

# Modelowanie Niepewności

Na podstawie: AIMA, ch13

Wojciech Jaśkowski

Instytut Informatyki,  
Politechnika Poznańska

21 marca 2014

# Źródła niepewności

Jakie są źródła niepewności?

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└─ Wstęp

└─ Źródła niepewności

Źródła niepewności

Jakie są źródła niepewności?

# Źródła niepewności

Jakie są źródła niepewności?

- ▶ częściowa obserwowalność
- ▶ niedeterministyczny

Wynikające często jednak z zawinionej niewiedzy:

- ▶ lenistwa i
- ▶ ignorancji

**Cel:** Racjonalne decyzje w kontekście niepewności.

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└─ Wstęp

└─ Źródła niepewności

Źródła niepewności

Jakie są źródła niepewności?

- ▶ częściowa obserwowalność
- ▶ niedeterministyczny

Wynikające często jednak z zawinionej niewiedzy:

- ▶ lenistwa i
- ▶ ignorancji

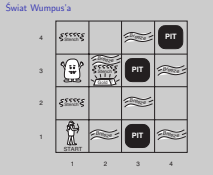
Cel: Racjonalne decyzje w kontekście niepewności.

# Świat Wumpus'a

4	Stench	Breeze	PIT	
3	Wumpus	Breeze, Stench, Gold	PIT, Breeze	
2	Stench	Breeze		
1	START	Breeze	PIT, Breeze	
	1	2	3	4

2014-03-21

- Modelowanie Niepewności
  - Wstęp
    - Świat Wumpus'a



# Świat Wumpus'a

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 B OK	2,2	3,2	4,2
1,1 OK	2,1 B OK	3,1	4,1

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Wstęp

└ Świat Wumpus'a

Świat Wumpus'a

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 B OK	2,2	3,2	4,2
1,1 OK	2,1 B OK	3,1	4,1

1. W takiej sytuacji Wumpus nie ma bezpiecznego ruchu, bo bryza w (1,2) i (2,1). Jaki ruch Wumpus powinien więc wykonać? Jakie jest prawdopodobieństwo, że na polu (1,3) jest pułapka? A jakie dla (2,2) i dla (3,1)?

# Podstawy: notacja

## ► zmienna losowa

$$\text{Cancer} = C = \{\neg c, c\}$$

$$\text{Test} = T = \{\neg t, t\}$$

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: notacja

Podstawy: notacja

► zmienna losowa

Cancer =  $C = \{\neg c, c\}$

Test =  $T = \{\neg t, t\}$

1. rozkład prawd. łącznego: wektor wszystkich kombinacji wartości zmiennych losowych.

# Podstawy: notacja

## ► zmienna losowa

$$\text{Cancer} = C = \{\neg c, c\}$$

$$\text{Test} = T = \{\neg t, t\}$$

## ► prawdopodobieństwo zdarzenia

$$P(c) = 0.3$$

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: notacja

Podstawy: notacja

► zmienna losowa

Cancer =  $C = \{\neg c, c\}$

Test =  $T = \{\neg t, t\}$

► prawdopodobieństwo zdarzenia

$P(c) = 0.3$

1. rozkład prawd. łącznego: wektor wszystkich kombinacji wartości zmiennych losowych.

# Podstawy: notacja

## ► zmienna losowa

$$Cancer = C = \{\neg c, c\}$$

$$Test = T = \{\neg t, t\}$$

## ► prawdopodobieństwo zdarzenia

$$P(c) = 0.3$$

## ► rozkład prawdopodobieństwa

$$P(Cancer) = \langle P(c), P(\neg c) \rangle = \langle 0.3, 0.7 \rangle$$

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: notacja

Podstawy: notacja

► zmienna losowa

$Cancer = C = \{\neg c, c\}$

$Test = T = \{\neg t, t\}$

► prawdopodobieństwo zdarzenia

$P(c) = 0.3$

► rozkład prawdopodobieństwa

$P(Cancer) = \langle P(c), P(\neg c) \rangle = \langle 0.3, 0.7 \rangle$

1. rozkład prawd. łącznego: wektor wszystkich kombinacji wartości zmiennych losowych.



# Podstawy: notacja

## ► zmienna losowa

$$Cancer = C = \{\neg c, c\}$$

$$Test = T = \{\neg t, t\}$$

## ► prawdopodobieństwo zdarzenia

$$P(c) = 0.3$$

## ► rozkład prawdopodobieństwa

$$P(Cancer) = \langle P(c), P(\neg c) \rangle = \langle 0.3, 0.7 \rangle$$

## ► prawd. łączne

$$P(c \wedge \neg t) = P(c, \neg t) = 0.4$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: notacja

Podstawy: notacja

- zmienna losowa  
Cancer =  $C = \{\neg c, c\}$   
Test =  $T = \{\neg t, t\}$
- prawdopodobieństwo zdarzenia  
 $P(c) = 0.3$
- rozkład prawdopodobieństwa  
 $P(Cancer) = \langle P(c), P(\neg c) \rangle = \langle 0.3, 0.7 \rangle$
- prawd. łączne  
 $P(c \wedge \neg t) = P(c, \neg t) = 0.4$

1. rozkład prawd. łącznego: wektor wszystkich kombinacji wartości zmiennych losowych.

# Podstawy: notacja

## ► zmienna losowa

$$Cancer = C = \{\neg c, c\}$$

$$Test = T = \{\neg t, t\}$$

## ► prawdopodobieństwo zdarzenia

$$P(c) = 0.3$$

## ► rozkład prawdopodobieństwa

$$P(Cancer) = \langle P(c), P(\neg c) \rangle = \langle 0.3, 0.7 \rangle$$

## ► prawd. łączne

$$P(c \wedge \neg t) = P(c, \neg t) = 0.4$$

## ► rozkład prawd. łącznego

$$P(Cancer, Test) = \langle P(c \wedge t), P(c \wedge \neg t), P(\neg c, t), P(\neg c, \neg t) \rangle$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: notacja

Podstawy: notacja

► zmienna losowa

$$Cancer = C = \{\neg c, c\}$$

$$Test = T = \{\neg t, t\}$$

► prawdopodobieństwo zdarzenia

$$P(c) = 0.3$$

► rozkład prawdopodobieństwa

$$P(Cancer) = \langle P(c), P(\neg c) \rangle = \langle 0.3, 0.7 \rangle$$

► prawd. łączne

$$P(c \wedge \neg t) = P(c, \neg t) = 0.4$$

► rozkład prawd. łącznego

$$P(Cancer, Test) = \langle P(c \wedge t), P(c \wedge \neg t), P(\neg c, t), P(\neg c, \neg t) \rangle$$

1. rozkład prawd. łącznego: wektor wszystkich kombinacji wartości zmiennych losowych.

# Podstawy: prawd. warunkowe

## Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(c|t)P(t) = P(c \wedge t)$$

(reguła produkcji)

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: prawd. warunkowe

Podstawy: prawd. warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(c|t)P(t) = P(c \wedge t)$$

(reguła produkcji)

1. Graficznie: dwa przecinające się zbiory.  $t$  zaistniało, więc jakie jest prawd., że zaistnieje  $c$ ?  $P(c|t) = \frac{P(c \wedge t)}{P(t)}$ .

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

	ból		¬ból	
	test	¬test	test	¬test
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 0]  
 $P(\text{dziura}) = ?$   
 $P(\text{Dziura}) = ?$

# Prawd. marginalne (marginalizacja)

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 0]

$P(\text{dziura}) = ?$

$P(\text{Dziura}) = ?$

## Modelowanie Niepewności

2014-03-21

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Prawd. marginalne (marginalizacja)

$$1. P(\text{dziura}) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$$

Marginalizujemy Ból i Test

$$2. \mathbf{P}(\text{Dziura}) = \langle 0.2, 0.8 \rangle$$

$$3. P(\text{dziura} \wedge \neg \text{ból}) = 0.072 + 0.008 = 0.08$$

Marginalizujemy Test

	ból		¬ból	
	test	¬test	test	¬test
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 0]  
 $P(\text{dziura}) = ?$   
 $P(\text{Dziura}) = ?$   
 [zadanie 1]  
 $P(\text{dziura} \wedge \neg \text{ból}) = ?$

2014-03-21

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Prawd. marginalne (marginalizacja)

## Prawd. marginalne (marginalizacja)

	<i>ból</i>		<i>¬ból</i>	
	<i>test</i>	<i>¬test</i>	<i>test</i>	<i>¬test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
<i>¬dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 0]

 $P(\text{dziura}) = ?$  $P(\text{Dziura}) = ?$ 

[zadanie 1]

 $P(\text{dziura} \wedge \neg \text{ból}) = ?$ 

$$1. P(\text{dziura}) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$$

Marginalizujemy Ból i Test

$$2. \mathbf{P}(\text{Dziura}) = \langle 0.2, 0.8 \rangle$$

$$3. P(\text{dziura} \wedge \neg \text{ból}) = 0.072 + 0.008 = 0.08$$

Marginalizujemy Test

	ból		¬ból	
	test	¬test	test	¬test
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 0]

 $P(\text{dziura}) = ?$  $P(\text{Dziura}) = ?$ 

[zadanie 1]

 $P(\text{dziura} \wedge \neg \text{ból}) = ?$ 

Ogólnie:

$$P(\mathbf{Y}) = \sum_{x \in \mathbf{X}} P(\mathbf{Y}, x) = \sum_{x \in \mathbf{X}} P(\mathbf{Y}|x)P(x),$$

gdzie  $\mathbf{Y}$  i  $\mathbf{X}$  są wektorami zmiennych losowych

Przypomnienie: podstawy probabilistyki

Prawd. marginalne (marginalizacja)

## Prawd. marginalne (marginalizacja)

	ból		¬ból	
	test	¬test	test	¬test
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 0]

 $P(\text{dziura}) = ?$  $P(\text{Dziura}) = ?$ 

[zadanie 1]

 $P(\text{dziura} \wedge \neg \text{ból}) = ?$ 

Ogólnie:

$$P(\mathbf{Y}) = \sum_{x \in \mathbf{X}} P(\mathbf{Y}, x) = \sum_{x \in \mathbf{X}} P(\mathbf{Y}|x)P(x),$$

gdzie  $\mathbf{Y}$  i  $\mathbf{X}$  są wektorami zmiennych losowych

- $P(\text{dziura}) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$   
Marginalizujemy Ból i Test
- $P(\text{Dziura}) = \langle 0.2, 0.8 \rangle$
- $P(\text{dziura} \wedge \neg \text{ból}) = 0.072 + 0.008 = 0.08$   
Marginalizujemy Test

# Prawd. całkowite

	<i>ból</i>		$\neg b\acute{o}l$	
	<i>test</i>	$\neg test$	<i>test</i>	$\neg test$
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg dziura$	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 2] Przed obliczeniami: czy to będzie duża wartość?

$$P(dziura|b\acute{o}l) = ?$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Prawd. całkowite

Prawd. całkowite

	<i>ból</i>		$\neg b\acute{o}l$	
	<i>test</i>	$\neg test$	<i>test</i>	$\neg test$
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg dziura$	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 2] Przed obliczeniami: czy to będzie duża wartość?

$$P(dziura|b\acute{o}l) = ?$$



# Prawd. całkowite

	<i>ból</i>		$\neg b\acute{o}l$	
	<i>test</i>	$\neg test$	<i>test</i>	$\neg test$
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg dziura$	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 2] Przed obliczeniami: czy to będzie duża wartość?

$$\begin{aligned}
 P(dziura|b\acute{o}l) &= \frac{P(dziura \wedge b\acute{o}l)}{P(b\acute{o}l)} \\
 &= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6
 \end{aligned}$$

Ogólnie:

$$P(\mathbf{Y}|\mathbf{Z}) = \sum_{x \in \mathbf{X}} P(\mathbf{Y}, x|\mathbf{Z}) = \sum_{x \in \mathbf{X}} P(\mathbf{Y}, x|\mathbf{Z})P(\mathbf{Z})$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

Przypomnienie: podstawy probabilistyki

└ Prawd. całkowite

Prawd. całkowite

	<i>ból</i>		$\neg b\acute{o}l$	
	<i>test</i>	$\neg test$	<i>test</i>	$\neg test$
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg dziura$	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 2] Przed obliczeniami: czy to będzie duża wartość?

$$\begin{aligned}
 P(dziura|b\acute{o}l) &= \frac{P(dziura \wedge b\acute{o}l)}{P(b\acute{o}l)} \\
 &= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6
 \end{aligned}$$

Ogólnie:

$$P(\mathbf{Y}|\mathbf{Z}) = \sum_{x \in \mathbf{X}} P(\mathbf{Y}, x|\mathbf{Z}) = \sum_{x \in \mathbf{X}} P(\mathbf{Y}, x|\mathbf{Z})P(\mathbf{Z})$$

# Normalizacja

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\textit{dziura}|\textit{ból}) = \frac{P(\textit{dziura} \wedge \textit{ból})}{P(\textit{ból})} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$P(\neg\textit{dziura}|\textit{ból}) = ?$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

Przypomnienie: podstawy probabilistyki

Normalizacja

Normalizacja

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\textit{dziura}|\textit{ból}) = \frac{P(\textit{dziura} \wedge \textit{ból})}{P(\textit{ból})} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$P(\neg\textit{dziura}|\textit{ból}) = ?$$

1. Ten sam mianownik! Liczenie mianownika często jest trudne.
2.  $0.12 + 0.08 \neq 1.0$ , więc normalizujemy je dzieląc przez  $0.12 + 0.08 = 0.2$ .

# Normalizacja

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\textit{dziura}|\textit{ból}) = \frac{P(\textit{dziura} \wedge \textit{ból})}{P(\textit{ból})} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$P(\neg\textit{dziura}|\textit{ból}) = \frac{P(\neg\textit{dziura} \wedge \textit{ból})}{P(\textit{ból})} = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Normalizacja

Normalizacja

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\textit{dziura}|\textit{ból}) = \frac{P(\textit{dziura} \wedge \textit{ból})}{P(\textit{ból})} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$P(\neg\textit{dziura}|\textit{ból}) = \frac{P(\neg\textit{dziura} \wedge \textit{ból})}{P(\textit{ból})} = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

1. Ten sam mianownik! Liczenie mianownika często jest trudne.
2.  $0.12 + 0.08 \neq 1.0$ , więc normalizujemy je dzieląc przez  $0.12 + 0.08 = 0.2$ .

# Normalizacja

	ból		¬ból	
	test	¬test	test	¬test
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\text{dziura}|\text{ból}) = \frac{P(\text{dziura} \wedge \text{ból})}{P(\text{ból})} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$P(\neg \text{dziura}|\text{ból}) = \frac{P(\neg \text{dziura} \wedge \text{ból})}{P(\text{ból})} = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$$P(\text{Dziura}|\text{ból}) =$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

Przypomnienie: podstawy probabilistyki

Normalizacja

Normalizacja

	ból	¬ból
test	0.108	0.012
¬test	0.016	0.064

$$P(\text{dziura}|\text{ból}) = \frac{P(\text{dziura} \wedge \text{ból})}{P(\text{ból})} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$P(\neg \text{dziura}|\text{ból}) = \frac{P(\neg \text{dziura} \wedge \text{ból})}{P(\text{ból})} = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$P(\text{Dziura}|\text{ból}) =$

1. Ten sam mianownik! Liczenie mianownika często jest trudne.
2.  $0.12 + 0.08 \neq 1.0$ , więc normalizujemy je dzieląc przez  $0.12 + 0.08 = 0.2$ .

# Normalizacja

	ból		¬ból	
	test	¬test	test	¬test
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\text{dziura}|\text{ból}) = \frac{P(\text{dziura} \wedge \text{ból})}{P(\text{ból})} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$P(\neg\text{dziura}|\text{ból}) = \frac{P(\neg\text{dziura} \wedge \text{ból})}{P(\text{ból})} = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$$\mathbf{P}(\text{Dziura}|\text{ból}) = \alpha \mathbf{P}(\text{Dziura}, \text{ból}) = \alpha \langle 0.108 + 0.012, 0.016 + 0.064 \rangle \\ \alpha \langle 0.12, 0.08 \rangle = \langle 0.6, 0.4 \rangle$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

Przypomnienie: podstawy probabilistyki

Normalizacja

Normalizacja

	ból	¬ból
test	0.108	0.012
¬test	0.016	0.064

$$P(\text{dziura}|\text{ból}) = \frac{P(\text{dziura} \wedge \text{ból})}{P(\text{ból})} = \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$P(\neg\text{dziura}|\text{ból}) = \frac{P(\neg\text{dziura} \wedge \text{ból})}{P(\text{ból})} = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064}$$

$$\mathbf{P}(\text{Dziura}|\text{ból}) = \alpha \mathbf{P}(\text{Dziura}, \text{ból}) = \alpha \langle 0.108 + 0.012, 0.016 + 0.064 \rangle \\ \alpha \langle 0.12, 0.08 \rangle = \langle 0.6, 0.4 \rangle$$

1. Ten sam mianownik! Liczenie mianownika często jest trudne.
2.  $0.12 + 0.08 \neq 1.0$ , więc normalizujemy je dzieląc przez  $0.12 + 0.08 = 0.2$ .

# Normalizacja

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$\begin{aligned} P(Dziura|ból) &= \alpha P(Dziura, ból) = \alpha \langle 0.108 + 0.012, 0.016 + 0.064 \rangle \\ &= \alpha \langle 0.12, 0.08 \rangle = \langle 0.6, 0.4 \rangle \end{aligned}$$

Ogólnie:

$$P(\mathbf{X}|e) = \alpha P(\mathbf{X}, e),$$

gdzie  $\mathbf{X}$  jest wektorem zmiennych losowych

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

Przypomnienie: podstawy probabilistyki

Normalizacja

Normalizacja

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

[zadanie 3] Policz, rozpisz:

$$\begin{aligned} P(Dziura|ból) &= \alpha P(Dziura, ból) = \alpha \langle 0.108 + 0.012, 0.016 + 0.064 \rangle \\ &= \alpha \langle 0.12, 0.08 \rangle = \langle 0.6, 0.4 \rangle \end{aligned}$$

Ogólnie:

$$P(\mathbf{X}|e) = \alpha P(\mathbf{X}, e),$$

gdzie  $\mathbf{X}$  jest wektorem zmiennych losowych

1. Ten sam mianownik! Liczenie mianownika często jest trudne.
2.  $0.12 + 0.08 \neq 1.0$ , więc normalizujemy je dzieląc przez  $0.12 + 0.08 = 0.2$ .

$$P(c) = P(c|t) \text{ lub } P(t) = P(t|c)$$

lub

$$P(c)P(t) = P(c \wedge t)$$

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: niezależność

## Podstawy: niezależność

**Niezależność zdarzeń losowych**  $c \perp t$ , jeśli

$$P(c) = P(c|t) \text{ lub } P(t) = P(t|c)$$

lub

$$P(c)P(t) = P(c \wedge t)$$

1. Graficznie: niezależność zdarzeń losowych, jeśli pole  $c$  w stosunku do całości = pole  $c \wedge t$  w stosunku do  $t$ .

# Podstawy: niezależność

**Niezależność zdarzeń losowych**  $c \perp t$ , jeśli

$$P(c) = P(c|t) \text{ lub } P(t) = P(t|c)$$

lub

$$P(c)P(t) = P(c \wedge t)$$

**Niezależność zmiennych losowych**  $C \perp T$ :

$$P(C)P(T) = P(C \wedge T)$$

[zadanie 4] Rozpisać powyższe

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: niezależność

Podstawy: niezależność

Niezależność zdarzeń losowych  $c \perp t$ , jeśli

$$P(c) = P(c|t) \text{ lub } P(t) = P(t|c)$$

lub

$$P(c)P(t) = P(c \wedge t)$$

Niezależność zmiennych losowych  $C \perp T$ :

$$P(C)P(T) = P(C \wedge T)$$

[zadanie 4] Rozpisać powyższe

1. Graficznie: niezależność zdarzeń losowych, jeśli pole  $c$  w stosunku do całości = pole  $c \wedge t$  w stosunku do  $t$ .



# Podstawy: niezależność

**Niezależność zdarzeń losowych**  $c \perp t$ , jeśli

$$P(c) = P(c|t) \text{ lub } P(t) = P(t|c)$$

lub

$$P(c)P(t) = P(c \wedge t)$$

**Niezależność zmiennych losowych**  $C \perp T$ :

$$\mathbf{P}(C)\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(C \wedge T)$$

[zadanie 4] Rozpisać powyższe

$$\begin{aligned} \text{Lewa} &= \langle P(c), P(\neg c) \rangle \times \langle P(t), P(\neg t) \rangle \\ &= \langle P(c)P(t), P(c)P(\neg t), P(\neg c)P(t), P(\neg c)P(\neg t) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Prawa} = \langle P(c \wedge t), P(c \wedge \neg t), P(\neg c \wedge t), P(\neg c \wedge \neg t) \rangle$$

wiedza o niezależności zmiennych jest zwykle wiedzą dziedzinową.

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Podstawy: niezależność

Podstawy: niezależność

Niezależność zdarzeń losowych  $c \perp t$ , jeśli

$$P(c) = P(c|t) \text{ lub } P(t) = P(t|c)$$

lub

$$P(c)P(t) = P(c \wedge t)$$

Niezależność zmiennych losowych  $C \perp T$ :

$$\mathbf{P}(C)\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(C \wedge T)$$

[zadanie 4] Rozpisać powyższe

$$\text{Lewa} = (P(c), P(\neg c)) \times (P(t), P(\neg t))$$

$$= (P(c)P(t), P(c)P(\neg t), P(\neg c)P(t), P(\neg c)P(\neg t))$$

$$\text{Prawa} = (P(c \wedge t), P(c \wedge \neg t), P(\neg c \wedge t), P(\neg c \wedge \neg t))$$

wiedza o niezależności zmiennych jest zwykle wiedzą dziedzinową.

1. Graficznie: niezależność zdarzeń losowych, jeśli pole  $c$  w stosunku do całości = pole  $c \wedge t$  w stosunku do  $t$ .

# Niezależność

Czwarta zmienna: *Pogoda*( $P$ )

$$P(P = \text{słoneczna}, b, t, d) = P(P = \text{słoneczna} | b, t, d)P(b, t, d)$$

Ale przecież (logika!):

$$P(P = \text{słoneczna} | b, t, d) = P(\text{Pogoda} = \text{słoneczna})$$

więc

$$P(P = \text{słoneczna}, b, t, d) = P(P = \text{słoneczna})P(b, t, d)$$

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Niezależność

Niezależność

Czwarta zmienna: *Pogoda*( $P$ )

$$P(P = \text{słoneczna}, b, t, d) = P(P = \text{słoneczna} | b, t, d)P(b, t, d)$$

Ale przecież (logika!)

$$P(P = \text{słoneczna} | b, t, d) = P(\text{Pogoda} = \text{słoneczna})$$

więc

$$P(P = \text{słoneczna}, b, t, d) = P(P = \text{słoneczna})P(b, t, d)$$

# Konsekwencja niezależności

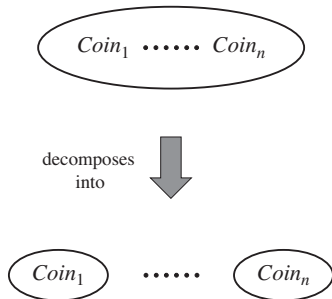
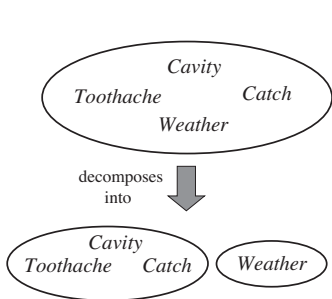
2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Konsekwencja niezależności

Konsekwencja niezależności



1. Co nam to daje? Zamiast zapisywać rozkład prawd. łącznego za pomocą  $2^4 = 32$  liczb, wystarczy nam  $2^3 + 2 = 18$  (dekompozycja). Jest lepiej, ale w praktyce to nie wystarcza. Żeby było lepiej trzeba sięgnąć do reguły Bayesa i niezależności warunkowej.

# Reguła Bayesa

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}$$

- ▶  $P(x)$  często nieznane i rozpisuje się je jako praw. całkowite.

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Reguła Bayesa

Reguła Bayesa

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}$$

▶  $P(x)$  często nieznane i rozpisuje się je jako praw. całkowite.

1. Wyprowadzenie korzysta z def. prawd. warunkowego (reguły produkcji)
2. To proste równanie leży u podstawy większości nowoczesnych systemów sztucznej inteligencji opartych na wnioskowaniu probabilistycznym.

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}$$

•  $P(x)$  często nieznane i rozpisuje się je jako praw. całkowite.  
Wersja ogólniejsza (zmienne losowe i dodatkowa wiedza  $e$ ):

$$P(Y|X, e) = \frac{P(X|Y, e)P(Y|e)}{P(X|e)}$$

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}$$

- ▶  $P(x)$  często nieznane i rozpisuje się je jako praw. całkowite.

Wersja ogólniejsza (zmienne losowe i dodatkowa wiedza  $e$ ):

$$P(Y|X, e) = \frac{P(X|Y, e)P(Y|e)}{P(X|e)}$$

1. Wyprowadzenie korzysta z def. prawd. warunkowego (reguły produkcji)
2. To proste równanie leży u podstawy większości nowoczesnych systemów sztucznej inteligencji opartych na wnioskowaniu probabilistycznym.

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}$$

Zależność między zmiennymi  $X$  i  $Y$ . Możemy ją skwantyfikować w dwóch kierunkach:

- **przyczynowym**:  $P(\text{efekt}|\text{przyczyna})$ , np.  $P(\text{gorączka}|\text{grypa})$
- **diagnostycznym**:  $P(\text{przyczyna}|\text{efekt})$ , np.  $P(\text{grypa}|\text{gorączka})$

[zadanie 5] Które prawd. łatwiej poznać?

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}$$

Zależność między zmiennymi  $X$  i  $Y$ . Możemy ją skwantyfikować w dwóch kierunkach:

- ▶ **przyczynowym**:  $P(\text{efekt}|\text{przyczyna})$ , np.  $P(\text{gorączka}|\text{grypa})$
- ▶ **diagnostycznym**:  $P(\text{przyczyna}|\text{efekt})$ , np.  $P(\text{grypa}|\text{gorączka})$

[zadanie 5] Które prawd. łatwiej poznać?

1. Łatwiej poznać  $P(\text{gorączka}|\text{grypa})$ , czyli jak często grypa powoduje gorączkę - wystarczy zebrać dane na temat ludzi z grypą. Łatwiej więc pozyskać dane o kierunku przyczynowym. Trudniej o kierunku diagnostycznym.

# Przykład

Zapalenie opon mózgowych ( $M$ ) i sztywność karku ( $S$ ).

- ▶  $P(s|m) = 0.7$  (kierunek przyczynowy)
- ▶  $P(m) = 1/50000$  (a priori, że osoba ma zapalenie opon)
- ▶  $P(s) = 0.01$  (a priori, że osoba ma sztywność kark)

[zadanie 6]  $P(m|s) = ?$

2014-03-21

Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Przykład

Przykład

Zapalenie opon mózgowych ( $M$ ) i sztywność karku ( $S$ ).  
•  $P(s|m) = 0.7$  (kierunek przyczynowy)  
•  $P(m) = 1/50000$  (a priori, że osoba ma zapalenie opon)  
•  $P(s) = 0.01$  (a priori, że osoba ma sztywność kark)  
[zadanie 6]  $P(m|s) = ?$

1. Jeśli doktor wie, że  $P(m|s) = 0.0014$ , to nie musi korzystać z reguły Bayes'a, więc po co mu to całe wnioskowanie? Otóż,  $P(m|s)$  nie jest stałe! Jeśli tylko wybuchnie epidemia zapalenia opon mózgowych, wtedy  $P(m)$  się zwiększy i  $P(m|s)$  się zwiększy.  $P(m|s)$  jest stałe, bo odzwierciedla zasady fizyki/biologii/etc.

# Przykład

Zapalenie opon mózgowych ( $M$ ) i sztywność karku ( $S$ ).

- ▶  $P(s|m) = 0.7$  (kierunek przyczynowy)
- ▶  $P(m) = 1/50000$  (a priori, że osoba ma zapalenie opon)
- ▶  $P(s) = 0.01$  (a priori, że osoba ma sztywność kark)

[zadanie 6]

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = 0.0014$$

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Przykład

Przykład

Zapalenie opon mózgowych ( $M$ ) i sztywność karku ( $S$ ).

- ▶  $P(s|m) = 0.7$  (kierunek przyczynowy)
- ▶  $P(m) = 1/50000$  (a priori, że osoba ma zapalenie opon)
- ▶  $P(s) = 0.01$  (a priori, że osoba ma sztywność kark)

[zadanie 6]

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = 0.0014$$

1. Jeśli doktor wie, że  $P(m|s) = 0.0014$ , to nie musi korzystać z reguły Bayes'a, więc po co mu to całe wnioskowanie? Otóż,  $P(m|s)$  nie jest stałe! Jeśli tylko wybuchnie epidemia zapalenia opon mózgowych, wtedy  $P(m)$  się zwiększy i  $P(m|s)$  się zwiększy.  $P(m|s)$  jest stałe, bo odzwierciedla zasady fizyki/biologii/etc.



# Przykład

Zapalenie opon mózgowych ( $M$ ) i sztywność karku ( $S$ ).

- ▶  $P(s|m) = 0.7$  (kierunek przyczynowy)
- ▶  $P(m) = 1/50000$  (*a priori*, że osoba ma zapalenie opon)
- ▶  $P(s) = 0.01$  (*a priori*, że osoba ma sztywność kark)

[zadanie 6]

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = 0.0014$$

**Prawd. w kierunku przyczynowym jest solidniejsze!**

Zapalenie opon mózgowych ( $M$ ) i sztywność karku ( $S$ ).  
▶  $P(s|m) = 0.7$  (kierunek przyczynowy)  
▶  $P(m) = 1/50000$  (*a priori*, że osoba ma zapalenie opon)  
▶  $P(s) = 0.01$  (*a priori*, że osoba ma sztywność kark)

[zadanie 6]

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = 0.0014$$

Prawd. w kierunku przyczynowym jest solidniejsze!

1. Jeśli doktor wie, że  $P(m|s) = 0.0014$ , to nie musi korzystać z reguły Bayes'a, więc po co mu to całe wnioskowanie? Otóż,  $P(m|s)$  nie jest stałe! Jeśli tylko wybuchnie epidemia zapalenia opon mózgowych, wtedy  $P(m)$  się zwiększy i  $P(m|s)$  się zwiększy.  $P(m|s)$  jest stałe, bo odzwierciedla zasady fizyki/biologii/etc.

# Warunkowa niezależność zmiennych

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

$$\mathbf{P}(Dziura|ból \wedge test) = ?$$

Ale to się nie skaluje, gdy mamy wiele zmiennych („wielka tabelka”).

2014-03-21

## Modelowanie Niepewności

└ Przypomnienie: podstawy probabilistyki

└ Warunkowa niezależność zmiennych

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

$\mathbf{P}(Dziura|ból \wedge test) = ?$

Ale to się nie skaluje, gdy mamy wiele zmiennych („wielka tabelka”).

$$1. \mathbf{P}(Dziura|ból \wedge test) = \alpha \langle 0.108, 0.016 \rangle \approx \langle 0.871, 0.129 \rangle$$

# Warunkowa niezależność zmiennych

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

$$\mathbf{P}(Dziura|ból \wedge test) = ?$$

Ale to się nie skaluje, gdy mamy wiele zmiennych („wielka tabelka”).

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Dziura|ból \wedge test) &= \alpha \mathbf{P}(ból \wedge test|Dziura) \mathbf{P}(Dziura) \\ &= \alpha \mathbf{P}(ból|Dziura) \mathbf{P}(test|Dziura) \mathbf{P}(Dziura) \end{aligned}$$

└ Przymnienie: podstawy probabilistyki

└ Warunkowa niezależność zmiennych

	<i>ból</i>		$\neg$ <i>ból</i>	
	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>	<i>test</i>	$\neg$ <i>test</i>
<i>dziura</i>	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$ <i>dziura</i>	0.016	0.064	0.144	0.576

$$\mathbf{P}(Dziura|ból \wedge test) = ?$$

Ale to się nie skaluje, gdy mamy wiele zmiennych („wielka tabelka”).

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Dziura|ból \wedge test) &= \alpha \mathbf{P}(ból \wedge test|Dziura) \mathbf{P}(Dziura) \\ &= \alpha \mathbf{P}(ból|Dziura) \mathbf{P}(test|Dziura) \mathbf{P}(Dziura) \end{aligned}$$

$$1. \mathbf{P}(Dziura|ból \wedge test) = \alpha \langle 0.108, 0.016 \rangle \approx \langle 0.871, 0.129 \rangle$$

- $C$  — rak,  $T_1$  — jakiś test na obecność raka,  $T_2$  — jakiś inny test na obecność raka
- $C$  jest zmienną ukrytą. Ale jeśli znalazłbyśmy  $C$ , jakkolwiek wiedza o  $T_1$  nie da nam żadnej dodatkowej wiedzy dot.  $T_2$ , czyli  $T_1$  i  $T_2$  są **niezależne warunkowo pod warunkiem  $C$** .
  - $P(T_2|C, T_1) = P(T_2|C)$
  - $P(T_1, T_2|C) = P(T_1|C)P(T_2|C)$
- Notacja:  $T_1 \perp T_2|C$

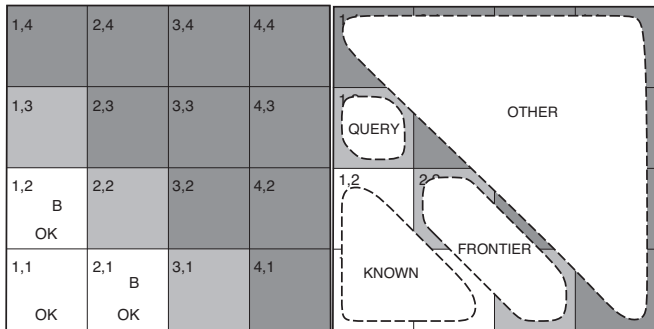
- ▶  $C$  — rak,  $T_1$  — jakiś test na obecność raka,  $T_2$  — jakiś inny test na obecność raka
- ▶  $C$  jest zmienną ukrytą. Ale jeśli znalazłbyśmy  $C$ , jakkolwiek wiedza o  $T_1$  nie da nam żadnej dodatkowej wiedzy dot.  $T_2$ , czyli  $T_1$  i  $T_2$  są **niezależne warunkowo pod warunkiem  $C$** .
  - ▶  $P(T_2|C, T_1) = P(T_2|C)$
  - ▶  $P(T_1, T_2|C) = P(T_1|C)P(T_2|C)$
- ▶ Notacja:  $T_1 \perp T_2|C$

1. Widać to na diagramie. Jeśli znamy  $C$ , to on niezależnie wpływa na  $T_1$  i  $T_2$ . W pewnym sensie obcina to co się dzieje w  $T_1$  od tego co się dzieje w  $T_2$
2. Jeśli zmienne losowe  $A$  i  $B$  są niezależne pod warunkiem, że  $X$ , możemy wnioskować tak:  

$$\mathbf{P}(A, B, X) = \mathbf{P}(A, B|X)\mathbf{P}(X) = \mathbf{P}(A|X)\mathbf{P}(B|X)\mathbf{P}(X).$$



Jakie jest prawd, że w polu (1,3) jest jama jeśli wiatr poczuliśmy w polu (1,2) i (2,1)?  
 Zmienne losowe:  $D_{i,j}$  (dziura na polu  $(i,j)$ ) oraz  $B_{i,j}$  (bryza na polu  $(i,j)$ ).



Jakie jest prawd, że w polu (1,3) jest jama jeśli wiatr poczuliśmy w polu (1,2) i (2,1)?

Zmienne losowe:  $D_{i,j}$  (dziura na polu  $(i,j)$ ) oraz  $B_{i,j}$  (bryza na polu  $(i,j)$ ).