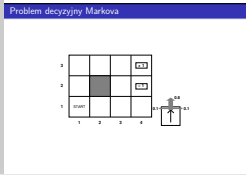
Wojciech Jaśkowski

Instytut Informatyki,
Politechnika Poznańska

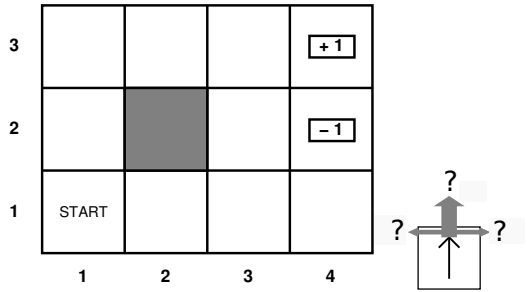
15 maja 2014

Problem decyzyjny Markova

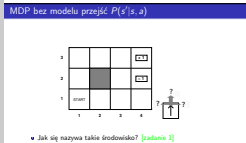




MDP bez modelu przejść $P(s'|s,a)$

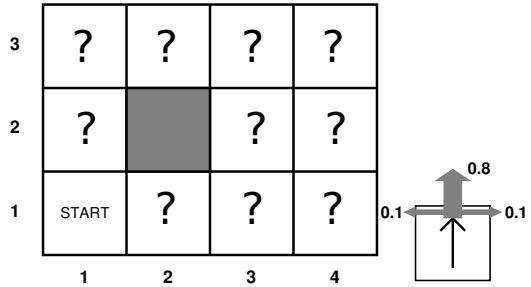


- Jak się nazywa takie środowisko? [zadanie 1]

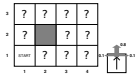


1. Środowisko jest nieznane

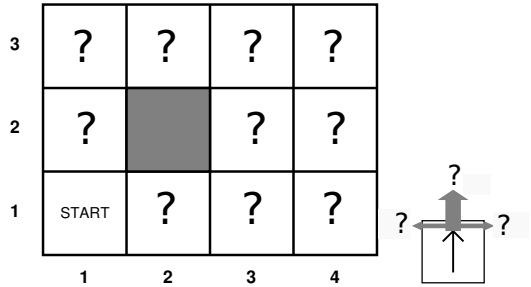
MDP z nieznaną funkcją nagrody $R(s)$

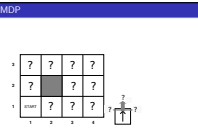


MDP z nieznaną funkcją nagrody $R(s)$



Nieznane MDP





Uczenie ze wzmocnieniem (RL)

Problem uczenia ze wzmocnieniem

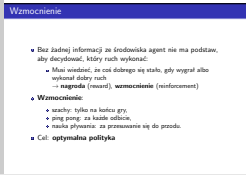
= MDP bez modelu przejść i bez funkcji nagrody = **nieznany MDP**

- Agent musi **nauczyć się**:
  1. czy **ruch jest dobry czy zły** (f. nagrody)
  2. **dokąd prowadzą jego akcje** (model przejść)
     - **przewidywać** ruchy przeciwnika

1. W skrócie: wyobraź sobie grę, której zasad nie znasz. Grasz, a po 100 ruchach sędzia mówi: „przegrałeś”. To jest uczenie ze wzmocnieniem.

Wzmocnienie

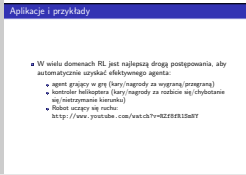
- Bez żadnej informacji ze środowiska agent nie ma podstaw, aby decydować, który ruch wykonać:
  - Musi wiedzieć, że coś dobrego się stało, gdy wygrał albo wykonał dobry ruch
    $\rightarrow$ **nagroda** (reward), **wzmocnienie** (reinforcement)
- **Wzmocnienie**:
  - szachy: tylko na końcu gry,
  - ping pong: za każde odbicie,
  - nauka pływania: za przesuwanie się do przodu.
- Cel: **optymalna polityka**



1. Przypomnienie: optymalna polityka maksymalizuje oczekiwaną (zdyskontowany) sumę nagród (pod warunkiem posiadanej wiedzy).

Aplikacje i przykłady

- W wielu domenach RL jest najlepszą drogą postępowania, aby automatycznie uzyskać efektywnego agenta:
  - agent grający w grę (kary/nagrody za wygraną/przegraną)
  - kontroler helikoptera (kary/nagrody za rozbicie się/chybotanie się/nietrzymanie kierunku)
  - Robot uczący się ruchu: `http://www.youtube.com/watch?v=RZf8fR1SmNY`



1. Co jest stanem środowiska? Jakie akcje wykonuje? Za co dostaje wzmocnienie?

Podejścia do RL

Równanie Bellman'a:

$$U(s) = R(s) + \gamma \max_{a \in A} \sum_{s'} U(s')P(s'|s,a)$$

Trzy podejścia do RL:

1. **agent odruchowy** (ang. *direct policy search*)
   - Uczy się polityki $\pi : S \rightarrow A$

Podejścia do RL
Równanie Bellman'a:
$U(s) = R(s) + \gamma \max_{a \in A} \sum_{s'} U(s')P(s'|s,a)$
Trzy podejścia do RL:
1. **agent odruchowy** (ang. *direct policy search*)
   - Uczy się polityki $\pi : S \rightarrow A$

1. Teraźniejszość $R(s)$ + przyszłość.
2. która mapuje bezpośrednio stany na akcje.
3. utility-based agent musi posiadać model środowiska, żeby podejmować decyzje.
4. Q-learning agent nie musi posiadać modelu środowiska, ale przez to nie może wnioskować na więcej niż jeden ruch do przodu (bo nie wie w jakim stanie będzie).
5. Tylko ten z funkcją Q.

Podejścia do RL

Równanie Bellman'a:

$$U(s) = R(s) + \gamma \max_{a \in A} \sum_{s'} U(s')P(s'|s,a)$$

Trzy podejścia do RL:

1. **agent odruchowy** (ang. *direct policy search*)
   - Uczy się polityki $\pi : S \rightarrow A$
2. **agent z funkcją użyteczności** U
   - uczy się f. użyteczności $U(s)$ i używa jej, aby wybierać akcje, które maksymalizują wartość oczekiwaną przyszłych nagród.

Podejścia do RL
Równanie Bellman'a:
$U(s) = R(s) + \gamma \max_{a \in A} \sum_{s'} U(s')P(s'|s,a)$
Trzy podejścia do RL:
1. **agent odruchowy** (ang. *direct policy search*)
   - Uczy się polityki $\pi : S \rightarrow A$.
2. **agent z funkcją użyteczności** U
   - uczy się f. użyteczności $U(s)$ i używa jej, aby wybierać akcje, które maksymalizują wartość oczekiwaną przyszłych nagród.

1. Teraźniejszość $R(s)$ + przyszłość.
2. która mapuje bezpośrednio stany na akcje.
3. utility-based agent musi posiadać model środowiska, żeby podejmować decyzje.
4. Q-learning agent nie musi posiadać modelu środowiska, ale przez to nie może wnioskować na więcej niż jeden ruch do przodu (bo nie wie w jakim stanie będzie).
5. Tylko ten z funkcją Q.

Podejścia do RL

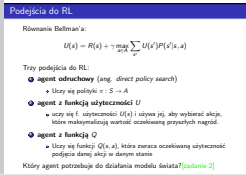
Równanie Bellman'a:

$$U(s) = R(s) + \gamma \max_{a \in A} \sum_{s'} U(s')P(s'|s,a)$$

Trzy podejścia do RL:

1. **agent odruchowy** (ang. *direct policy search*)
   - Uczy się polityki $\pi : S \rightarrow A$
2. **agent z funkcją użyteczności** U
   - uczy się f. użyteczności $U(s)$ i używa jej, aby wybierać akcje, które maksymalizują wartość oczekiwaną przyszłych nagród.
3. **agent z funkcją** Q
   - Uczy się funkcji $Q(s,a)$, która zwraca oczekiwaną użyteczność podjęcia danej akcji w danym stanie

Który agent potrzebuje do działania modelu świata?[zadanie 2]



1. Teraźniejszość $R(s)$ + przyszłość.
2. która mapuje bezpośrednio stany na akcje.
3. utility-based agent musi posiadać model środowiska, żeby podejmować decyzje.
4. Q-learning agent nie musi posiadać modelu środowiska, ale przez to nie może wnioskować na więcej niż jeden ruch do przodu (bo nie wie w jakim stanie będzie).
5. Tylko ten z funkcją Q.

Typy uczenia ze wzmocnieniem

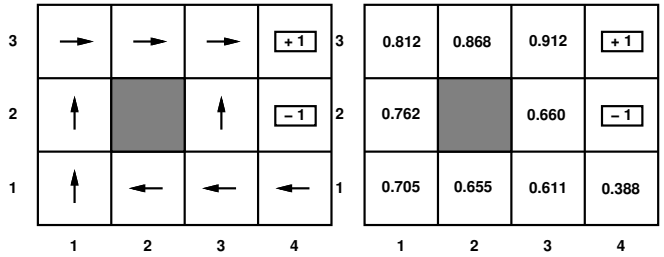
Typy uczenia ze wzmocnieniem:

- **pasywne.** Polityka π jest dana.
  - Uczymy się tylko użyteczności stanów funkcja $U(s)$ lub użyteczności par stan-akcja: funkcja $Q(s, a)$
- **aktywne.** Musimy również nauczyć się polityki („co mam robić?")
  - Konieczna eksploracja...

Typy uczenia ze wzmocnieniem

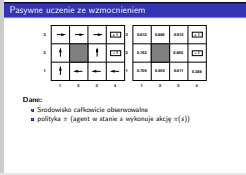
Typy uczenia ze wzmocnieniem:
- **pasywne.** Polityka π jest dana.
  - Uczymy się tylko użyteczności stanów funkcja $U(s)$ lub użyteczności par stan-akcja: funkcja $Q(s, a)$
- **aktywne.** Musimy również nauczyć się polityki („co mam robić?")
  - Konieczna eksploracja...

Pasywne uczenie ze wzmocnieniem

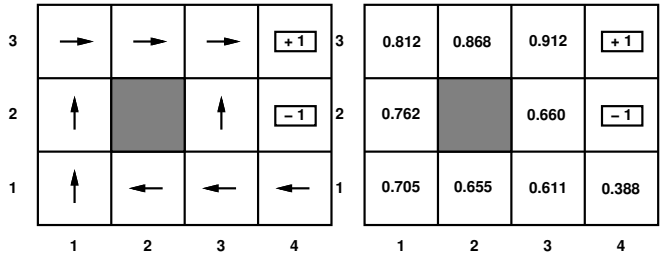


Dane:

- Środowisko całkowicie obserwowalne
- polityka π (agent w stanie s wykonuje akcję $\pi(s)$)



Pasywne uczenie ze wzmocnieniem

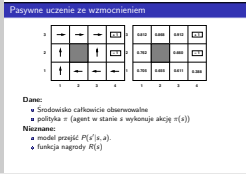


Dane:

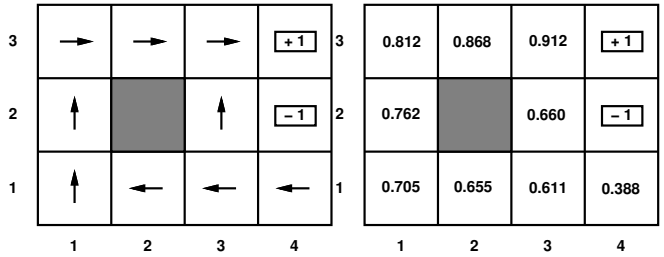
- Środowisko całkowicie obserwowalne
- polityka π (agent w stanie s wykonuje akcję $\pi(s)$)

Nieznane:

- model przejść $P(s'|s,a)$.
- funkcja nagrody $R(s)$



Pasywne uczenie ze wzmocnieniem



Dane:

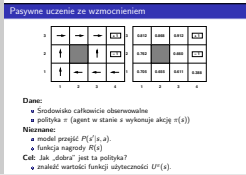
- Środowisko całkowicie obserwowalne
- polityka π (agent w stanie s wykonuje akcję $\pi(s)$)

Nieznane:

- model przejść $P(s'|s,a)$.
- funkcja nagrody $R(s)$

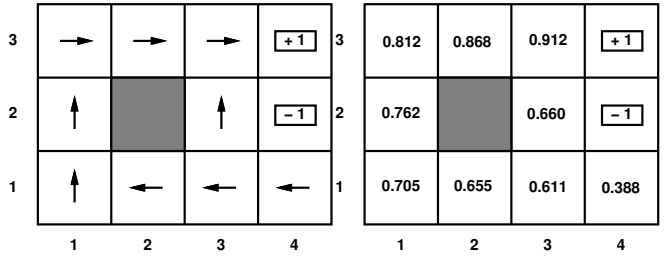
Cel: Jak „dobra" jest ta polityka?

- znaleźć wartości funkcji użyteczności $U^{\pi}(s)$.



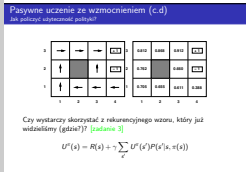
Pasywne uczenie ze wzmocnieniem (c.d)

Jak policzyć użyteczność polityki?



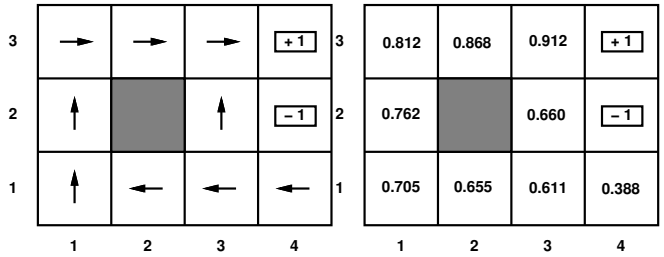
Czy wystarczy skorzystać z rekurencyjnego wzoru, który już widzieliśmy (gdzie?)? [zadanie 3]

$$U^{\pi}(s) = R(s) + \gamma \sum_{s'} U^{\pi}(s') P(s'|s, \pi(s))$$



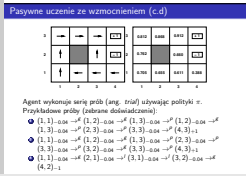
1. Nie, bo nie znamy modelu świata oraz R. Algorytm iteracji polityki.

Pasywne uczenie ze wzmocnieniem (c.d)



Agent wykonuje serię prób (ang. *trial*) używając polityki π.
Przykładowe próby (zebrane doświadczenie):

1. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (2,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (4,3)_{+1}$
2. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (2,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (4,3)_{+1}$
3. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (2,1)_{-0.04} \rightarrow^{l} (3,1)_{-0.04} \rightarrow^{l} (3,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (4,2)_{-1}$



1. p. 3 może budzić wątpliwości. Zgodnie z modelem, który przyjmowaliśmy, z $(2,1)$ idąc w lewo nie można się dostać do $(3,1)$.

Pasywne uczenie ze wzmocnieniem (c.d)

(Przypomnienie) def. użyteczności polityki w stanie s:

$$U^{\pi}(s) = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R(S_t)\right],$$

gdzie:

- S_t — zmienna losowa „stan, w którym jestem w czasie t"
- γ — współczynnik dyskontowy (przyjmiemy 1)

Czyli:

- Użyteczność stanu = oczekiwana całkowita nagroda z tego stanu dalej (oczekiwana **reward-to-go**).

Pasywne uczenie ze wzmocnieniem (c.d)
(Przypomnienie) def. użyteczności polityki w stanie s:
$U^{\pi}(s) = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R(S_t)\right]$,
gdzie:
- S_t — zmienna losowa „stan, w którym jestem w czasie t"
- γ — współczynnik dyskontowy (przyjmiemy 1)
Czyli:
- Użyteczność stanu = oczekiwana całkowita nagroda z tego stanu dalej (oczekiwana **reward-to-go**).

1. reward-to-go to empiryczna wartość użyteczności stanu.

Algorytm: Bezpośrednia estymacja użyteczności (Widrow and Hoff, 1960)

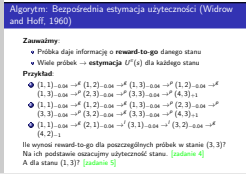
Zauważmy:

- Próbka daje informację o **reward-to-go** danego stanu
- Wiele próbek $\rightarrow$ **estymacja** $U^{\pi}(s)$ dla każdego stanu

Przykład:

1. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (2,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (4,3)_{+1}$
2. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (2,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (4,3)_{+1}$
3. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (2,1)_{-0.04} \rightarrow^{l} (3,1)_{-0.04} \rightarrow^{l} (3,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (4,2)_{-1}$

Ile wynosi reward-to-go dla poszczególnych próbek w stanie $(3,3)$?
Na ich podstawie oszacujmy użyteczność stanu. [zadanie 4]
A dla stanu $(1,3)$? [zadanie 5]



1. Stan ten odwiedzone 3 razy. Możemy więc estymować jego użyteczność jako $U^{\pi}(3,3) = (0.88 + 0.96 + 0.96)/3 \approx 0.93$.
2. $U^{\pi}(1,3) = (0.80 + 0.80 + 0.88)/3 \approx$

Bezpośrednia estymacja użyteczności (c.d.)

1. Sprowadza problem (pasywnego) RL do problemu uczenia nadzorowanego:
   - zbiór przykładów typu ⟨stan, reward-to-go⟩

Bezpośrednia estymacja użyteczności (c.d.)
Sprowadza problem (pasywnego) RL do problemu uczenia nadzorowanego:
zbiór przykładów typu ⟨stan, reward-to-go⟩

1. Ale zbiega, i to niechybnie.

Bezpośrednia estymacja użyteczności (c.d.)

1. Sprowadza problem (pasywnego) RL do problemu uczenia nadzorowanego:
   - zbiór przykładów typu ⟨stan, reward-to-go⟩
2. Nie uwzględnia informacji o zależnościach pomiędzy stanami.
   - **Użyteczności sąsiednich stanów nie są niezależne**!
   - Użyteczność **stanu** = nagroda w tym stanie + oczekiwana użyteczność jego **następników**, czyli:
     1. $$U^{\pi}(s) = R(s) + \gamma \sum_{s'} U^{\pi}(s') P(s'|s, \pi(s))$$
   - Stracona okazja do nauki → algorytm zbiega zbyt wolno.

Bezpośrednia estymacja użyteczności (c.d.)
Sprowadza problem (pasywnego) RL do problemu uczenia nadzorowanego:
zbiór przykładów typu ⟨stan, reward-to-go⟩
Nie uwzględnia informacji o zależnościach pomiędzy stanami.
Użyteczności sąsiednich stanów nie są niezależne!
Użyteczność stanu = nagroda w tym stanie + oczekiwana użyteczność jego następników, czyli:
$U^{\pi}(s) = R(s) + \gamma \sum_{s'} U^{\pi}(s') P(s'|s, \pi(s))$
Stracona okazja do nauki → algorytm zbiega zbyt wolno.

1. Ale zbiega, i to niechybnie.

Adaptatywne Programowanie Dynamiczne (ADP)

1. Bierze pod uwagę zależności pomiędzy użytecznościami stanów.
2. Bezpośrednio uczy się:
   - modelu przejść $P(s'|s,a)$
   - funkcji nagrody $R(s)$

Adaptatywne Programowanie Dynamiczne (ADP)
1. Bierze pod uwagę zależności pomiędzy użytecznościami stanów.
2. Bezpośrednio uczy się:
   - modelu przejść $P(s'|s,a)$
   - funkcji nagrody $R(s)$

Algorytm: Adaptatywne Programowanie Dynamiczne

Agent ze stanu s wykonał akcję $\pi(s) = a$ docierając do stanu s' otrzymując nagrodę r'.

procedure PASSIVE-ADP(s, a, s', r')
  if s' jest nowym stanem **then**
    $U[s'] \leftarrow r'$; $R[s'] \leftarrow r'$
  $N[s, a] \leftarrow N[s, a] + 1$
  $M[s', s, a] \leftarrow M[s', s, a] + 1$
  for w **in** znane następniki stanu s (tzn. $M[w, s, a] > 0$) **do**
    $P(w|s, a) \leftarrow M[w, s, a]/N[s, a]$
  $U \leftarrow$ Policy-Evaluation (π, P, R, U)

Policy-Evaluation: układ równań lub iteracyjnie.

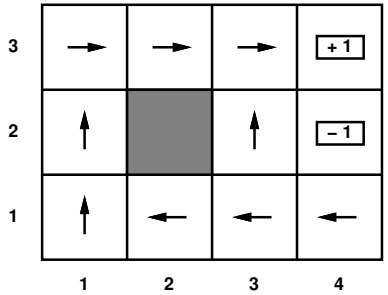
Algorytm: Adaptatywne Programowanie Dynamiczne
Agent ze stanu s wykonał akcję $\pi(s) = a$ docierając do stanu s' otrzymując nagrodę r'.
procedure PASSIVE-ADP(s, a, s', r')
  if s' jest nowym stanem **then**
    $U[s'] \leftarrow r'$; $R[s'] \leftarrow r'$
  $N[s, a] \leftarrow N[s, a] + 1$
  $M[s', s, a] \leftarrow M[s', s, a] + 1$
  for w **in** znane następniki stanu s (tzn. $M[w, s, a] > 0$) **do**
    $P(w|s, a) \leftarrow M[w, s, a]/N[s, a]$
  $U \leftarrow$ Policy-Evaluation (π, P, R, U)
Policy-Evaluation: układ równań lub iteracyjnie.

1. Algorytm uaktualnia wiedzę o modelu i na tej podstawie oblicza funkcję użyteczności U^{π}.

ADP — Przykład

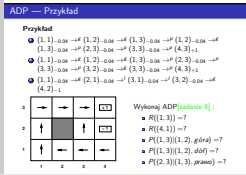
Przykład:

1. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (2,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (4,3)_{+1}$
2. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (1,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (2,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (3,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (3,3)_{-0.04} \rightarrow^{p} (4,3)_{+1}$
3. $(1,1)_{-0.04} \rightarrow^{g} (2,1)_{-0.04} \rightarrow^{l} (3,1)_{-0.04} \rightarrow^{l} (3,2)_{-0.04} \rightarrow^{g} (4,2)_{-1}$



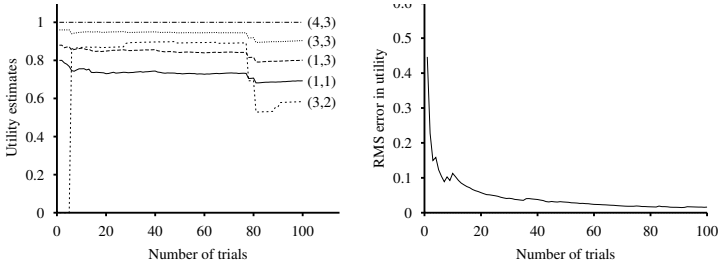
Wykonaj ADP[zadanie 6] :

- $R((1,3)) = ?$
- $R((4,1)) = ?$
- $P((1,3)|(1,2), góra) = ?$
- $P((1,3)|(1,2), dół) = ?$
- $P((2,3)|(1,3), prawo) = ?$



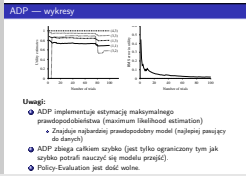
1. -0.04
2. Null
3. 3/3=1
4. Null
5. 2/3=0.66

ADP — wykresy



Uwagi:

1. ADP implementuje estymację maksymalnego prawdopodobieństwa (maximum likelihood estimation)
   - Znajduje najbardziej prawdopodobny model (najlepiej pasujący do danych)
2. ADP zbiega całkiem szybko (jest tylko ograniczony tym jak szybko potrafi nauczyć się modelu przejść).
3. Policy-Evaluation jest dość wolne.



1. Po lewej: znaczy wzrost skuteczności po 78 przebiegach (wtedy po raz pierwszy agent trafił na stan (4,2) z wartością -1. Po prawej: średnia ze 20 runów (100 przebiegów każdy)

Uczenie różnicowe (TDL)

ang. *temporal difference* (TD) *learning* (TDL)

Pomysł:

- Użyj obserwacji (s, a, s', r), aby zmodyfikować bezpośrednio użyteczności stanów, tak aby współgrały z ograniczeniami.

Uczenie różnicowe (TDL)
ang. temporal difference (TD) learning (TDL)
Pomysł:
- Użyj obserwacji (s, a, s', r), aby zmodyfikować bezpośrednio użyteczności stanów, tak aby współgrały z ograniczeniami.

1. $\alpha \in (0, 1]$ to współczynnik uczenia. Mówi o ile zwiększymy niepoprawną wartość w kierunku poprawnej.
2. Zauważmy: przykładowe przejście nie zawsze ma miejsce (!), bo czasem przejdę do pola $(1, 2)$ a czasem zostanę na polu $(1, 3)$. Ale prawd. tych przejść (a więc też aktualizacje!) będą odpowiadały modelowi. Częściej aktualizacja będzie zgodnie z $U^{\pi}(2, 3)$ niż z pozostałymi.

Uczenie różnicowe (TDL)

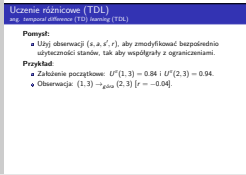
ang. *temporal difference* (TD) *learning* (TDL)

Pomysł:

- Użyj obserwacji (s, a, s', r), aby zmodyfikować bezpośrednio użyteczności stanów, tak aby współgrały z ograniczeniami.

Przykład:

- Założenie początkowe: $U^\pi(1,3) = 0.84$ i $U^\pi(2,3) = 0.94$.
- Obserwacja: $(1,3) \rightarrow_{góra} (2,3)$ $[r = -0.04]$.



1. $\alpha \in (0, 1]$ to współczynnik uczenia. Mówi o ile zwiększymy niepoprawną wartość w kierunku poprawnej.
2. Zauważmy: przykładowe przejście nie zawsze ma miejsce (!), bo czasem przejdę do pola $(1,2)$ a czasem zostanę na polu $(1,3)$. Ale prawd. tych przejść (a więc też aktualizacje!) będą odpowiadały modelowi. Częściej aktualizacja będzie zgodnie z $U^\pi(2,3)$ niż z pozostałymi.

Uczenie różnicowe (TDL)

ang. *temporal difference* (TD) *learning* (TDL)

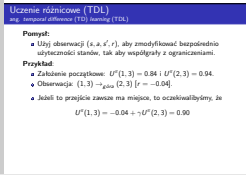
Pomysł:

- Użyj obserwacji (s, a, s', r), aby zmodyfikować bezpośrednio użyteczności stanów, tak aby współgrały z ograniczeniami.

Przykład:

- Założenie początkowe: $U^\pi(1,3) = 0.84$ i $U^\pi(2,3) = 0.94$.
- Obserwacja: $(1,3) \rightarrow_{góra} (2,3)$ $[r = -0.04]$.
- Jeżeli to przejście zawsze ma miejsce, to oczekiwalibyśmy, że

$$U^\pi(1,3) = -0.04 + \gamma U^\pi(2,3) = 0.90$$



1. $\alpha \in (0, 1]$ to współczynnik uczenia. Mówi o ile zwiększymy niepoprawną wartość w kierunku poprawnej.
2. Zauważmy: przykładowe przejście nie zawsze ma miejsce (!), bo czasem przejdę do pola $(1,2)$ a czasem zostanę na polu $(1,3)$. Ale prawd. tych przejść (a więc też aktualizacje!) będą odpowiadały modelowi. Częściej aktualizacja będzie zgodnie z $U^\pi(2,3)$ niż z pozostałymi.

Uczenie różnicowe (TDL)

ang. *temporal difference* (TD) *learning* (TDL)

Pomysł:

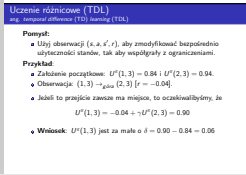
- Użyj obserwacji (s, a, s', r), aby zmodyfikować bezpośrednio użyteczności stanów, tak aby współgrały z ograniczeniami.

Przykład:

- Założenie początkowe: $U^\pi(1,3) = 0.84$ i $U^\pi(2,3) = 0.94$.
- Obserwacja: $(1,3) \rightarrow_{góra} (2,3)$ $[r = -0.04]$.
- Jeżeli to przejście zawsze ma miejsce, to oczekiwalibyśmy, że

$$U^\pi(1,3) = -0.04 + \gamma U^\pi(2,3) = 0.90$$

- **Wniosek**: $U^\pi(1,3)$ jest za małe o $\delta = 0.90 - 0.84 = 0.06$



1. $\alpha \in (0, 1]$ to współczynnik uczenia. Mówi o ile zwiększymy niepoprawną wartość w kierunku poprawnej.
2. Zauważmy: przykładowe przejście nie zawsze ma miejsce (!), bo czasem przejdę do pola $(1,2)$ a czasem zostanę na polu $(1,3)$. Ale prawd. tych przejść (a więc też aktualizacje!) będą odpowiadały modelowi. Częściej aktualizacja będzie zgodnie z $U^\pi(2,3)$ niż z pozostałymi.

Uczenie różnicowe (TDL)

ang. *temporal difference* (TD) *learning* (TDL)

Pomysł:

- Użyj obserwacji (s, a, s', r), aby zmodyfikować bezpośrednio użyteczności stanów, tak aby współgrały z ograniczeniami.

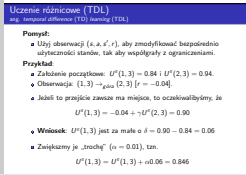
Przykład:

- Założenie początkowe: $U^\pi(1,3) = 0.84$ i $U^\pi(2,3) = 0.94$.
- Obserwacja: $(1,3) \rightarrow_{góra} (2,3)$ $[r = -0.04]$.
- Jeżeli to przejście zawsze ma miejsce, to oczekiwalibyśmy, że

$$U^\pi(1,3) = -0.04 + \gamma U^\pi(2,3) = 0.90$$

- **Wniosek**: $U^\pi(1,3)$ jest za małe o $\delta = 0.90 - 0.84 = 0.06$
- Zwiększmy je „trochę" $(\alpha = 0.01)$, tzn.

$$U^\pi(1,3) = U^\pi(1,3) + \alpha 0.06 = 0.846$$



1. $\alpha \in (0, 1]$ to współczynnik uczenia. Mówi o ile zwiększymy niepoprawną wartość w kierunku poprawnej.
2. Zauważmy: przykładowe przejście nie zawsze ma miejsce (!), bo czasem przejdę do pola $(1,2)$ a czasem zostanę na polu $(1,3)$. Ale prawd. tych przejść (a więc też aktualizacje!) będą odpowiadały modelowi. Częściej aktualizacja będzie zgodnie z $U^\pi(2,3)$ niż z pozostałymi.

Uczenie różnicowe (TDL) — ogólnie

- Próbka: (s, a, s', r)
- Początkowo $U^{\pi}(s)$
- Oczekujemy, że

$$U'^{\pi}(s) = R(s) + \gamma U^{\pi}(s')$$

Uczenie różnicowe (TDL) — ogólnie
Próbka: (s, a, s', r)
Początkowo $U^{\pi}(s)$
Oczekujemy, że
$U'^{\pi}(s) = R(s) + \gamma U^{\pi}(s')$

Uczenie różnicowe (TDL) — ogólnie

- Próbka: (s, a, s', r)
- Początkowo $U^\pi(s)$
- Oczekujemy, że

$$U'^\pi(s) = R(s) + \gamma U^\pi(s')$$

- Modyfikujemy $U^\pi(s)$ o ważoną (α) różnicę pomiędzy „oczekiwanym" U'^π a starym U^π.
  - Różnica:

$$\Delta = U'^\pi(s) - U^\pi(s)$$

  - „Nowe" $U^\pi(s)$:

$$U^\pi(s) \leftarrow U^\pi(s) + \alpha\Delta$$

Uczenie różnicowe (TDL) — ogólnie
- Próbka: (s, a, s', r)
- Początkowo $U^\pi(s)$
- Oczekujemy, że
$$U'^\pi(s) = R(s) + \gamma U^\pi(s')$$
- Modyfikujemy $U^\pi(s)$ o ważoną (α) różnicę pomiędzy „oczekiwanym" U'^π a starym U^π.
  - Różnica:
$$\Delta = U'^\pi(s) - U^\pi(s)$$
  - „Nowe" $U^\pi(s)$:
$$U^\pi(s) \leftarrow U^\pi(s) + \alpha\Delta$$

Uczenie różnicowe (TDL) — ogólnie

- Próbka: (s, a, s', r)
- Początkowo $U^\pi(s)$
- Oczekujemy, że

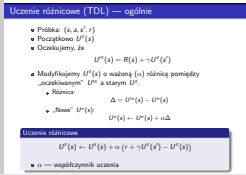
$$U'^\pi(s) = R(s) + \gamma U^\pi(s')$$

- Modyfikujemy $U^\pi(s)$ o ważoną (α) różnicę pomiędzy „oczekiwanym" U'^π a starym U^π.
  - Różnica:
$$\Delta = U'^\pi(s) - U^\pi(s)$$
  - „Nowe" $U^\pi(s)$:
$$U^\pi(s) \leftarrow U^\pi(s) + \alpha\Delta$$

Uczenie różnicowe

$$U^\pi(s) \leftarrow U^\pi(s) + \alpha\left(r + \gamma U^\pi(s') - U^\pi(s)\right)$$

- α — współczynnik uczenia



Uczenie różnicowe (TDL) — algorytm

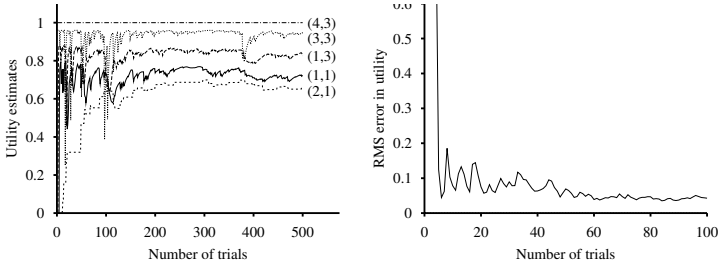
procedure PASSIVE-TD(s, a, s', r')
  if s' jest nowym stanem **then**
    $U[s'] \leftarrow r'$
  $U[s] \leftarrow U[s] + \alpha(R[s] + \gamma U[s'] - U[s])$

Uwagi:

1. Aktualizacja $U[s]$ nie uwzględnia akcji dostępnych i modelu przejść, ale to się odpowiednio uśredni.
2. TDL nie potrzebuje modelu przejść, aby uaktualniać użyteczności stanów (rodzina metod ***model-free***).
3. jeżeli α w odpowiedni sposób zmniejsza się w czasie, to *TDL* gwarantuje zbieżność do optimum globalnego.

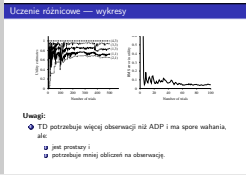
Uczenie różnicowe (TDL) — algorytm
procedure PASSIVE-TD(s, a, s', r')
if s' jest nowym stanem then
$U[s'] \leftarrow r'$
$U[s] \leftarrow U[s] + \alpha(R[s] + \gamma U[s'] - U[s])$
Uwagi:
1. Aktualizacja $U[s]$ nie uwzględnia akcji dostępnych i modelu przejść, ale to się odpowiednio uśredni.
2. TDL nie potrzebuje modelu przejść, aby uaktualniać użyteczności stanów (rodzina metod ***model-free***).
3. jeżeli α w odpowiedni sposób zmniejsza się w czasie, to *TDL* gwarantuje zbieżność do optimum globalnego.

Uczenie różnicowe — wykresy



Uwagi:

1. TD potrzebuje więcej obserwacji niż ADP i ma spore wahania, ale:
   1. jest prostszy i
   2. potrzebuje mniej obliczeń na obserwację.



TD vs. ADP

- TD i ADP są podobne: oba dokonują lokalnych zmian, po to, aby użyteczność stanu z jego następnikami „zgadzały się".
- **Różnica 1:**
  - TD bierze pod uwagę tylko jednego następnika
  - ADP bierze pod uwagę wszystkich następników (waży ich prawdopodobieństwami)

TD vs. ADP
- TD i ADP są podobne: oba dokonują lokalnych zmian, po to, aby użyteczność stanu z jego następnikami „zgadzały się".
- **Różnica 1:**
  - TD bierze pod uwagę tylko jednego następnika
  - ADP bierze pod uwagę wszystkich następników (waży ich prawdopodobieństwami)

TD vs. ADP

- TD i ADP są podobne: oba dokonują lokalnych zmian, po to, aby użyteczność stanu z jego następnikami „zgadzały się".
- **Różnica 1:**
  - TD bierze pod uwagę tylko jednego następnika
  - ADP bierze pod uwagę wszystkich następników (waży ich prawdopodobieństwami)
- **Różnica 2:**
  - TD zmienia tylko jedną wartość użyteczności na obserwację
  - ADP zmienia użyteczności tylu stanów, ile potrzeba, aby równania się zgadzały
- $\Longrightarrow$ TD można traktować jako aproksymację ADP.
- Z p. widzenia TD, ADP używa **pseudodoświadczenia** wygenerowanego na podstawie aktualnej wiedzy o środowisku.

TD vs. ADP

- TD i ADP są podobne: oba dokonują lokalnych zmian, po to, aby użyteczność stanu z jego następnikami „zgadzały się".
- **Różnica 1:**
  - TD bierze pod uwagę tylko jednego następnika
  - ADP bierze pod uwagę wszystkich następników (waży ich prawdopodobieństwami)
- **Różnica 2:**
  - TD zmienia tylko jedną wartość użyteczności na obserwację
  - ADP zmienia użyteczności tylu stanów, ile potrzeba, aby równania się zgadzały
- $\Longrightarrow$ TD można traktować jako aproksymację ADP.
- Z p. widzenia TD, ADP używa **pseudodoświadczenia** wygenerowanego na podstawie aktualnej wiedzy o środowisku.

TD vs. ADP c.d.

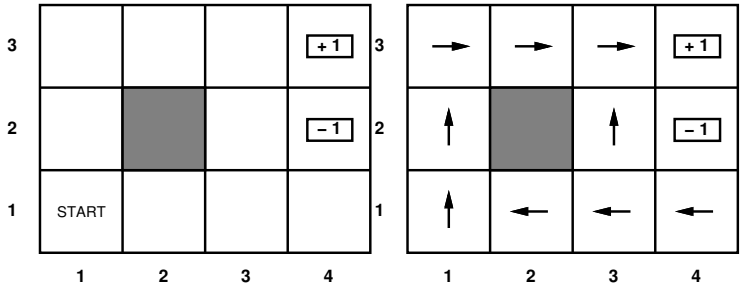
Stąd: możliwe są rozwiązania pośrednie:

- np. TD, który generuje pewne pseudodoświadczenia (czyli aktualizuje więcej użyteczności stanów)
- lub ADP, który nie aktualizuje wszystkich użyteczności
  - **Prioritized sweeping** (Moore i Atkeson, 1993)— aktualizuj użyteczności tylko niektórych stanów (tych, które prawd. najbardziej tego wymagają)
  - Sens: skoro i tak model nie jest poprawny, to po co dokładnie liczyć użyteczności?

TD vs. ADP c.d.

Stąd: możliwe są rozwiązania pośrednie:
- np. TD, który generuje pewne pseudodoświadczenia (czyli aktualizuje więcej użyteczności stanów)
- lub ADP, który nie aktualizuje wszystkich użyteczności
  - **Prioritized sweeping** (Moore i Atkeson, 1993)— aktualizuj użyteczności tylko niektórych stanów (tych, które prawd. najbardziej tego wymagają)
  - Sens: skoro i tak model nie jest poprawny, to po co dokładnie liczyć użyteczności?

Aktywne uczenie ze wzmocnieniem

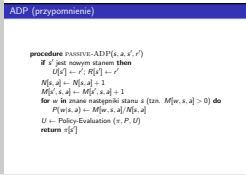


- Polityka π jest nieznana.

Aktywne uczenie ze wzmocnieniem
Polityka π jest nieznana.

ADP (przypomnienie)

procedure PASSIVE-ADP(s, a, s', r')
  if s' jest nowym stanem **then**
    $U[s'] \leftarrow r'$; $R[s'] \leftarrow r'$
  $N[s, a] \leftarrow N[s, a] + 1$
  $M[s', s, a] \leftarrow M[s', s, a] + 1$
  for w **in** znane następniki stanu s (tzn. $M[w, s, a] > 0$) **do**
    $P(w|s, a) \leftarrow M[w, s, a]/N[s, a]$
  $U \leftarrow$ Policy-Evaluation (π, P, U)
  return $\pi[s']$



ADP dla uczenia aktywnego

Jak zmodyfikować ADP?

1. Musimy nauczyć się **całego modelu przejść**, a nie tylko przejść określonych przez π.
   - ADP sobie poradzi

ADP dla uczenia aktywnego
Jak zmodyfikować ADP?
Musimy nauczyć się **całego modelu przejść**, a nie tylko przejść określonych przez π.
ADP sobie poradzi

1. Czy wybierać w każdym kroku aktualnie optymalną akcję? Nie. To nie jest mądre, bo nie ma eksploracji.

ADP dla uczenia aktywnego

Jak zmodyfikować ADP?

1. Musimy nauczyć się **całego modelu przejść**, a nie tylko przejść określonych przez π.
   - ADP sobie poradzi
2. Agent **nie ma danej polityki**, więc Policy-Evaluation musi skorzystać z pełnego wzoru Bellman'a:

$$U(s) = R(s) + \gamma \mathrm{max_a} \sum_{s'} \mathrm{P(s'|s,a)U(s')}$$

   - Można użyć Iteracji Wartości (albo Iteracji Polityki)

ADP dla uczenia aktywnego
Jak zmodyfikować ADP?
Musimy nauczyć się całego modelu przejść, a nie tylko przejść określonych przez π.
ADP sobie poradzi
Agent nie ma danej polityki, więc Policy-Evaluation musi skorzystać z pełnego wzoru Bellman'a:
$U(s) = R(s) + \gamma \mathrm{max_a} \sum_{s'} \mathrm{P(s'|s,a)U(s')}$
Można użyć Iteracji Wartości (albo Iteracji Polityki)

1. Czy wybierać w każdym kroku aktualnie optymalną akcję? Nie. To nie jest mądre, bo nie ma eksploracji.

ADP dla uczenia aktywnego

Jak zmodyfikować ADP?

1. Musimy nauczyć się **całego modelu przejść**, a nie tylko przejść określonych przez π.
   - ADP sobie poradzi
2. Agent **nie ma danej polityki**, więc Policy-Evaluation musi skorzystać z pełnego wzoru Bellman'a:

$$U(s) = R(s) + \gamma \max_{a} \sum_{s'} P(s'|s,a) U(s')$$

   - Można użyć Iteracji Wartości (albo Iteracji Polityki)
3. Jaką **akcję powinien wybierać** w każdym kroku? [zadanie 7]

ADP dla uczenia aktywnego

Jak zmodyfikować ADP?

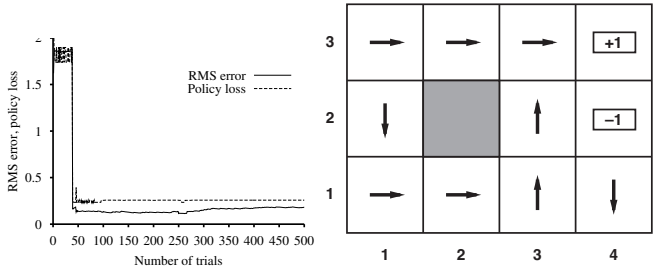
1. Musimy nauczyć się **całego modelu przejść**, a nie tylko przejść określonych przez π.
   - ADP sobie poradzi
2. Agent **nie ma danej polityki**, więc Policy-Evaluation musi skorzystać z pełnego wzoru Bellman'a:

$$U(s) = R(s) + \gamma \max_{a} \sum_{s'} P(s'|s,a) U(s')$$

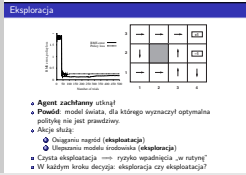
   - Można użyć Iteracji Wartości (albo Iteracji Polityki)
3. Jaką **akcję powinien wybierać** w każdym kroku? [zadanie 7]

1. Czy wybierać w każdym kroku aktualnie optymalną akcję? Nie. To nie jest mądre, bo nie ma eksploracji.

Eksploracja

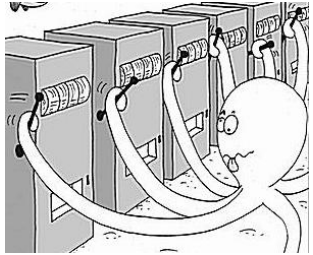


- **Agent zachłanny** utknął
- **Powód**: model świata, dla którego wyznaczył optymalna politykę nie jest prawdziwy.
- Akcje służą:
  1. Osiąganiu nagród (**eksploatacja**)
  2. Ulepszaniu modelu środowiska (**eksploracja**)
- Czysta eksploatacja $\implies$ ryzyko wpadnięcia „w rutynę"
- W każdym kroku decyzja: eksploracja czy eksploatacja?



1. Agent zachłanny zawsze wybiera aktualnie optymalna politykę
2. Jest OK czy zmienić pracę? Większa wiedza -¿ potrzeba mniej eksploracji

Problem wielorękiego bandyty



- n automatów do gry.
- gra $\rightarrow$ możliwa wypłata
- próbować inne automaty czy eksploatować ten, który daje rozsądne wyniki?

Czy istnieje optymalna metoda eksploracji?

- co to znaczy **optymalny**?
- oczekiwana wartość dla wszystkich możliwych światów (wszystkich modeli $P(s'|s,a)$) jest najlepsza.

Problem wielorękiego bandyty
n automatów do gry.
gra → możliwa wypłata
próbować inne automaty czy eksploatować ten, który daje rozsądne wyniki?
Czy istnieje optymalna metoda eksploracji?
co to znaczy optymalny?
oczekiwana wartość dla wszystkich możliwych światów (wszystkich modeli $P(s'|s,a)$) jest najlepsza.

Gittins index

- rozwiązania są zwykle obliczeniowo bardzo trudne (→ **statystyczna teoria decyzji**)
- jeśli wypłaty są niezależne od siebie i są dyskontowane w czasie, to rozwiązaniem jest **Gittins index**.
  - Określa jak wartościowy jest wybór danej maszyny
  - Dla sekwencyjnych problemów decyzyjnych nie działa

Gittins index
- rozwiązania są zwykle obliczeniowo bardzo trudne (→ **statystyczna teoria decyzji**)
- jeśli wypłaty są niezależne od siebie i są dyskontowane w czasie, to rozwiązaniem jest **Gittins index**.
  - Określa jak wartościowy jest wybór danej maszyny
  - Dla sekwencyjnych problemów decyzyjnych nie działa

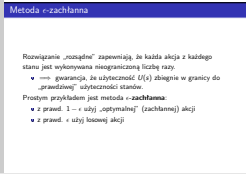
Metoda ϵ-zachłanna

Rozwiązanie „rozsądne" zapewniają, że każda akcja z każdego stanu jest wykonywana nieograniczoną liczbę razy.

- $\Longrightarrow$ gwarancja, że użyteczność $U(s)$ zbiegnie w granicy do „prawdziwej" użyteczności stanów.

Prostym przykładem jest metoda ϵ-**zachłanna**:

- z prawd. $1 - \epsilon$ użyj „optymalnej" (zachłannej) akcji
- z prawd. ϵ użyj losowej akcji



Ciekawość i optymistyczna f. użyteczności

Powyższe się zbiegnie, ale jest wolne. Lepiej w praktyce: użyj prostej **funkcji eksploracji** i **optymistycznej wersji f. użyteczności** np**:**

$$U^+(s) \leftarrow R(s) + \gamma \max_{\mathrm{a}} \mathrm{f}\left(\sum_{\mathrm{s}'} \mathrm{P}(\mathrm{s}'|\mathrm{s},\mathrm{a})\mathrm{U}^+(\mathrm{s}'), \mathrm{N}(\mathrm{s},\mathrm{a})\right),$$

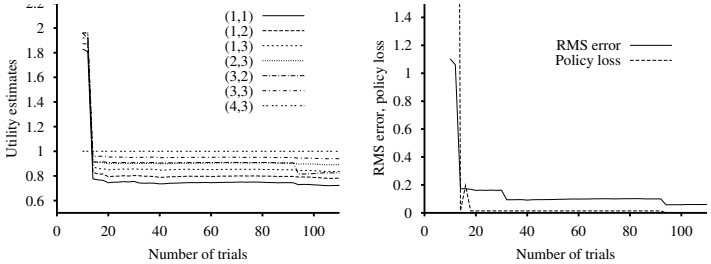
gdzie funkcja eksploracji waży **użyteczność** stanu i **„ciekawość"** (niewiedzę)

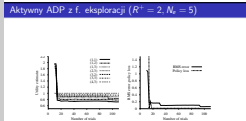
$$f(u,n) = \begin{cases} R^+ & n < N_e \\ u & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

R^+ — optymistyczna nagroda (np. $R^+ = \max_s R(s)$)
N_e — stała

Ciekawość i optymistyczna f. użyteczności
Powyższe się zbiegnie, ale jest wolne. Lepiej w praktyce: użyj prostej **funkcji eksploracji** i **optymistycznej wersji f. użyteczności** np:
$U^+(s) \leftarrow R(s) + \gamma \max_a f\left(\sum_{s'} P(s'|s,a)U^+(s'), N(s,a)\right),$
gdzie funkcja eksploracji waży **użyteczność** stanu i **„ciekawość"** (niewiedzę)
$f(u,n) = \begin{cases} R^+ & n < N_e \\ u & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$
R^+ — optymistyczna nagroda (np. $R^+ = \max_s R(s)$)
N_e — stała

Aktywny ADP z f. eksploracji ($R^+ = 2, N_e = 5$)





Aktywne TD

Jak pasywne, ale:

1. Musimy **uczyć się modelu** $P(s'|s,a)$ tak jak ADP
2. Potrzebna jakaś funkcja eksploracji do wyboru akcji.

Aktywne TD
Jak pasywne, ale:
Musimy uczyć się modelu $P(s'|s,a)$ tak jak ADP
Potrzebna jakaś funkcja eksploracji do wyboru akcji.

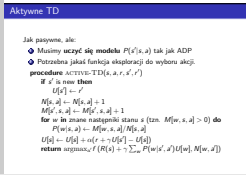
1. Uwaga: algorytm zwraca akcję do wykonania w następnym kroku.

Aktywne TD

Jak pasywne, ale:

1. Musimy **uczyć się modelu** $P(s'|s,a)$ tak jak ADP
2. Potrzebna jakaś funkcja eksploracji do wyboru akcji.

procedure ACTIVE-TD(s, a, r, s', r')
  if s' is new **then**
    $U[s'] \leftarrow r'$
  $N[s,a] \leftarrow N[s,a] + 1$
  $M[s',s,a] \leftarrow M[s',s,a] + 1$
  for w **in** znane następniki stanu s (tzn. $M[w,s,a] > 0$) **do**
    $P(w|s,a) \leftarrow M[w,s,a]/N[s,a]$
  $U[s] \leftarrow U[s] + \alpha(r + \gamma U[s'] - U[s])$
  return $\text{argmax}_{a'} f\left(R(s) + \gamma \sum_w P(w|s',a')U[w], N[w,a']\right)$



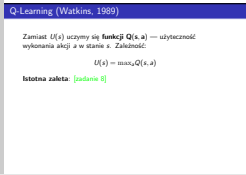
1. Uwaga: algorytm zwraca akcję do wykonania w następnym kroku.

Q-Learning (Watkins, 1989)

Zamiast $U(s)$ uczymy się **funkcji Q(s, a)** — użyteczność wykonania akcji a w stanie s. Zależność:

$$U(s) = \max_a Q(s, a)$$

Istotna zaleta: [zadanie 8]



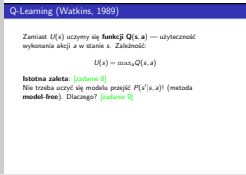
1. Ponieważ model nie jest potrzebny do wyboru najlepszej akcji.

Q-Learning (Watkins, 1989)

Zamiast $U(s)$ uczymy się **funkcji Q**$(\mathbf{s}, \mathbf{a})$ — użyteczność wykonania akcji a w stanie s. Zależność:

$$U(s) = \max_a Q(s, a)$$

Istotna zaleta: [zadanie 8]
Nie trzeba uczyć się modelu przejść $P(s'|s, a)$! (metoda **model-free**). Dlaczego? [zadanie 9]



1. Ponieważ model nie jest potrzebny do wyboru najlepszej akcji.

Q-Learning (Watkins, 1989)

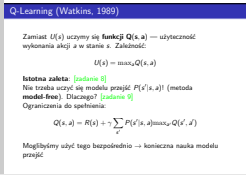
Zamiast $U(s)$ uczymy się **funkcji Q(s, a)** — użyteczność wykonania akcji a w stanie s. Zależność:

$$U(s) = \max_a Q(s, a)$$

Istotna zaleta: [zadanie 8]
Nie trzeba uczyć się modelu przejść $P(s'|s, a)$! (metoda **model-free**). Dlaczego? [zadanie 9]
Ograniczenia do spełnienia:

$$Q(s, a) = R(s) + \gamma \sum_{s'} P(s'|s, a) \max_{a'} Q(s', a')$$

Moglibyśmy użyć tego bezpośrednio → konieczna nauka modelu przejść



1. Ponieważ model nie jest potrzebny do wyboru najlepszej akcji.

Q-Learning

- Mamy przejście $s \rightarrow_a s'$ z nagrodą r'.
- Znamy aktualne wartości: $Q(s, a)$, oraz $Q(s', a')$ dla wszystkich $a' \in A(s)$.
- Oczekujemy, że spełnione będzie równanie:

$$Q'(s, a) = r' + \gamma \max_{a'} Q(s', a')$$

Q-Learning
- Mamy przejście $s \rightarrow_a s'$ z nagrodą r'.
- Znamy aktualne wartości: $Q(s, a)$, oraz $Q(s', a')$ dla wszystkich $a' \in A(s)$.
- Oczekujemy, że spełnione będzie równanie:

$$Q'(s, a) = r' + \gamma \max_{a'} Q(s', a')$$

Q-Learning

- Mamy przejście $s \rightarrow_a s'$ z nagrodą r'.
- Znamy aktualne wartości: $Q(s,a)$, oraz $Q(s',a')$ dla wszystkich $a' \in A(s)$.
- Oczekujemy, że spełnione będzie równanie:

$$Q'(s,a) = r' + \gamma \max_{a'} Q(s',a')$$

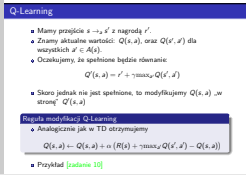
- Skoro jednak nie jest spełnione, to modyfikujemy $Q(s,a)$ „w stronę" $Q'(s,a)$

Reguła modyfikacji Q-Learning

- Analogicznie jak w TD otrzymujemy

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha \left(R(s) + \gamma \max_{a'} Q(s',a') - Q(s,a) \right)$$

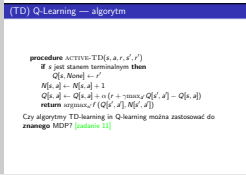
- Przykład [zadanie 10]



(TD) Q-Learning — algorytm

procedure ACTIVE-TD(s, a, r, s', r')
  if s jest stanem terminalnym **then**
    $Q[s, None] \leftarrow r'$
  $N[s, a] \leftarrow N[s, a] + 1$
  $Q[s, a] \leftarrow Q[s, a] + \alpha\,(r + \gamma \max_{a'} Q[s', a'] - Q[s, a])$
  return $\mathrm{argmax}_{a'} f\,(Q[s', a'], N[s', a'])$

Czy algorytmy TD-learning in Q-learning można zastosować do **znanego** MDP? [zadanie 11]



1. Jeśli, używamy ϵ-zachłannej eksploracji, to $N[s, a]$ nie jest potrzebne.
2. Tak. Można! I często się to robi ze względu, choćby, na prostotę tych algorytmów.