Modelowanie Niepewności

Na podstawie: AIMA, ch13

Wojciech Jaśkowski

Instytut Informatyki,
Politechnika Poznańska

15 marca 2013

Wstęp

Przypomnienie: podstawy probabilistyki

Źródła niepewności

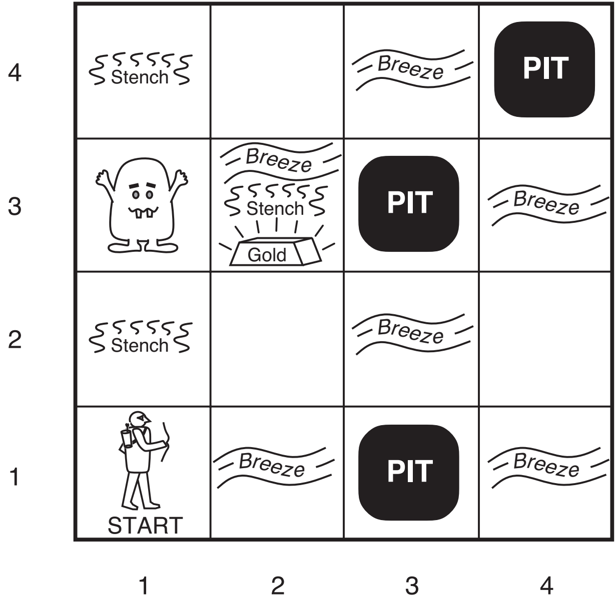
- Świat częściowo obserwowalny
- Świat niedeterministyczny

Także:

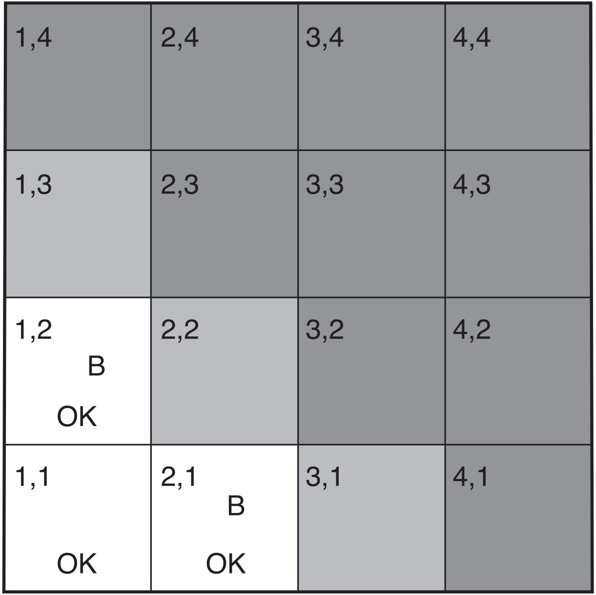
- Lenistwo i ignorancja (niewiedza)

Cel: Racjonalne decyzje w obecności niepewności

Świat Wumpus'a



Świat Wumpus'a



Podstawy I

- Notacja: zmienne losowa $Cancer = \{\neg c, c\}$
- Prawdopodobieństwo warunkowe:
  - $P(c|t)P(t) = P(c \wedge t)$ (reguła produkcji)
- Rozkład prawdopodobieństwa:
  - $\mathbf{P}(Cancer) = \langle P(c), P(\neg c) \rangle$
- Rozkład prawd. łącznego:
  - $\mathbf{P}(Cancer, \ Test)$ - wektor wszystkich kombinacji wartości zmiennych losowych *Cancer* i *Test*.
- Niezależność zdarzeń losowych:
  - $P(c) = P(c|t)$
  - $P(t) = P(t|c)$
  - $P(c)P(t) = P(c \wedge t)$
- Niezależność zmiennych losowych:
  - $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(T|C)$
  - wiedza o niezależności zmiennych jest zwykle wiedzą dziedzinową.

(Pełny) rozkład łączny

	$ból$		$\neg ból$	
	$test$	$\neg test$	$test$	$\neg test$
$dziura$	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg dziura$	0.016	0.064	0.144	0.576

Prawd. marginalne (marginalizacja)

	ból		*¬ból*	
	test	*¬test*	*test*	*¬test*
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

- $P(dziura) = ?$
- $P(Dziura) = ?$

Ogólnie: $\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{P}(\mathbf{Y}, x)$

Prawd. całkowite

	ból		*¬ból*	
	test	*¬test*	*test*	*¬test*
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

- $P(dziura|ból) = ?$
- Ogólnie:
  - $\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{P}(\mathbf{Y}|x)P(x)$, gdzie $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{X}$ są wektorami zmiennych losowych

Normalizacja

	ból		*¬ból*	
	test	*¬test*	*test*	*¬test*
dziura	0.108	0.012	0.072	0.008
¬dziura	0.016	0.064	0.144	0.576

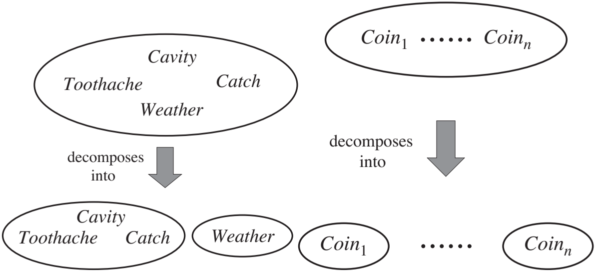
- $P(dziura|ból) = ?$
- $P(\neg dziura|ból) = ?$
- $P(Dziura|ból) = ?$
- Ogólnie:
  - $\mathbf{P}(X|\mathbf{e}) = \alpha \mathbf{P}(X, e)$, gdzie $\mathbf{X}$ jest wektorem zmiennych losowych

Niezależność

Czwarta zmienna: pogoda

- $P(Pogoda = słoneczna, ból, test, dziura) = P(Pogoda = słoneczna | ból, test, dziura) P(ból, test, dziura)$
- $P(Pogoda = słoneczna | ból, test, dziura) = P(Pogoda = słoneczna)$, więc:
- $P(Pogoda = słoneczna, ból, test, dziura) = P(Pogoda = słoneczna) P(ból, test, dziura)$
- Ogólnie:
  - $\mathbf{P}(X|Y) = \mathbf{P}(X)$, albo $\mathbf{P}(X, Y) = \mathbf{P}(X)\mathbf{P}(Y)$

Niezależność



Reguła Bayesa

$$P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$$

- To proste równanie leży u podstawy większości nowoczesnych systemów sztucznej inteligencji opartych na wnioskowaniu probabilistycznym.
- $P(b)$ — prawd. marginalne, $P(a|b)$ — prawd. a posteriori, $P(a)$ — prawd. a priori
- $P(b)$ zwykle jest nieznane i rozpisuje się je jako praw. całkowite.
- Wersja bardziej ogólna (z dodatkową wartością zmiennej E):

$$\mathbf{P}(Y|X, \mathbf{e}) = \frac{\mathbf{P}(X|Y, \mathbf{e})\mathbf{P}(Y|\mathbf{e})}{\mathbf{P}(X|\mathbf{e})}$$

- Kierunek przyczynowy: $P(efekt|przyczyna)$
- Kierunek diagnostyczny: $P(przyczyna|efekt)$

Przykład

zapalenie opon mózgowych (M) i sztywność karku (S)

- $P(s|m) = 0.7$
- $P(m) = 1/50000$
- $P(s) = 0.01$
- $\mathbf{P}(M|s) = ?$

Warunkowa niezależność zmiennych

$$\mathbf{P}(\mathit{Dziura}|\mathit{ból}, \mathit{test}) = ?$$

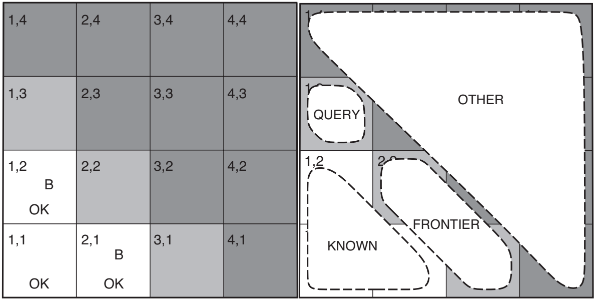
Ale to się nie skaluje...

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathit{Dziura}|\mathit{ból}, \mathit{test}) &= \alpha \mathbf{P}(\mathit{ból}, \mathit{test}|\mathit{Dziura})\mathbf{P}(\mathit{Dziura}) \\ &= \alpha \mathbf{P}(\mathit{ból}|\mathit{Dziura})\mathbf{P}(\mathit{test}|\mathit{Dziura})\mathbf{P}(\mathit{Dziura})\end{aligned}$$

Warunkowa niezależność zmiennych

- C — rak, T_1 — jakiś test na obecność raka, T_2 — jakiś inny test na obecność raka
- C jest zmienną ukrytą. Ale jeśli znalibyśmy C jakakolwiek wiedza o T_1 nie da nam żadnej dodatkowej wiedzy dot. T_2 , czyli T_1 i T_2 są niezależne warunkowo pod warunkiem C.
  - $\mathbf{P}(T_2|C, T_1) = \mathbf{P}(T_2|C)$
  - $\mathbf{P}(T_1, T_2|C) = \mathbf{P}(T_1|C)\mathbf{P}(T_2|C)$
- Notacja: $T_1 \perp T_2|C$

Wumpus



Jakie jest prawd, że w polu (1,3) jest jama jeśli wiatr poczuliśmy w polu (1,2) i (2,1)? Innymi słowy zapytanie wygląda tak:

$$\mathbf{P}(P_{1,3} | b_{1,2}, b_{2,1}, \neg b_{1,2}, \neg p_{1,2}, \neg p_{2,1}, \neg p_{1,1}) = ?$$