

Rozkłady prawdopodobieństwa

Na podstawie materiałów WK

20 marca 2019

Rozkłady prawdopodobieństwa

- **Dwupunktowy** $B(p)$, dla zmiennej $X \in \{0, 1\}$.

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p, \quad E[X] = p, \quad D^2[X] = p(1-p).$$

- **Dwumianowy** $B(n; p)$:

$$X = \sum_{k=1}^n X_k, \quad \text{gdzie } X_k \sim B(p).$$

Suma n niezależnych zmiennych dwupunktowych. Zachodzi:

$$E[X] = np, \quad D^2[X] = np(1-p).$$

Użyteczne własności

Niech X_1, \dots, X_n – **i.i.d.**¹ oraz $E[X_k] = \mu$, $D^2[X_k] = \sigma^2$.

- Dla sumy $X = \sum_{k=1}^n X_k$:

$$\begin{aligned}E[X] &= E[X_1] + \dots + E[X_n] = n\mu, \\D^2[X] &= D^2[X_1] + \dots + D^2[X_n] = n\sigma^2.\end{aligned}$$

- Dla średniej $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{n} X$:

$$\begin{aligned}E[\bar{X}] &= \frac{1}{n} E[X] = \mu, \\D^2[\bar{X}] &= \frac{1}{n^2} D^2[X] = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{czyli } D[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

¹i.i.d.: *independent and identically distributed* – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie

Rozkład normalny

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ma gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Rodzina rozkładów normalnych ma wyjątkową własność:

- Dowolna kombinacja liniowa zmiennych o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny!

Centralne Twierdzenie Graniczne

X_1, \dots, X_n – i.i.d., $E[X_k] = \mu$, $D^2[X_k] = \sigma^2$.

Zdefiniujmy **ustandaryzowaną** średnią $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$.

$$E[Z] = 0, \quad D^2[Z] = 1.$$

Zachodzi:

$$Z \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Przez CTW rozkład normalny występuje **powszechnie!**

- Cechy fizyczne (wzrost, waga, BMI), wyniki testów (IQ), odstępowstwa od normy w produkcji, **wszelkie uśrednianie**.

Centralne Twierdzenie Graniczne

X_1, \dots, X_n – i.i.d., $E[X_k] = \mu$, $D^2[X_k] = \sigma^2$.

Zdefiniujmy **ustandaryzowaną** sumę $S = \frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

$$E[S] = 0, \quad D^2[S] = 1.$$

Zachodzi:

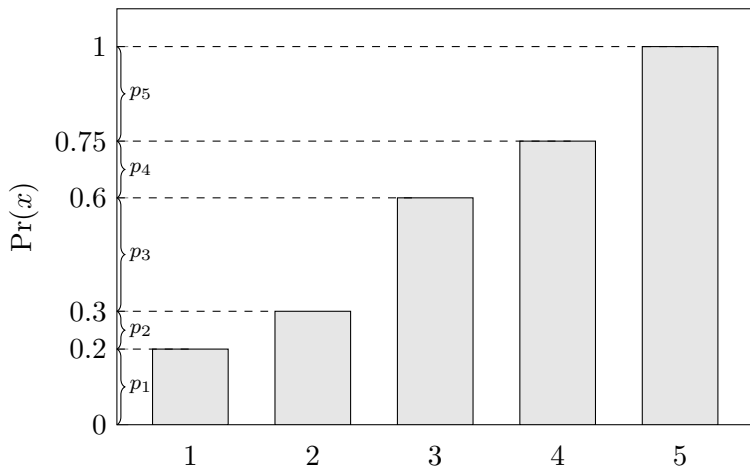
$$S \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu P mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0, 1]$ (jednostajnie)?

Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu P mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0, 1]$ (jednostajnie)?



Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu P mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0, 1]$ (jednostajnie)?

