Testy statystyczne, test frakcji

Na podstawie materiałów WK

Testy statystyczne

- Testujemy **hipotezę zerową** H_0 przeciwko **hipotezie alternatywnej** H_1.

  Hipotezy dotyczą jakiegoś parametru rozkładu.
  (zwykle: H_0 – brak „efektu", H_1 – istnieje jakiś „efekt")

- Dowód „nie wprost": zakładamy, że H_0 jest prawdziwe i odrzucamy je na rzecz H_1, tylko jeśli **przy założeniu prawdziwości** H_0 **dane dają wynik niezgodny z oczekiwaniami**.

  Niezgodny z oczekiwaniami $=$ przy założeniu H_0, wynik uzyskany z danych jest **mało prawdopodobny**.

Przykłady

1. Testujemy, czy moneta jest uczciwa. Co, jeśli:
   - Rzucamy 12 razy i otrzymujemy 12 orłów?
   - Rzucamy 20 razy i otrzymujemy 11 orłów?
2. Na egzaminie inżynierskim jest lista 100 znanych studentowi pytań i chcemy sprawdzić, czy student zna odpowiedź na ponad 50% z nich. Na 10 wylosowanych pytań student udziela poprawnej odpowiedzi tylko na jedno.

Ogólna postać testów

- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\theta = \theta_0$	$(\theta \geq \theta_0)$	$(\theta \leq \theta_0)$
$H_1:$	$\theta \neq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$\theta > \theta_0$
	(dwustronny)	(lewostronny)	(prawostronny)

- **Statystyka testowa** $Z = Z(X_1, \ldots, X_n)$
- **Obszar (zbiór) krytyczny** C_{kr}

test	dwustronny	lewostronny	prawostronny
C_{kr}	$(-\infty, -z_{\text{kr}}) \cup (z_{\text{kr}}, \infty)$	$(-\infty, -z_{\text{kr}})$	(z_{kr}, ∞)

- **Decyzja**:

> Jeśli $Z \in C_{\text{kr}}$, odrzucamy H_0 na rzecz H_1.
> Jeśli $Z \notin C_{\text{kr}}$, brak podstaw do odrzucenia H_0.

Błąd pierwszego i drugiego rodzaju

	prawdziwe H_0	prawdziwe H_1
$Z \notin C_{\mathrm{kr}}$ (nie odrzucamy H_0)	✓	błąd II rodzaju
$Z \in C_{\mathrm{kr}}$ (odrzucamy H_0)	błąd I rodzaju	✓

Błąd pierwszego i drugiego rodzaju

	prawdziwe H_0	prawdziwe H_1
$Z \notin C_{\mathrm{kr}}$ (nie odrzucamy H_0)	$\checkmark$	błąd II rodzaju
$Z \in C_{\mathrm{kr}}$ (odrzucamy H_0)	błąd I rodzaju	$\checkmark$

W testach statystycznych kontrolujemy błąd I rodzaju:

$$\Pr_{H_0}(Z \in C_{\mathrm{kr}}) = \alpha \qquad (\alpha \text{ —poziom istotności}),$$

równocześnie wpływając na błąd II rodzaju: $\Pr_{H_1}(Z \notin C_{\mathrm{kr}}) = \beta$.

Moc testu

$\boxed{\text{Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia H0, gdy jest ona fałszywa } (1-\beta).}$

Moc testu

Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia H0, gdy jest ona fałszywa $(1 - \beta)$.

Moc testu zależy od:

- odległości między wartością parametru w H_0 a prawdziwą wartością dla populacji $(\uparrow \Longrightarrow \uparrow)$,
- odchylenia standardowego w populacji σ $(\downarrow \Longrightarrow \uparrow)$,
- liczebności próby n $(\uparrow \Longrightarrow \uparrow)$,
- poziomu istotności α $(\uparrow \Longrightarrow \uparrow)$.

Moc testu

Moc testu to prawdopodobieństwo odrzucenia H0, gdy jest ona fałszywa $(1-\beta)$.

Moc testu zależy od:

- odległości między wartością parametru w H_0 a prawdziwą wartością dla populacji $(\uparrow \Longrightarrow \uparrow)$,
- odchylenia standardowego w populacji σ $(\downarrow \Longrightarrow \uparrow)$,
- liczebności próby n $(\uparrow \Longrightarrow \uparrow)$,
- poziomu istotności α $(\uparrow \Longrightarrow \uparrow)$.

Test dla frakcji (prawostronny)

$$\begin{array}{ll} H_0: & \hat{P} \leq p_0 \\ H_1: & \hat{P} > p_0 \end{array}$$

- Obserwujemy dane $X_1, \ldots, X_n$ o wartościach w $\{0, 1\}$ (rozkład dwupunktowy).
- Jeśli H_0 prawdziwe – spodziewamy się $\hat{p} = \frac{\#\text{sukcesów}}{n} \lesssim p_0$.
- Jeśli $\hat{p} \gg p_0$, dane niezgodne z H_0 – odrzucamy na rzecz H_1.

Wniosek: jeśli $\hat{p} - p_0 > c$, odrzucamy H_0. Jak wyznaczyć próg c?

$$\begin{aligned} \alpha = \Pr(\text{błąd I rodz.}) &= \Pr_{H_0}(\hat{p} - p_0 > c) \\ &= \Pr_{H_0}\left(\underbrace{\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}}_{Z} > \underbrace{\frac{c}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}}_{z_{\mathrm{kr}}}\right) \end{aligned}$$

Test dla frakcji (prawostronny)

$$H_0: \quad \hat{P} \le p_0$$
$$H_1: \quad \hat{P} > p_0$$

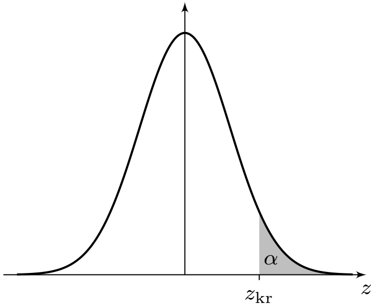
Statystyka testowa: $Z = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \; = \; \frac{S_n - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$.

Jeśli H_0 prawdziwe, z CTG[†] przybliżamy $Z \sim N(0,1)$.

$$\alpha = \Pr_{H_0}(Z > z_{\mathrm{kr}}) = 1 - \Phi(z_{\mathrm{kr}}),$$

$$z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1-\alpha),$$

$$C_{\mathrm{kr}} = (z_{\mathrm{kr}}, \infty).$$



[†] Centralne Tw. Graniczne, dla $np_0 \ge 5, n(1-p_0) \ge 5$

Test dla frakcji (dwustronny)

$$\begin{array}{ll} H_0: & \hat{P} = p_0 \\ H_1: & \hat{P} \neq p_0 \end{array}$$

$$Z = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}, \qquad C_{\mathrm{kr}} = (-\infty, -z_{\mathrm{kr}}) \cup (z_{\mathrm{kr}}, \infty).$$

$$\alpha = \Pr_{H_0}(Z > z_{\mathrm{kr}}) + \Pr_{H_0}(Z < -z_{\mathrm{kr}})$$

$$\alpha = 2\big(1 - \Phi(z_{\mathrm{kr}})\big)$$

$$z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$$