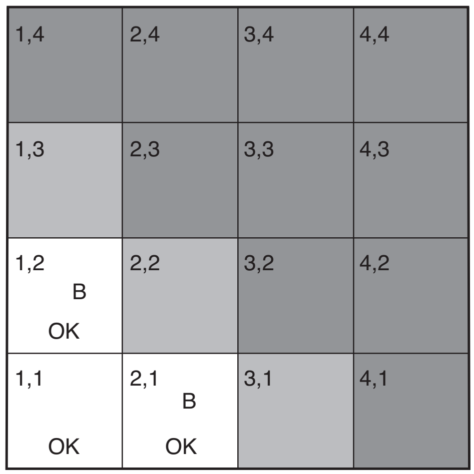
Wyprowadzenie do wykładu
pt. Modelowanie Niepewności

Wojciech Jaśkowski

Na podstawie: AIMA, ch13



Dane

- $D_{i,j}$ — istnienie dziury/jamy na polu (i, j) dla $i, j = 1 \dots 4$,
- $B_{i,j}$ — wystąpienie bryzy na polu (i, j) dla $i, j = 1 \dots 4$. (Rozpatrujemy tylko $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$),
- $P(d_{i,j}) = 0.2$,
- Bryza zawsze występuje obok (pionowo lub poziomo) pola z jamą.

Zadanie

Oblicz

$$\mathbf{P}(D_{1,3}|\neg b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, \neg d_{1,2}, \neg d_{2,1}, \neg d_{1,1}) =?$$

Rozwiązanie

Dla wygody zapiszemy:

$$b = \neg b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}$$

$$z = \neg d_{1,2}, \neg d_{2,1}, \neg d_{1,1} \text{ (znane pola)}$$

Dodatkowo, niech $\mathbf{N}$ będzie zbiorem zmiennych losowych pól nieznanych (tj. wszystkich oprócz $D_{1,2}$, $D_{2,1}$, $D_{1,1}$ oraz zapytania czyli $D_{1,3}$). Wtedy zapytanie możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D_{1,3}|z, b) &= \alpha \mathbf{P}(D_{1,3}, z, b) \text{ (normalizacja)} \\
&= \alpha \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}(D_{1,3}, b, z, n) \text{ (marginalizacja po } \mathbf{N}\text{. Tu by można skończyć, ale } 2^{12}\text{elementów sumy!)} \\
&= \alpha \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, n) \mathbf{P}(D_{1,3}, z, n) \text{ (reguła produkcji)}
\end{aligned}$$

Podzielmy teraz $\mathbf{N}$ na front $\mathbf{F} = \{D_{2,2}, D_{3,1}\}$ i inne pola $\mathbf{I} = \mathbf{N} \backslash \mathbf{F}$. Wtedy:

$$\mathbf{P}(D_{1,3}|z, b) = \alpha \sum_{f \in \mathbf{F}} \sum_{i \in \mathbf{I}} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f, i)\mathbf{P}(D_{1,3}, z, f, i)$$

W tym miejscu można by skończyć, ale można znacznie przyspieszyć obliczenia. Kluczowe jest, aby zauważyć, że $B \perp \mathbf{I}|\mathbf{X}$ (niezależność warunkowa), gdzie $\mathbf{X} = \{D_{1,1}, D_{1,2}, D_{2,1}, D_{1,3}, D_{2,2}, D_{3,1}\} = \mathbf{F} \cup D_{1,3} \cup \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ to jamy na znanych polach). Innymi słowy znane jamy, front oraz $D_{1,3}$ "rozdzielają" i oraz b. Wtedy:

$$\mathbf{P}(b|z, D_{1,3}, f, i) = \mathbf{P}(b|z, D_{1,3}, f),$$

czyli

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D_{1,3}|z, b) &= \alpha \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f)\mathbf{P}(D_{1,3}, z, f, i) \text{ } (\textbf{niezależność warunkowa}) \\
&= \alpha \sum_{f \in F} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f) \sum_{i \in I} \mathbf{P}(D_{1,3}, z, f, i) \text{ (wyciągnięcie przed sumę)} \\
&= \alpha \sum_{f \in F} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f) \sum_{i \in I} \mathbf{P}(D_{1,3})P(z)P(f)P(i) \text{ } (\textbf{niezależność } D) \\
&= \alpha P(z)\mathbf{P}(D_{1,3}) \sum_{f \in F} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f)P(f) \sum_{i \in I} P(i) \text{ (wyciągnięcie przed nawias)}
\end{aligned}$$

$P(z)$ jest stałą, więc niech $\alpha' = \alpha P(z)$. Dodatkowo $\sum_{i \in I} P(i) = 1$. Więc:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D_{1,3}|z, b) &= \alpha' \mathbf{P}(D_{1,3}) \sum_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f)P(f) \\
&= \alpha' \mathbf{P}(D_{1,3}) \sum_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f)P(f)
\end{aligned}$$

Teraz sumowanie jest tyko po $2^2 = 4$ wartościach.

Zauważmy, że $\mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f) \in \{0, 1\}$. 1 jest wtedy i tylko wtedy, gdy ustawienia $D_{1,3}$ i F są zgodne z obserwacjami b. Jest tak dla 5 poniższych przypadków.

1. $d_{1,3}, d_{2,2}, d_{3,1},\ P(f) = 0.2 \times 0.2 = 0.04$
2. $d_{1,3}, \neg d_{2,2}, d_{3,1},\ P(f) = 0.8 \times 0.2 = 0.16$
3. $d_{1,3}, d_{2,2}, \neg d_{3,1},\ P(f) = 0.2 \times 0.8 = 0.16$
4. $\neg d_{1,3}, d_{2,2}, d_{3,1},\ P(f) = 0.2 \times 0.2 = 0.04$
5. $\neg d_{1,3}, d_{2,2}, \neg d_{3,1}, P(f) = 0.2 \times 0.8 = 0.16$

Ostatecznie więc:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D_{1,3}|z, b) &= \alpha' \mathbf{P}(D_{1,3}) \sum_{f \in F} \mathbf{P}(b|D_{1,3}, z, f)P(f) \\
&= \alpha' \langle 0.2, 0.8 \rangle \times \langle 0.04 + 0.16 + 0.16, 0.04 + 0.16 \rangle \\
&= \alpha' \langle 0.2, 0.8 \rangle \times \langle 0.36, 0.2 \rangle \\
&= \alpha' \langle 0.072, 0.16 \rangle \\
&\approx \langle 0.31, 0.69 \rangle
\end{aligned}$$

Analogicznie można policzyć, że

$$P(D_{2,2}|z, b) = \langle 0.86, 0.14 \rangle$$

Lepiej zatem próbować szczęścia na polu $(1, 3)$ niż na $(2, 2)$.

Obserwacja: Gdyby bryza występowała tylko z pewnym prawd. problem wydawałby się trudniejszy, ale przedstawione rozwiązanie nadal by działało!