

Algorytmy estymacji stanu (filtry)

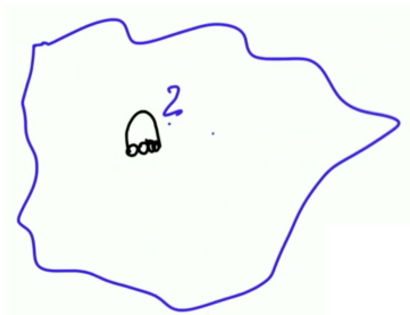
Na podstawie: AIMA ch15, Udacity (S. Thrun)

Wojciech Jaśkowski

Instytut Informatyki,
Politechnika Poznańska

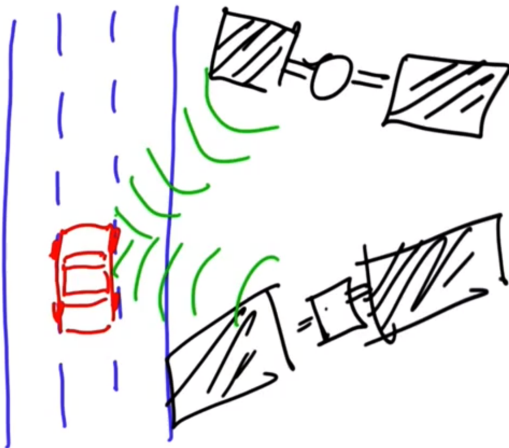
21 kwietnia 2014

Problem lokalizacji

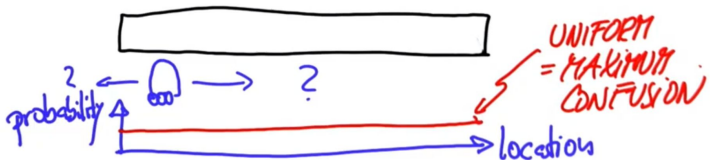


- Obserwowalność?
- Determinizm?

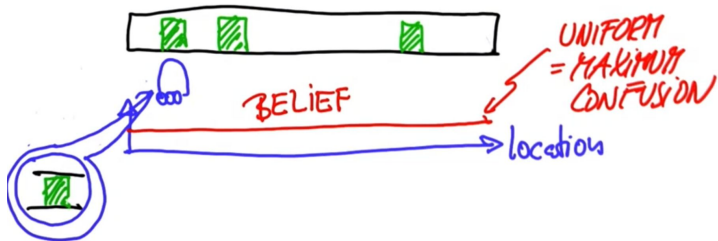
Problem lokalizacji



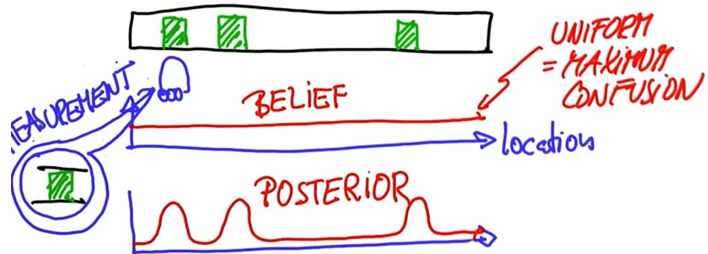
Filtr Histogramowy



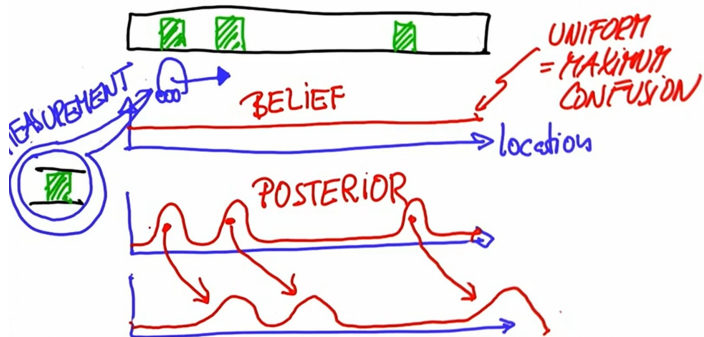
Filtr Histogramowy



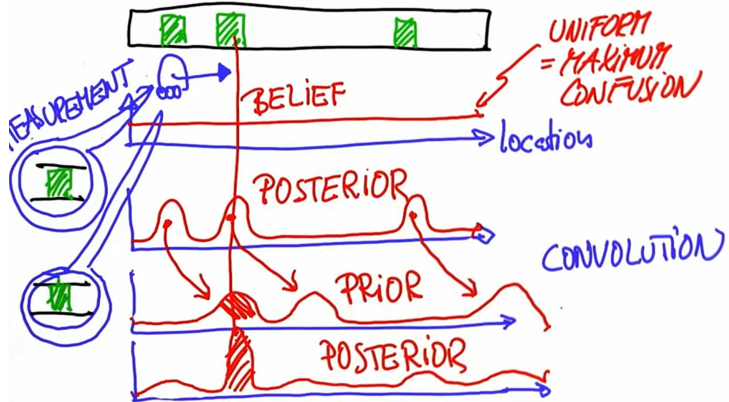
Filtr Histogramowy



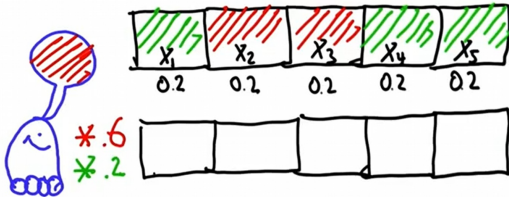
Filtr Histogramowy



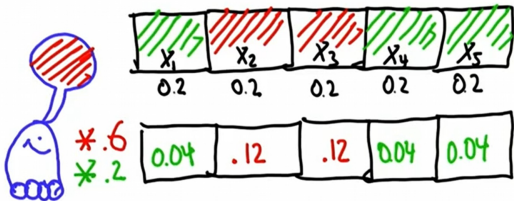
Filtr Histogramowy



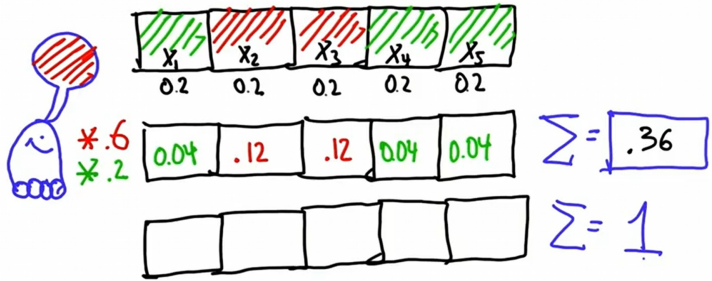
Pomiar



Pomiar

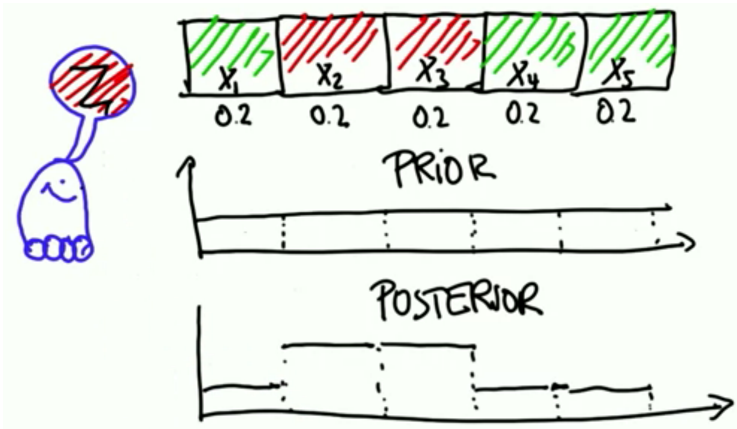


Pomiar

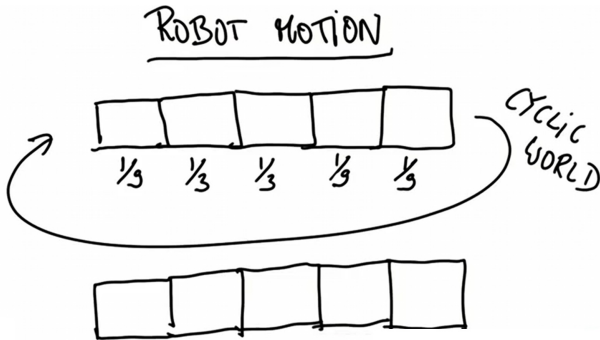


[zadanie 1]

Pomiar — wynik



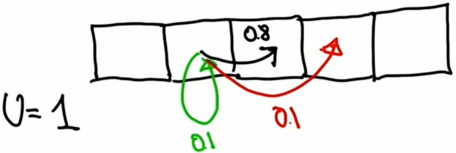
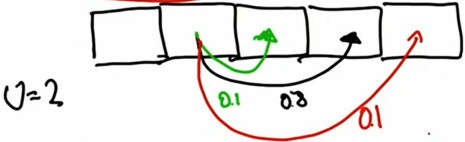
Ruch agenta



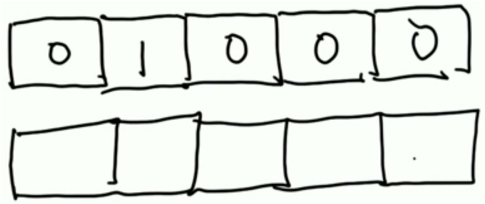
- Jak wygląda stan wiedzy (ang. belief) po ruchu o 1 pozycję w prawo? [zadanie 2]

Ruch agenta

INACCURATE ROBOT MOTION

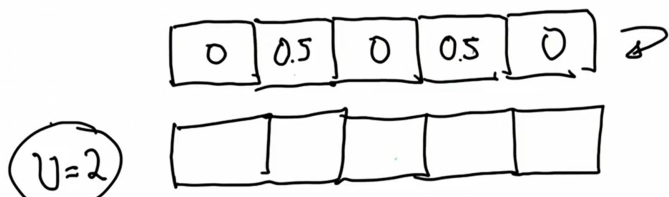


(Niedokładny) ruch agenta



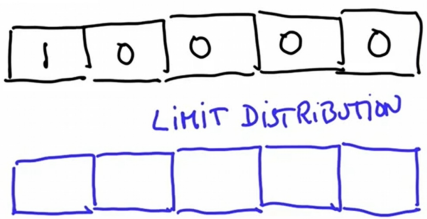
- $P(X_{i+2}|X_i) = 0.8$
- $P(X_{i+1}|X_i) = 0.1$
- $P(X_{i+3}|X_i) = 0.1$
- Jak wygląda rozkład po wykonaniu ruchu o 2 pola w prawo?
[zadanie3]

(Niedokładny) ruch agenta



- $P(X_{i+2}|X_i) = 0.8$
- $P(X_{i+1}|X_i) = 0.1$
- $P(X_{i+3}|X_i) = 0.1$
- Jak wygląda rozkład po wykonaniu ruchu o 2 pola w prawo?
[zadanie4]

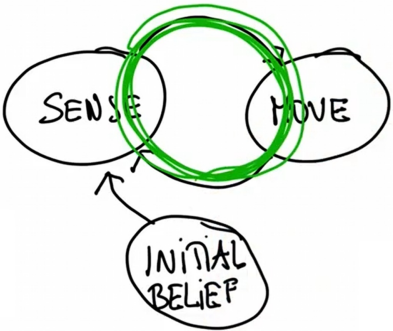
Ruch agenta



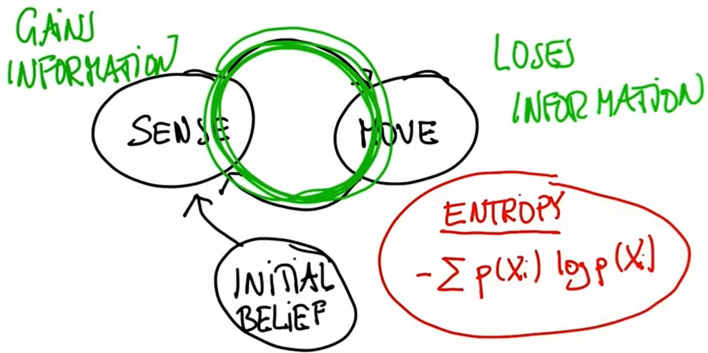
$U=1$
 $U=1$
 $U=1$
 $U=1$
⋮
⋮
⋮
⋮

Jak wygląda rozkład w ∞ ? [zadanie 5]

Lokalizacja



Lokalizacja



Lokalizacja — podsumowanie

- **Stan wiedzy:** rozkład prawdopodobieństwa
- **Obserwacja:** iloczyn (stan wiedzy, pomiar) + normalizacja
- **Ruch:** konwolucja (stan wiedzy, model ruchu)

Lokalizacja — podstawy matematyczne (obserwacja)

Zmienne losowe:

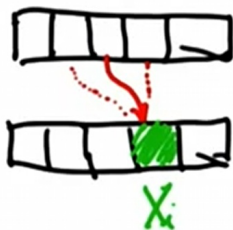
- X — robot jest na danym polu ($X = x_i$ znaczy, że jest na polu i -tym)
- Z — wynik pomiaru
- $\mathbf{P}(X|Z) = \frac{\mathbf{P}(Z|X)\mathbf{P}(X)}{\mathbf{P}(Z)}$
 - $\mathbf{P}(X)$ — rozkład a priori
 - $\mathbf{P}(Z|X)$ — rozkład prawd. pomiaru
 - $\mathbf{P}(Z)$ — normalizacja
 - $\mathbf{P}(Z) = \sum_i \mathbf{P}(Z|x_i)P(x_i) = \alpha$

Lokalizacja — podstawy matematyczne (ruch)

Konwolucja:

$$P(x_i^t) = \sum_j P(x_j^{t-1})P(x_i|x_j)$$

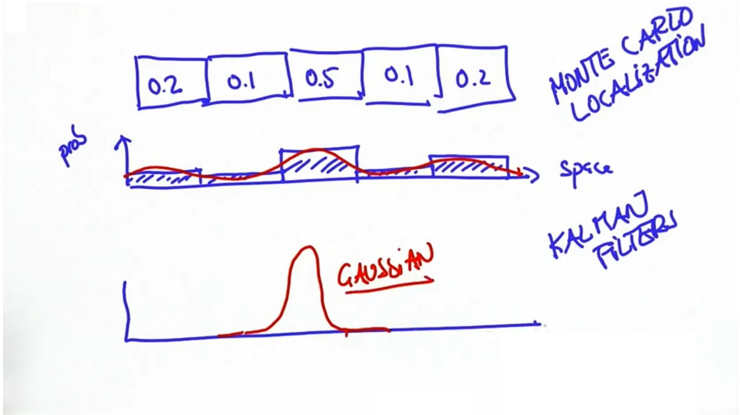
- $\mathbf{P}(X^{t-1})$ — rozkład prawd. a priori (np. $P(x_j^{t-1})$)
- $\mathbf{P}(X|X)$ — rozkład prawd. związanych z wiedzą na temat ruchu (np. $P(x_i|x_j)$)



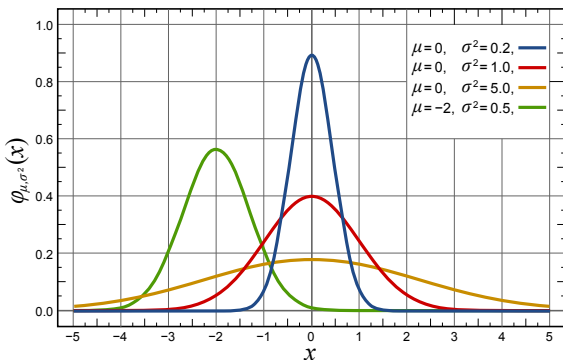
Porównanie estymacji stanu

Metoda	stanowość	rozkład
Filtr histogramowy	dyskretny	multimodalny
Filtr Kalmana	ciągły	unimodalny

Funkcja gaussowska



Funkcja gaussowska



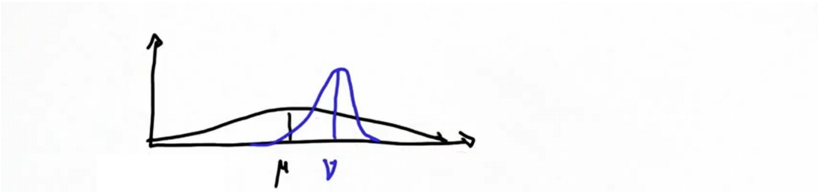
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Pomiar i ruch



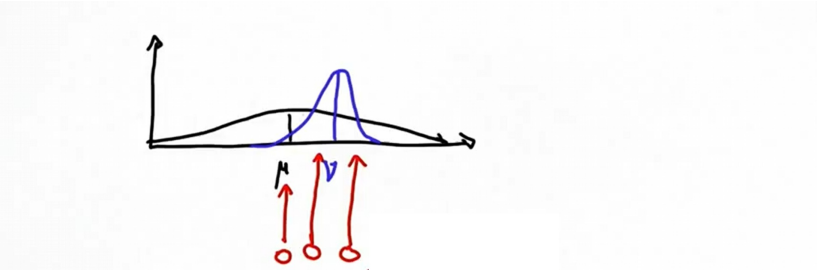
- Pomiar: (iloczyn/bayes czy konwolucja/prawd. całkowitz?) [zadanie 6]
- Ruch: (iloczyn/bayes czy konwolucja/prawd. całkowitz?)

Pomiar



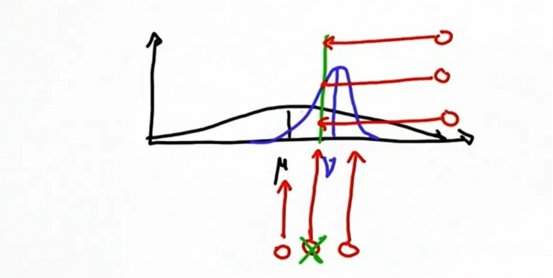
rozkład a priori oraz pomiar

Pomiar



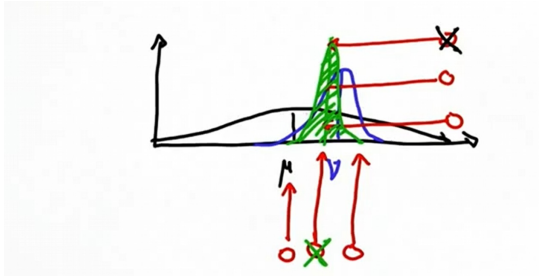
- Gdzie jest średnia f. gausowskiej (stanu wiedzy) po pomiarze?
[zadanie 7]

Pomiar

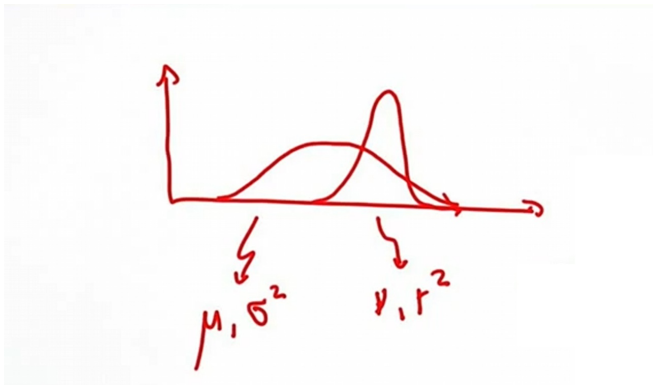


- Gdzie jest amplituda f. gausowskiej (stanu wiedzy) po pomiarze? [zadanie 8]

Pomiar



Pomiar — wzory



Aktualizacja stanu wiedzy po pomiarze (mnożenie f. gaussowskich):

$$\mu' = \frac{r^2 \mu + \sigma^2 v}{r^2 + \sigma^2}$$

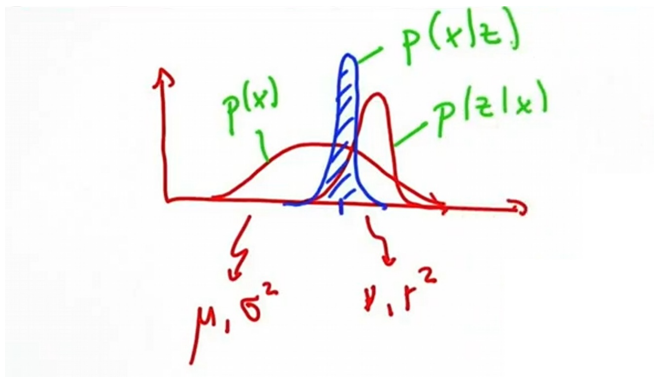
Zadanie na pobudkę

- $\mu = 10$
- $\nu = 12$
- $\sigma^2 = 4$
- $r^2 = 4$ [zadanie 9]

$$\mu' = \frac{r^2\mu + \sigma^2\nu}{r^2 + \sigma^2}$$

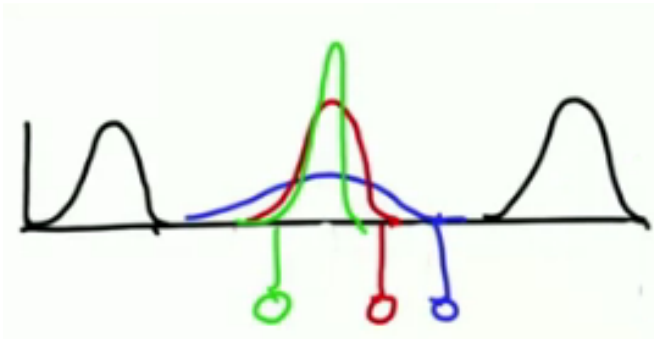
$$\sigma^{2'} = \frac{1}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

Pomiar — wzory



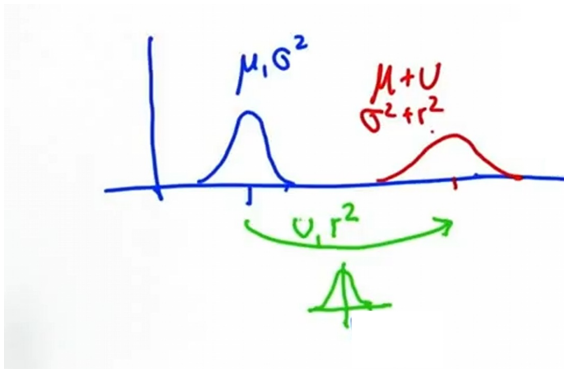
- $P(X)$ — rozkład a priori
- $P(Z|X)$ — pomiar
- $P(X|Z)$ — rozkład a posteriori

Pomiar — pytanie na koniec



Jak będzie wyglądał rozkład a posteriori?[zadanie 10]

Ruch — wzory

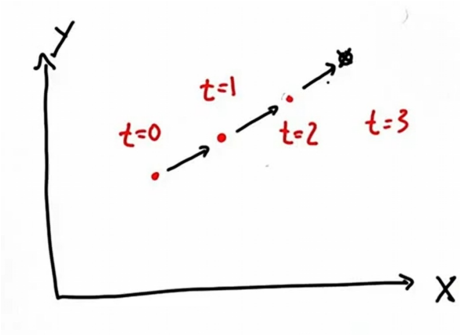


Aktualizacja stanu wiedzy po ruchu:

$$\mu' = \mu + \nu$$

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + r^2$$

Wielowymiarowy filtr Kalmana



- Potrafi przewidywać pozycję na podstawie wiedzy o prędkości (bez jej pomiarów)

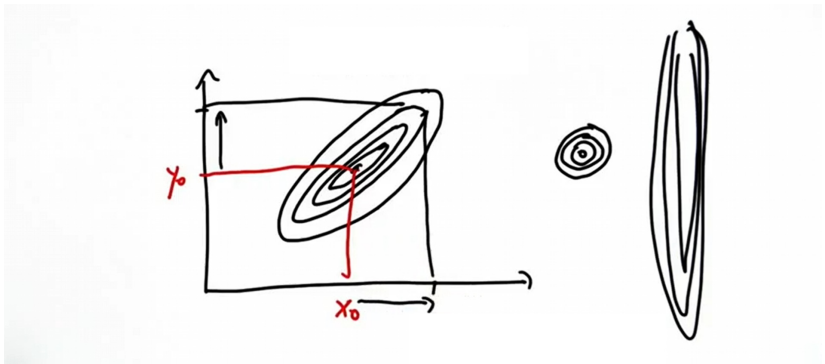
Wielowymiarowa f. gaussowska

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_D \end{pmatrix}$$

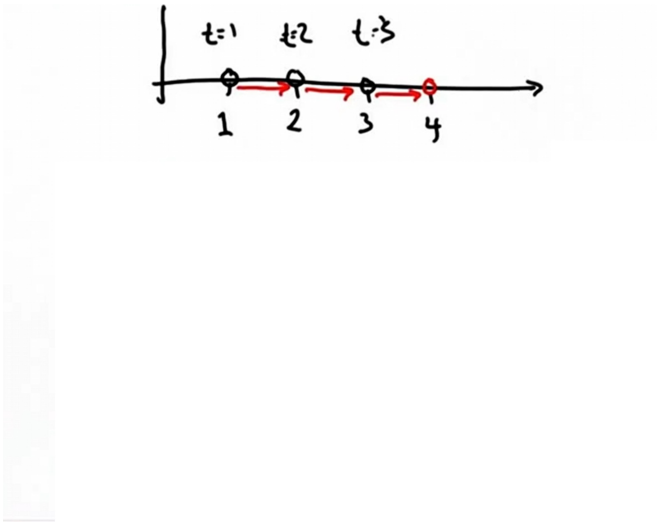
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \dots & & \\ & \dots & \\ & & \dots \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)$$

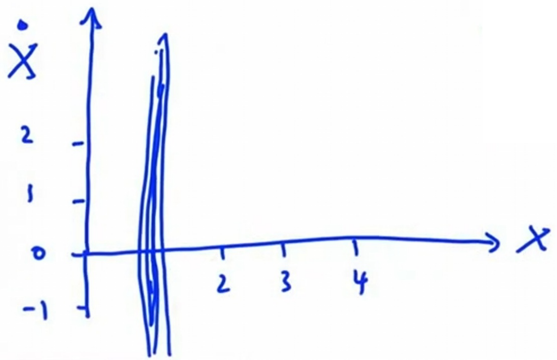
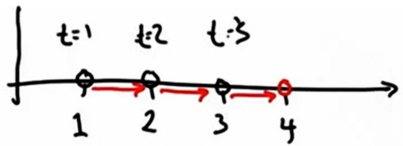
Wielowymiarowa f. gaussowska



Wielowymiarowy filtr Kalmana

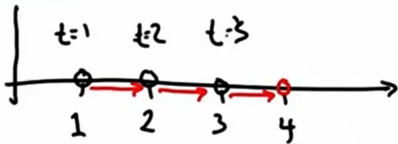


Wielowymiarowy filtr Kalmana

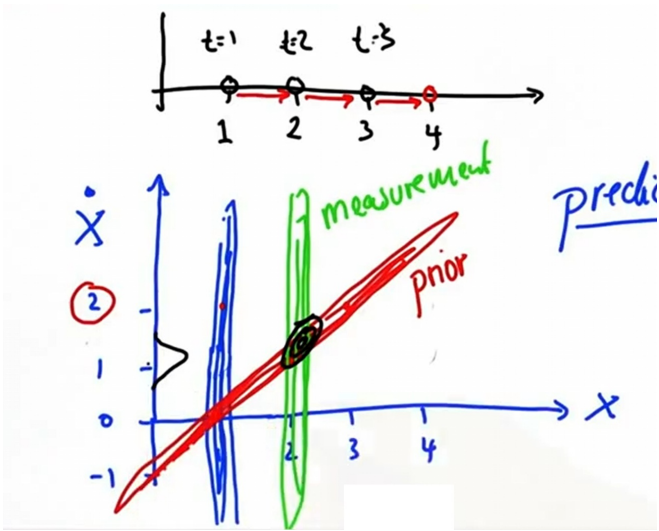


Gdzie byśmy byli, gdyby prędkość wynosiła 0? A jeśli 1? A jeśli 2?

Wielowymiarowy filtr Kalmana (predykcja)

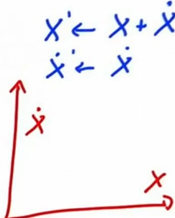


Wielowymiarowy filtr Kalmana



x - obserwowane

Projektowanie filtru Kalmana

$$\begin{pmatrix} x' \\ \dot{x}' \end{pmatrix} \leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$
$$z \leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_H \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$


- F — funkcja przejścia
- H — funkcja pomiaru („co obserwujemy”)

Projektowanie filtra Kalmana — równania

- x — estymata
- P — macierz kowariancji (niepewność)
- F — funkcja przejścia
- u — wektor ruchu
- z — pomiar
- H — funkcja pomiaru
- R — niepewność pomiaru
- $\mathbf{1}$ — macierz jednostkowa

Ruch:

- $x' = Fx + u$
- $P' = FPF^T$

Pomiar:

- $y = z - Hx$
- $S = HPH^T + R$
- $K = PH^T S^{-1}$
- $x' = x + (Ky)$
- $P' = (\mathbf{1} - KH)P$

Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	

Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	
Filtr cząsteczkowy	ciągła	multimodalny	

Porównanie

Metoda	przestrzeń stanów	rozkład	efektywność
Filtr histogramowy	dyskretna	multimodalny	wykładniczy
Filtr Kalmana	ciągła	unimodalny	$O(D^2)$
Filtr cząsteczkowy	ciągła	multimodalny	„szybki”

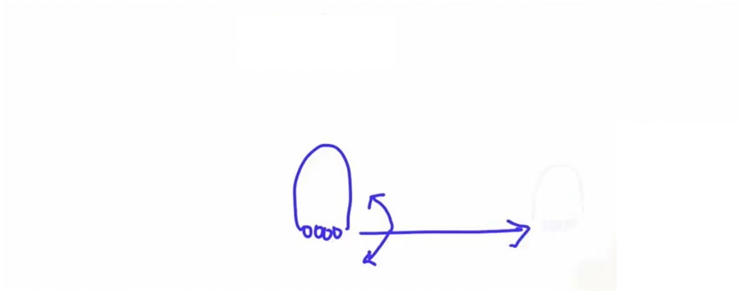
Zalety filtra cząsteczkowego

Filtr cząsteczkowy:

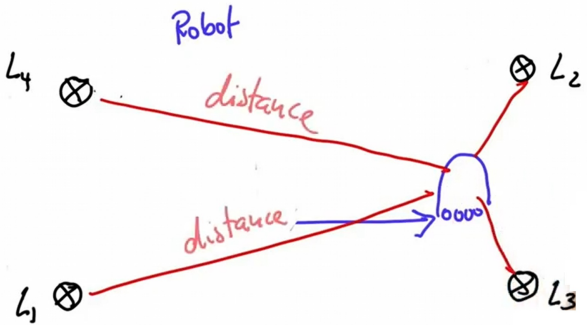
- bardzo prosty w implementacji
- bardzo elastyczny

Przykład działania: <http://youtu.be/Crt1TkFF-ds> (autor: Szymon Kaliski)

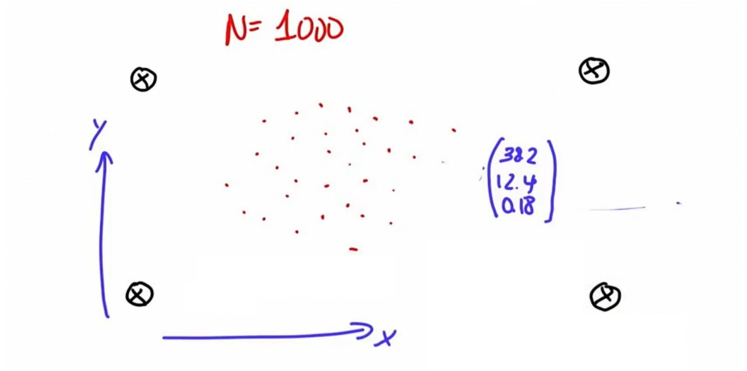
Robot



Robot



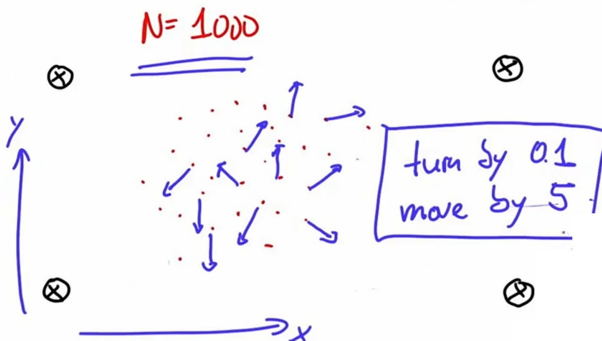
Filtr cząsteczkowy



Krok algorytmu 1 (inicjalizacja)

Inicjalizuj N cząstek losowo

Filtr cząsteczkowy



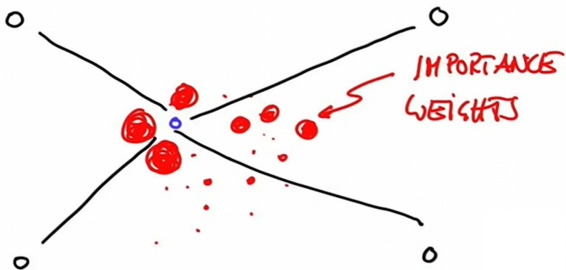
Krok algorytmu 2 (ruch robota)

Wykonaj ruch zgodnie z (zamierzonym) ruchem robota.

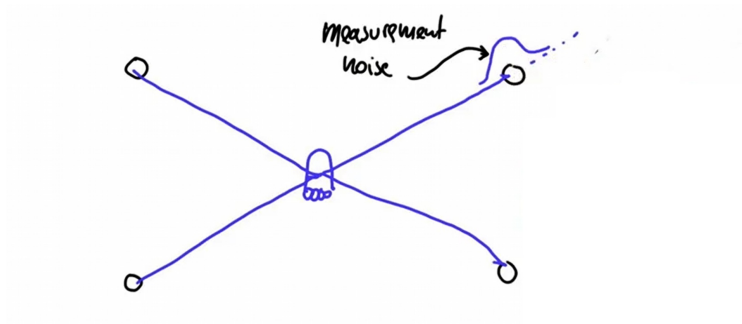
Do ruchu dodaj trochę szumu, aby algorytm nie zbiegł do punktu.

Szum odgrywa rolę mutacji.

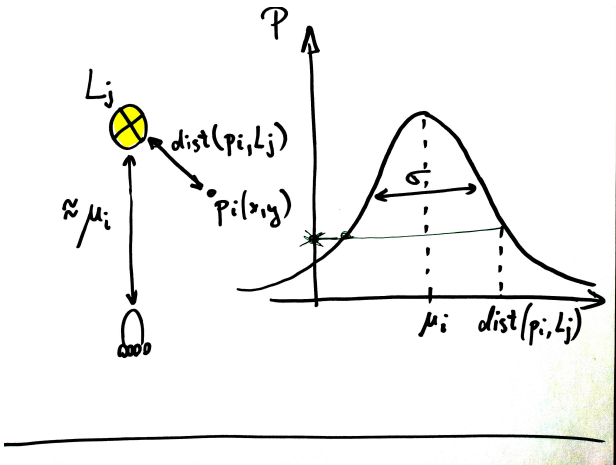
Filtr cząsteczkowy



Filtr cząsteczkowy



Filtr cząsteczkowy (wagi cząsteczek)



$$w_i = \prod_{j=1}^L f_{\mu_i, \sigma}(dist(p_i, L_j))$$

Filtr cząsteczkowy

Krok algorytmu 3 (przydział wag)

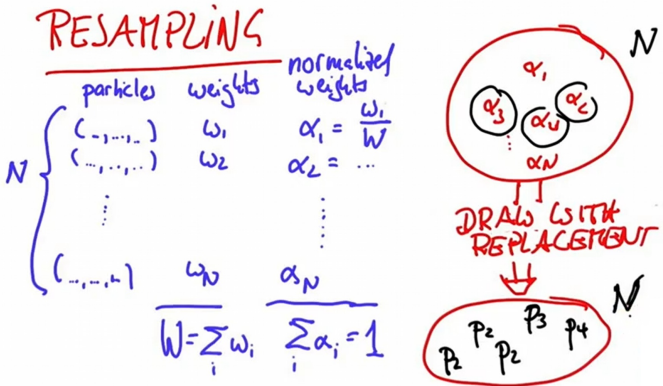
Przydziel wagi cząsteczkom (prawd. pomiaru). Dla każdej cząsteczki p_i :

$$w_i = \prod_{j=1}^L f_{\mu_i, \sigma}(\text{dist}(p_i, L_j))$$

gdzie:

- f — funkcja gaussowska
- μ_i — pomiar dla punktu orientacyjnego i
- σ — niepewność pomiaru (sensorów)
- $\text{dist}(p_i, L_j)$ — odległość pomiędzy pozycją i -tej cząsteczki a j -tym punktem orientacyjnym

Selekcja (ponowne próbkowanie)



Krok algorytmu 4 (próbkowanie)

Próbkuj populację cząstek

Selekcja — przykład

- $N = 5$
- $w = \{w_1 = 0.6, w_2 = 1.2, w_3 = 2.4, w_4 = 0.6, w_5 = 1.2\}$
- Jakie jest prawd **niewylosowania** p_3 ? [zadanie 11]
- Jakie jest prawd **niewylosowania** p_1 ? [zadanie 12]

Selekcja ruletkowa



Selekcja (szybsza)

```
mx = max(w)
b = 0
idx = randint(0,N)
for i in range(N):
    b += random(0, 2*mx)
    while w[idx] < b:
        b -= w[idx]
        idx = (idx + 1) % N
    resampled.append(idx)
```


Podsumowanie

MEASUREMENT UPDATES

$$\underline{\underline{P(X|Z)}} \propto P(Z|X) P(X)$$

← resampling ↑ importance weights ↑ particles

POSITION UPDATES

$$\underline{\underline{P(X')}} = \sum \underline{\underline{P(X'|X)}} P(X)$$

↑ sampled sample ↑ particles

Zadanie

Czy orientacja cząstek ma znaczenie?[\[zadanie 13\]](#)

Wady i zalety

Przykład: <http://youtu.be/8-VFUhayUCI> (autor: Sebastian Thrun)

- Zalety:
 - Proste w implementacji
 - Zwykle działają bardzo dobrze
 - Niewymagające obliczeniowo
 - Działają dobrze nawet, gdy rozkłady:
 - niemonotoniczne
 - skomplikowane (niegaussowskie)
- Wady:
 - Przekleństwo wymiarowości
 - \implies rozszerzenia (np. filtry Rao-Blackwellized)
 - Zbyt mało cząstek \implies kłopoty
 - Mało szumów \implies kłopoty

Problem lokalizacji

oo

Filtr Histogramowy

oooooooooooooooooooo

Filtr Kalmana

oooooooooooooooooooo

Filtr cząsteczkowy

oooooooooooooooooooo●