Wnioskowanie Probabilistyczne

Na podstawie: AIMA, ch14

Wojciech Jaśkowski

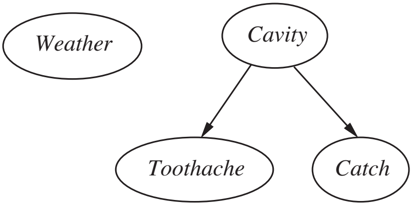
Instytut Informatyki,
Politechnika Poznańska

21 marca 2013

Na poprzednim wykładzie

- Łączny rozkład prawd. pozwala odpowiedziec na każde pytanie. Ale:
  - liczba „danych" (wart. prawd) rośnie wykładniczo z liczbą zmiennych losowych
  - podawanie tych prawd. jest nienaturalne
- Niezależność i niezależność warunkowa może znacznie zmniejszyć liczbę potrzebnych wartości

Sieć baysowska
Definicja



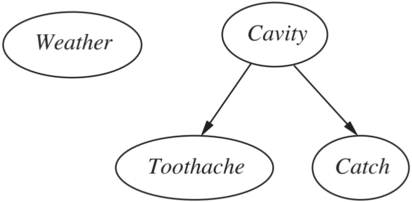
Definicja:

1. Graf skierowany acykliczny (DAG)
   - Węzeł — zmienna losowa
   - Łuk — X_i jest rodzicem Y_j
2. Z każdym węzłem związane jest prawd. warunkowe:

$$\mathbf{P}(X_i|Rodzice(X_i))$$

Sieć baysowska

Interpretacja



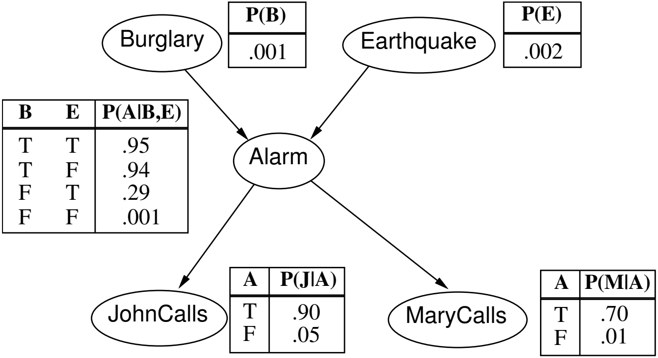
- $X_i \to X_j$ mówi, że X_i ma **bezpośredni wpływ na** X_j.
- Rozkład prawd. łącznego

$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i | Rodzice(X_i))$$

- W przykładzie:

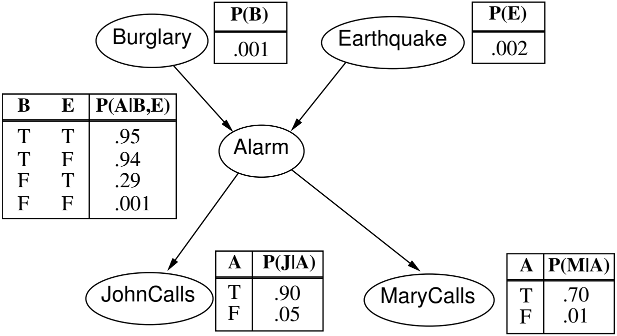
$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \mathbf{P}(Pogoda)\mathbf{P}(Ból)\mathbf{P}(Ból|Dziura)\mathbf{P}(Test|Dziura)$$

Przykład



- Zaznaczono **tabele prawd. warunkowego**

Przykład



P(B)
.001

P(E)
.002

B	E	P(A|B,E)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
T	.90
F	.05

A	P(M|A)
T	.70
F	.01

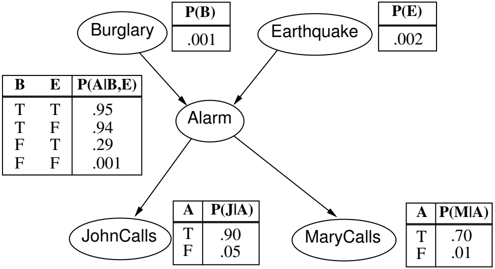
$$\mathbf{P}(B, J, M, E, A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(E)\mathbf{P}(A|B, E)\mathbf{P}(J|A)\mathbf{P}(?)$$

[zadanie 1]

$$P(j, m, a, \neg b, \neg e) = ?$$

[zadanie 2]

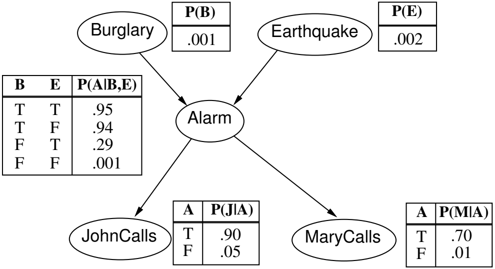
Niezależność warunkowa w sieciach



Które z poniższych zdań są prawdziwe?[zadanie 3]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(M|J,A,E,B) &= \mathbf{P}(M|A)? \\
&= \mathbf{P}(M|A,E,B)? \\
&= \mathbf{P}(M|J,A)? \\
&= \mathbf{P}(M|J,E)? \\
&= \mathbf{P}(M|J,E,B)?
\end{aligned}
$$

Ile wartości potrzeba?



- W tym przypadku?[zadanie 4]
- W przypadku sieci „pełnej”?[zadanie 5]
- W ogólnym przypadku, jeśli liczba rodziców ograniczona jest przez k?[zadanie 6]

Niezależnoś zwykła vs. niezależność warunkowa

- $T_1 \perp T_2 | C \implies T_1 \perp T_2$?[zadanie 7]
- $T_1 \perp T_2 \implies T_1 \perp T_2 | C$?[zadanie 8]

Dwie przyczyny

- $S, R \rightarrow H$ (słonecznie, podwyżka $\rightarrow$ radość)
- $P(s) = 0.7$
- $P(r) = 0.01$
- $P(h|s, r) = 1$
- $P(h|\neg s, r) = 0.9$
- $P(h|s, \neg r) = 0.7$
- $P(h|\neg s, \neg r) = 0.1$
- $P(r|s) =?$[zadanie 9]

Explaining away

- $P(r|h) = 0.0185$[zadanie 10]
- $P(r|h, s) =?$[zadanie 11]
- $P(r|h, \neg s) =?$[zadanie 12]
- Jeśli wiemy, że jesteśmy radośni, pogoda może wyjaśnić przyczynę radości. Jeśli jednak okazuje się, że jest słonecznie, to prawd., że dostałem podwyżkę znacznie maleje.
- Wniosek: R i S są niezależne, ale H powoduje, że stają się zależne (pod warunkiem, że H)!

Explaining away

- $P(r|h) = 0.0185$[zadanie 10]
- $P(r|h, s) =?$[zadanie 11]
- $P(r|h, \neg s) =?$[zadanie 12]
- Jeśli wiemy, że jesteśmy radośni, pogoda może wyjaśnić przyczynę radości. Jeśli jednak okazuje się, że jest słonecznie, to prawd., że dostałem podwyżkę znacznie maleje.
- Wniosek: R i S są niezależne, ale H powoduje, że stają się zależne (pod warunkiem, że H)!

Explaining away

- $P(r|h) = 0.0185$[zadanie 10]
- $P(r|h, s) =?$[zadanie 11]
- $P(r|h, \neg s) =?$[zadanie 12]
- Jeśli wiemy, że jesteśmy radośni, pogoda może wyjaśnić przyczynę radości. Jeśli jednak okazuje się, że jest słonecznie, to prawd., że dostałem podwyżkę znacznie maleje.
- Wniosek: R i S są niezależne, ale H powoduje, że stają się zależne (pod warunkiem, że H)!

Explaining away

- $P(r|h) = 0.0185$[zadanie 10]
- $P(r|h, s) =?$[zadanie 11]
- $P(r|h, \neg s) =?$[zadanie 12]
- Jeśli wiemy, że jesteśmy radośni, pogoda może wyjaśnić przyczynę radości. Jeśli jednak okazuje się, że jest słonecznie, to prawd., że dostałem podwyżkę znacznie maleje.
- Wniosek: R i S są niezależne, ale H powoduje, że stają się zależne (pod warunkiem, że H)!

Explaining away — podsumowanie

- $S, R \rightarrow H$
- $P(r|h) = 0.0185$
- $P(r|h, s) = 0.0142$
- $P(r|s) = 0.01$
- $P(r|h, \neg s) = 0.0833$
- Jeśli nie znamy h, to $P(r|s) = P(r) \rightarrow R$ i S są niezależne,
- ale jeśli znamy h, to R i S stają się zależne $(P(r|h, s) \neq P(r|h))$
- Wniosek: niezależność nie implikuje niezależności warunkowej.

Niezależność warunkowa — przykłady

- $A \to B \to C$
- $A \to D \to E$
- Czy:
  - $C \perp A$?[zadanie 13]
  - $C \perp A|B$?[zadanie 14]
  - $C \perp D$?[zadanie 15]
  - $C \perp D|A$?[zadanie 16]
  - $E \perp C|D$?[zadanie 17]

Niezależność warunkowa — przykłady

- $A, B \to C \to D, E$
- Czy:
  - $A \perp E$?[zadanie 18]
  - $A \perp E|B$?[zadanie 19]
  - $A \perp E|C$?[zadanie 20]
  - $A \perp B$?[zadanie 21]
  - $A \perp B|C$?[zadanie 22]

Niezależność warunkowa (zasady ogólne uproszczone)

- $A \rightarrow B \rightarrow C$:
  - A i C są zależne, ale:
  - $A \perp C | B$
- $A \rightarrow B, C$:
  - B i C są zależne, ale:
  - $B \perp C | A$
- $A, B \rightarrow C$:
  - $A \perp B$:
  - A i B są zależne pod warunkiem C
    - podobnie w przypadku ogólnym: $A, B \rightarrow X_1 \cdots \rightarrow \ldots X_n \rightarrow C$

D-separacja

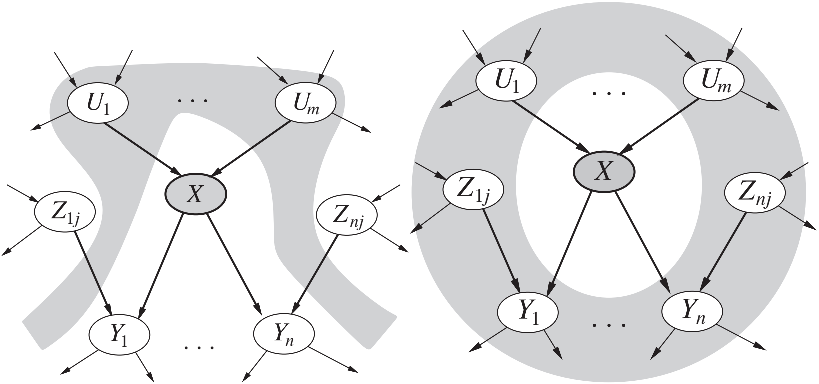
1. $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ są niezależne pod warunkiem $\mathbf{Z}$ ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{Z}$ mogą być zbiorami zmiennych losowych), iff X i Y są **d-odseparowane.**
2. X, Y sa d-odseparowane jeśli każda ścieżka prowadząca od węzła $X \in \mathbf{X}$ do węzła $Y \in \mathbf{Y}$ jest „**zablokowana**”, jeśli jest na niej jakiś węzeł V, gdzie$V \notin \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, taki, że:
   1. Połączenie przez V jest typu **(rozchodzącego się** lub **seryjnego)** oraz $V \in \mathbf{Z}$
   2. Połączenie przez V jest typu **schodzącego się** oraz ani $V \notin \mathbf{Z}$ żaden potomek P węzła V nie należy do $\mathbf{Z}$

Typy połączeń:

- Rozchodzący się: $A \leftarrow V \rightarrow B$
- Seryjny: $A \rightarrow V \rightarrow B$
- Schodzący się: $A \rightarrow V \leftarrow B$

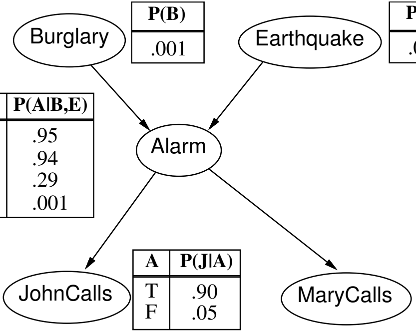
Applet do testowania d-separowalności:
`http://www.phil.cmu.edu/~wimberly/dsep/dSep.html`

Właściwości



- Lewa: X jest niezależny od swoich potomków (Y) pod warunkiem swoich rodziców (U)
- Prawa (Koc Markova): X jest niezależny od pozostałych węzłów pod warunkiem swojej rodziny: tj. swoich rodziców, swoich dzieci oraz rodziców swoich dzieci.

Wnioskowanie



P(B)
.001

P(E)
.002

B	E	P(A|B,E)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
T	.90
F	.05

A	P(M|A)
T	.70
F	.01

- Pytanie:
  - $\mathbf{P}(J, M | \neg b, e)$
  - B, E: obserwowane, A: ukryte, J, M: zapytanie

Wnioskowanie

W ogólności pytania, które możemy stawiać mają postać:

1. Rozkład łączny

$$\mathbf{P}(Q_1, Q_2, \ldots | E_1 = e_1, E_2 = e_2)$$

   - wynik: łączny rozkład a posteriori (znając wartości **e**)

2. Maximum Likelihood Estimation:

$$argmax_{\mathbf{q}} P(Q_1 = q_1, Q_2 = q_2, \ldots | E_1 = e_1, E_2 = e_2)$$

   - wynik: wektor wartości **q**.

Enumeracja

- Obliczamy wprost, np.

$$P(b|j,m) = P(b,j,m)/P(j,m)$$

- obliczmy np. $P(b,j,m)$:

$$\begin{aligned} P(b,j,m) &= \sum_{e \in E} \sum_{a \in A} P(b,j,m,e,a) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{a \in A} P(b)P(e)P(a|b,e)P(j|a)P(m|a) \end{aligned}$$

Enumeracja

- Obliczamy wprost, np.

$$P(b|j,m) = P(b,j,m)/P(j,m)$$

- obliczmy np. $P(b,j,m)$:

$$\begin{aligned} P(b,j,m) &= \sum_{e \in E} \sum_{a \in A} P(b,j,m,e,a) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{a \in A} P(b)P(e)P(a|b,e)P(j|a)P(m|a) \end{aligned}$$

Enumeracja
Koszt obliczeniowy

$$P(b, j, m) = \sum_{e \in E} \sum_{a \in A} P(b)P(e)P(a|b, e)P(j|a)P(m|a)$$

- Zmienne są binarne, więc mamy $2 \times 2 = 4$ „wierszy" do policzenia
  $\Rightarrow$ w ogólności: $O(2^n)$ w najgorszym przypadku przy n zmiennych binarnych.
- Kiedy występuje najgorszy przypadek? [zadanie 23]

Przyspieszanie enumeracji

wyciąganie przed nawias

- Niektóre wartości można wyciągnąć przed nawias:

$$\begin{aligned} P(b,j,m) &= \sum_e \sum_a P(b)P(e)P(a|b,e)P(j|a)P(m|a) \\ &= P(b) \sum_e P(e) \sum_a P(a|b,e)P(j|a)P(m|a) \end{aligned}$$

- Niewielkie przyspieszenie $\rightarrow$ nadal zbyt wiele „wierszy”

Przyspieszanie enumeracji

wyciąganie przed nawias

- Niektóre wartości można wyciągnąć przed nawias:

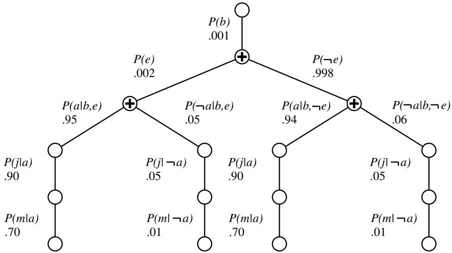
$$
\begin{aligned}
P(b, j, m) &= \sum_{e} \sum_{a} P(b) P(e) P(a|b, e) P(j|a) P(m|a) \\
&= P(b) \sum_{e} P(e) \sum_{a} P(a|b, e) P(j|a) P(m|a)
\end{aligned}
$$

- Niewielkie przyspieszenie $\rightarrow$ nadal zbyt wiele „wierszy”

Przyspieszanie enumeracji

eliminacja zmiennych

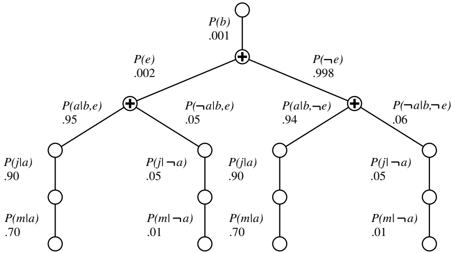
$$P(b, j, m) = P(b) \sum_e P(e) \sum_a P(a|b, e) P(j|a) P(m|a)$$



Obliczenia się powtarzają, np. $P(j|a)P(m|a)$
$\Rightarrow$ eliminacja zmiennych poprzez programowanie dynamiczne
(spamiętywanie wyników pośrednich)

Przyspieszanie enumeracji
eliminacja zmiennych

$$P(b, j, m) = P(b) \sum_e P(e) \sum_a P(a|b, e) P(j|a) P(m|a)$$



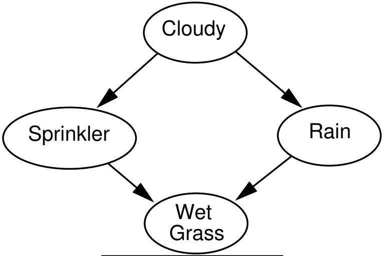
Obliczenia się powtarzają, np. $P(j|a)P(m|a)$
$\Rightarrow$ eliminacja zmiennych poprzez programowanie dynamiczne (spamiętywanie wyników pośrednich)

Próbkowanie bezpośrednie (ang. *direct sampling*)

- Estymuje łączny rozkład prawdopodobieństwa
- Algorytm:
  - Wylosuj N próbek zgodnie ze znanymi prawdopodobieństwami.
  - Otrzymane ilości podziel przez N

Przykład

P(C)
.50

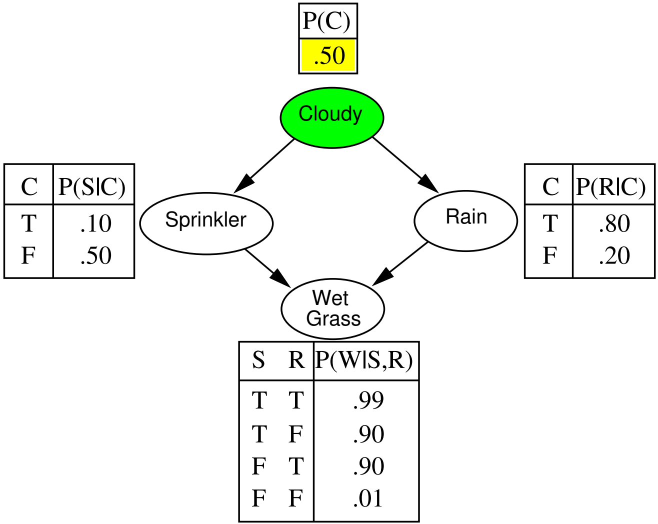


C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Direct sampling — przykład



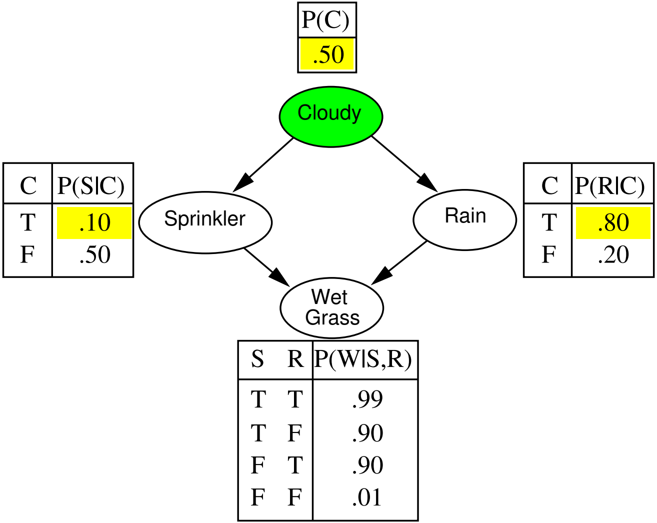
P(C)
.50

C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

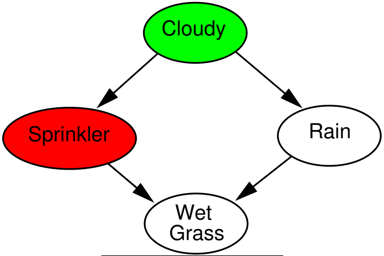
S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Direct sampling — przykład



Direct sampling — przykład

P(C)
.50

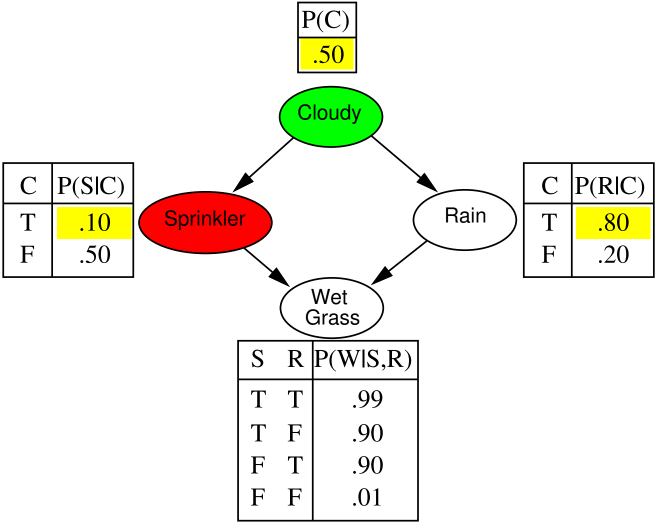


C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

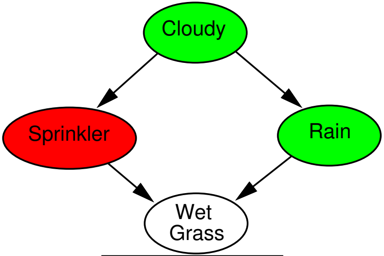
S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Direct sampling — przykład



Direct sampling — przykład

P(C)
.50



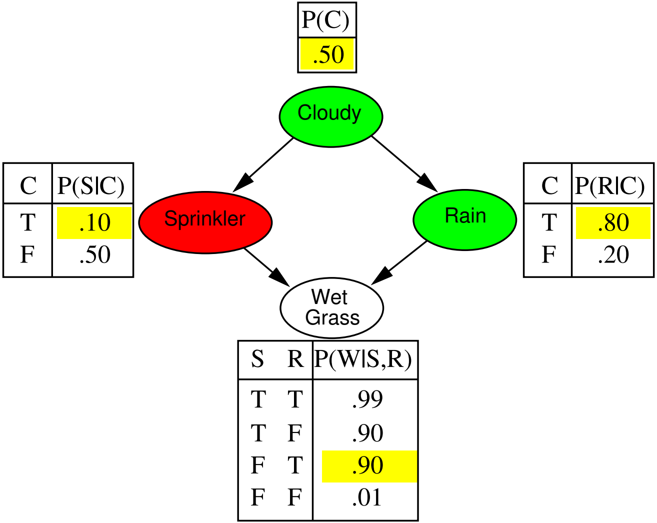
C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

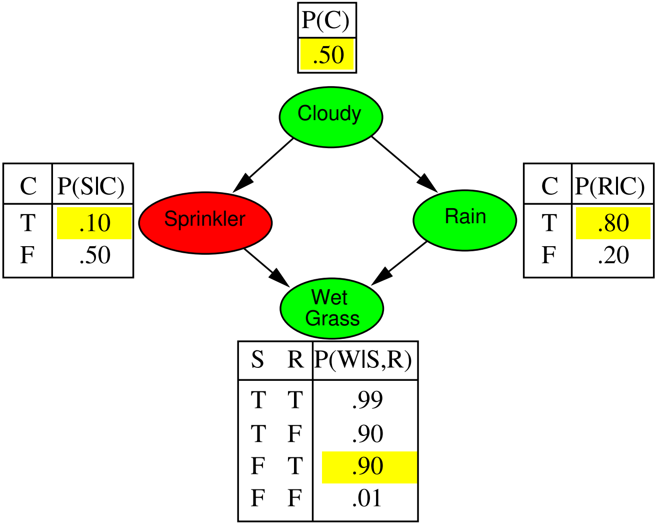
S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Z którego wiersza będziemy teraz korzystać?[zadanie 24]

Direct sampling — przykład



Direct sampling — przykład



P(C)
.50

C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Wynik: próbka $[c, \neg s, r, w]$

Direct sampling — przykład

$$P(w) = ?$$

[zadanie 25]

Wyniki kolejnych próbkowań:

1. $[c, \neg s, r, w]$
2. $[\neg c, s, \neg r, w]$
3. $[c, \neg s, r, \neg w]$
4. $[c, \neg s, \neg r, \neg w]$
5. $[\neg c, \neg s, \neg r, \neg w]$
6. $[\neg c, \neg s, \neg r, \neg w]$
7. $[c, s, r, w]$
8. $[\neg c, s, \neg r, w]$
9. $[c, \neg s, r, w]$
10. $[\neg c, \neg s, r, w]$

Direct sampling — zalety

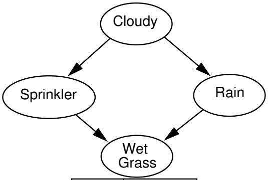
- Zalety:
    - w krótkim czasie możemy uzyskać aproksymację łącznego rozkładu prawdopodobieństwa
    - możemy je zastosować nawet jeśli nie znamy prawdopodobieństw opisujących model (ale potrafimy symulować proces)

Próbkowanie z odrzucaniem (ang. rejection sampling)

- Pozwala obliczyć rozkład prawdopodobieństwa warunkowego np. $\mathbf{P}(C, R|s, w)$
- Idea:
  1. Wylosuj próbkę
  2. Odrzuć jeśli nie pasuje do wartości zmiennych warunkowych
- Wynik: liczba pasujących / liczba niepasujących

Przykład

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

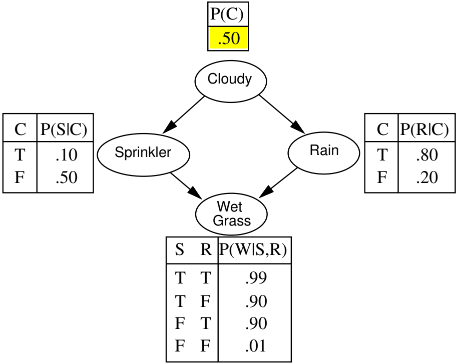
S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$\mathbf{P}(R|s) = ?$[zadanie 26]

1. $[c, \neg s, r, w]$
2. $[\neg c, s, \neg r, w]$
3. $[c, \neg s, r, \neg w]$
4. $[c, \neg s, \neg r, \neg w]$
5. $[\neg c, \neg s, \neg r, \neg w]$
6. $[\neg c, \neg s, \neg r, \neg w]$
7. $[c, s, r, w]$
8. $[\neg c, s, \neg r, w]$
9. $[c, \neg s, r, w]$
10. $[\neg c, \neg s, r, w]$

- Jakie są wady próbkowania z odrzucaniem?[zadanie 27]

Przykład



$\mathbf{P}(R|s) = ?$[zadanie 26]

1. $[c, \neg s, r, w]$
2. $[\neg c, s, \neg r, w]$
3. $[c, \neg s, r, \neg w]$
4. $[c, \neg s, \neg r, \neg w]$
5. $[\neg c, \neg s, \neg r, \neg w]$
6. $[\neg c, \neg s, \neg r, \neg w]$
7. $[c, s, r, w]$
8. $[\neg c, s, \neg r, w]$
9. $[c, \neg s, r, w]$
10. $[\neg c, \neg s, r, w]$

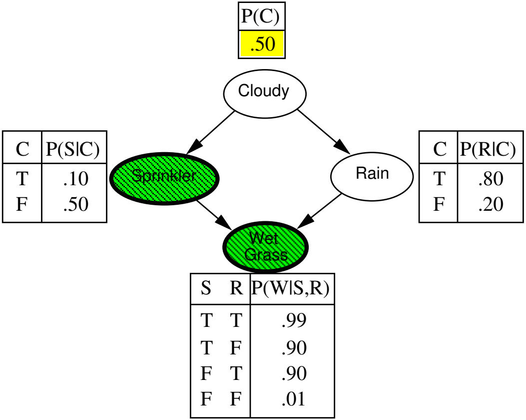
- Jakie są wady próbkowania z odrzucaniem?[zadanie 27]

Ważone próbkowanie (ang. likelihood weighting)

- Ustalamy wartości zmiennych warunkowych $\Rightarrow$ nie trzeba będzie ich odrzucać
- Ważymy próbki odpowiednimi prawdopodobieństwami

Przykład

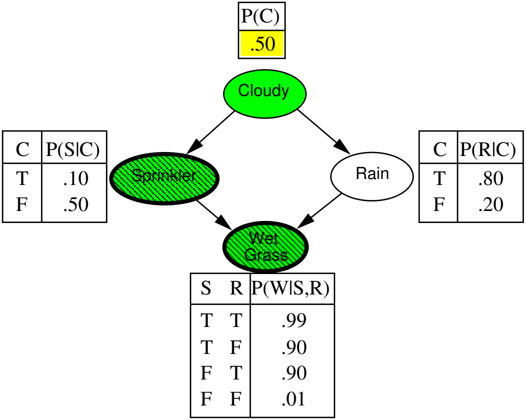
$$P(c, \neg r | s, w) = ?$$



$$w = 1.0$$

Przykład

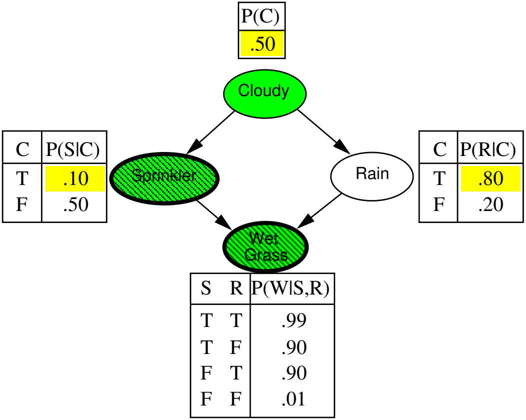
$$P(c, \neg r | s, w) = ?$$



$$w = 1.0$$

Likelihood weighting — przykład

$P(c, \neg r | s, w) = ?$



P(C)
.50

C	P(S|C)
T	.10
F	.50

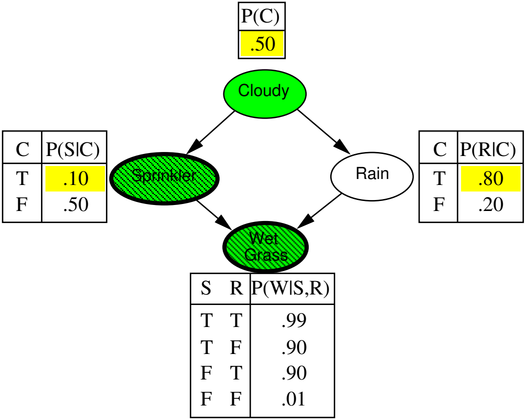
C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$w = 1.0$

Likelihood weighting — przykład

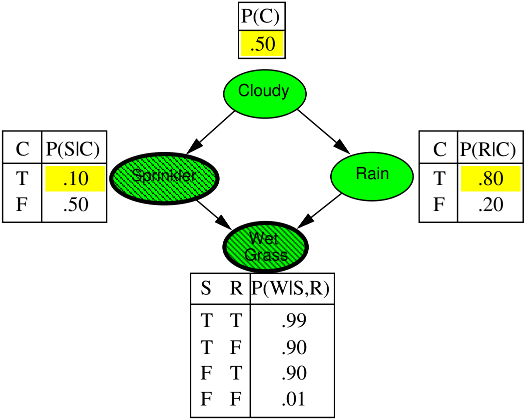
$$P(c, \neg r | s, w) = ?$$



$$w = 1.0 \times 0.1$$

Likelihood weighting — przykład

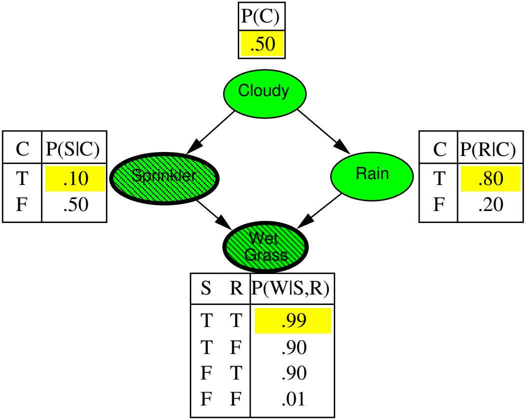
$P(c, \neg r | s, w) = ?$



$w = 1.0 \times 0.1$ (Jaki będzie kolejny czynnik?) [zadanie 28]

Likelihood weighting — przykład

$P(c, \neg r | s, w) = ?$



P(C)
.50

C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$w = 1.0 \times 0.1 \times 0.99 = 0.099$ (wynik: próbka $[c, s, r, w]$)

Podsumowanie wnioskowania

- Wnioskowanie **dokładne** (eliminacja zmiennych):
  - w ogólności NP-trudne
  - bardzo wrażliwe na topologię sieci i pytania, które zadajemy
- Wnioskowanie **aproksymacyjne** (Likelihood Weighting):
  - generalnie, nie jest wrażliwe na topologię sieci
  - zbieżność może być powolna, gdy prawd. mają skrajne wartości (0.0 lub 1.0)

Pominęliśmy:

- Wnioskowanie za pomocą symulacji łańcuchów Markov'a (ang. *Markov chain Monte Carlo*) o nazwie **próbkowanie Gibbs'a.**
  - Pewne zalety względem Likelihood Weighting
- Wiele nowych i efektywniejszych metod

Podsumowanie wnioskowania

- Wnioskowanie **dokładne** (eliminacja zmiennych):
  - w ogólności NP-trudne
  - bardzo wrażliwe na topologię sieci i pytania, które zadajemy
- Wnioskowanie **aproksymacyjne** (Likelihood Weighting):
  - generalnie, nie jest wrażliwe na topologię sieci
  - zbieżność może być powolna, gdy prawd. mają skrajne wartości (0.0 lub 1.0)

Pominęliśmy:

- Wnioskowanie za pomocą symulacji łańcuchów Markov'a (ang. *Markov chain Monte Carlo*) o nazwie **próbkowanie Gibbs'a.**
  - Pewne zalety względem Likelihood Weighting
- Wiele nowych i efektywniejszych metod

Jak konstruować sieci?

- Najgorszy przypadek dla węzła:
  - to $O(2^k)$ liczb, gdzie $k =$ liczba rodziców węzła.
- Zwykle jednak możemy zastosować jeden ze schematów. Rozważymy dwa z nich:
  - **węzeł deterministyczny**
  - **noisy-OR**

Węzeł deterministyczny

- Bez niepewności.
- Węzeł zdeterminowany w pełni przez rodziców (przez wyrażenie logiczne), np.
  - $Polak, Niemiec, Hiszpan \rightarrow Europejczyk$

P	N	H	P(Europejczyk)
F	F	F	0.0
F	F	T	1.0
F	T	F	1.0
F	T	T	1.0
T	F	F	1.0
T	F	T	1.0
T	T	F	1.0
T	T	T	1.0

Noisy-OR

- Uogólnienie logicznej alternatywy
- Przykład *Przeziębienie*, *Grypa*, *Malaria* $\rightarrow$ *Gorączka*
  - Zakładamy, że znamy wszystkie możliwe przyczyny (lub nowy węzeł *NieznanaPrzyczyna*)
  - Zakładamy, że związek $X \rightarrow Go$ może być w pewnym zakresie „hamowany"
    - **Hamowania są niezależne**, tzn. „hamowanie" $P \rightarrow Go$ jest niezależne od „hamowania" $G \rightarrow Go$.
- Stąd: gorączka nie występuje $(\neg go) \iff \neg p \wedge \neg g \wedge \neg m$

Noisy-OR

- Uogólnienie logicznej alternatywy
- Przykład *Przeziębienie*, *Grypa*, *Malaria* $\rightarrow$ *Gorączka*
  - Zakładamy, że znamy wszystkie możliwe przyczyny (lub nowy węzeł *NieznanaPrzyczyna*)
  - Zakładamy, że związek $X \rightarrow Go$ może być w pewnym zakresie „hamowany"
    - **Hamowania są niezależne**, tzn. „hamowanie" $P \rightarrow Go$ jest niezależne od „hamowania" $G \rightarrow Go$.
- Stąd: gorączka nie występuje $(\neg go) \iff \neg p \wedge \neg g \wedge \neg m$

Przykład

- Załóżmy, że prawd. „hamowania” są następujące:
  - $P(\neg go|p, \neg g, \neg m) = 0.6$
  - $P(\neg go|\neg p, g, \neg m) = 0.2$
  - $P(\neg go|\neg p, \neg g, m) = 0.1$
- Na tej podstawie budujemy całą tabelkę:

P	G	M	P(*Gorączka*)	P($\neg$*Gorączka*)
F	F	F	0.0	1.0
F	F	T	0.9	**0.1**
F	T	F	0.8	**0.2**
F	T	T	0.98	0.02=0.2*0.1
T	F	F	0.4	**0.6**
T	F	T	0.94	0.06=0.6*0.1
T	T	F		?[zadanie 29]
T	T	T		?[zadanie 30]

Prawd. całkowite

D_i - pogoda i-tego dnia. $D_i = \{słoneczny, deszczowy\}$

- $P(D_i = s) = 0.9$
- $P(D_{i+1} = s)|D_i = s) = 0.8$
- $P(D_2 = d|D_1 = s) =?$[zadanie 31]
- $P(D_2 = s|D_1 = d) = 0.6$
- $P(D_2 = d|D_1 = d) =?$[zadanie 32]
- $P(D_2 = s) =?$[zadanie 33]
- $P(D_3 = s) =?$[zadanie 34]
- Narysuj sieć baysowską opisującą ten świat[zadanie 35]

Zadania

- Obecność nowotworu: $C = \{c, \neg c\}$.
- Test wykrył raka: $T = \{+, -\}$
- $P(c) = 0.01$
- $P(\neg c) =$
- $P(+|c) = 0.9$
- $P(-|c) =$
- $P(+|\neg c) = 0.2$
- $P(-|\neg c) =$
- $P(+, c) =$
- $P(-, c) =$
- $P(+, \neg c) =$
- $P(-, \neg c) =$

- $P(c|+) = ?$[zadanie 36]
  - Zwróć uwagę, jak mała jest to wartość w porównaniu z wartością $P(+|c) = 0.9$

Zadania

- Obecność nowotworu: $C = \{c, \neg c\}$.
- Test wykrył raka: $T = \{+, -\}$
- $P(c) = 0.01$
- $P(\neg c) =$
- $P(+|c) = 0.9$
- $P(-|c) =$
- $P(+|\neg c) = 0.2$
- $P(-|\neg c) =$
- $P(+, c) =$
- $P(-, c) =$
- $P(+, \neg c) =$
- $P(-, \neg c) =$
- $P(c|+) =?$[zadanie 36]
  - Zwróć uwagę, jak mała jest to wartość w porównaniu z wartością $P(+|c) = 0.9$

Warunkowa niezależność zmiennych

- Obecność nowotworu: C
- Test T wykrył raka $\{+, -\}$. Wynik testu jest losowy. Tutaj przeprowadzamy go dwukrotnie (zmienne losowe T_1, T_2), żeby zwiększyć szansę na prawidłowy wynik.
- Narysuj sieć zawierającą zmienne: C, T_1, T_2[zadanie 37]
- $P(c) = 0.01$, $P(\neg c) =$
- $P(+|c) = 0.9$
- $P(+|\neg c) = 0.2$
- $P(C = c|T_1 = +, T_2 = +) =?$[zadanie 38]

Warunkowa niezależność zmiennych

- j.w. oblicz:
  - $P(T_2 = + | T_1 = +) = ?$[zadanie 39]

Wnioskowanie w sieci BEAMJ

Oblicz prawdopobieństwa w sieci BEAJM:

1. $P(b|j,m)$
2. $P(\neg j|m)$
3. $P(\neg j|a,m)$
4. $P(m|\neg a,j,b)$
5. $P(\neg j,b|m)$

Ile parametrów potrzeba?

Ile jest parametrów (niestrukturalnych) w sieci?[zadanie 40]

- $A \rightarrow B$

Ile parametrów potrzeba?

1. $A \rightarrow B \rightarrow E$
   $A \rightarrow C \rightarrow F$
   $A \rightarrow D \rightarrow F$[zadanie 41]
2.
   - $A, B, C \rightarrow D$, [zadanie 42]
   - $D \rightarrow E, F, G$
   - $C \rightarrow G$

Niezależność warunkowa

- $A \to B \to D \to D \to G$
- $H \to G$
- $C \to B$
- $F \to E \to D \to G$
- Czy:
  - $F \perp A$?[zadanie 43]
  - $F \perp A|D$?[zadanie 44]
  - $F \perp A|G$?[zadanie 45]
  - $F \perp A|H$?[zadanie 46]