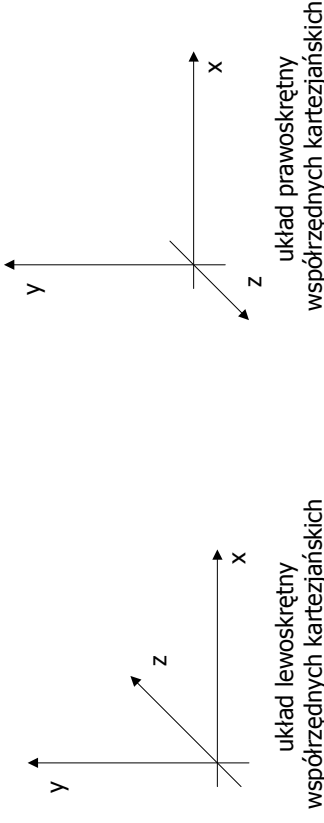


Geometria 3D – układy współrzędnych



Reprezentacja macierzowa przekształceń 3D (1/2)

Przesunięcie

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skalowanie

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obroty

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reprezentacja macierzowa przekształceń 3D (2/2)

Pochylenie (x,y)

$$SH_{xy}(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pochylenie (x,z)

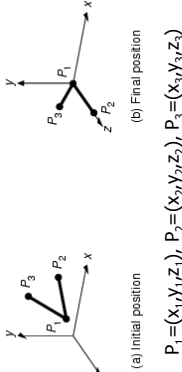
$$SH_{xz}(sh_x, sh_z) = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & sh_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pochylenie (y,z)

$$SH_{yz}(sh_y, sh_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 & 0 \\ sh_z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład składania przekształceń 3D (1/2)

- Przesunięcie P_1 do początku układu współrzędnych
- Taki obrót wokół osi y , żeby odcinek P_1P_2 znalazł się na płaszczyźnie (y, z)
- Taki obrót wokół osi x , żeby odcinek P_1P_2 znalazł się na osi z
- Taki obrót wokół osi z , żeby odcinek P_1P_3 znalazł się na płaszczyźnie (y, z)



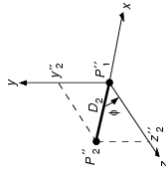
Krok 1: $T(-x_1, -y_1, -z_1)$

Krok 2: $R_y(\theta - 90)$

$$\cos(\theta - 90) = \sin \theta = \frac{z_2'}{D_1} = \frac{z_2 - z_1}{D_1}$$
$$\sin(\theta - 90) = -\cos \theta = -\frac{x_2'}{D_1} = -\frac{x_2 - x_1}{D_1}$$
$$D_1 = \sqrt{(z_2')^2 + (x_2')^2} = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Przykład składania przekształceń 3D (2/2)

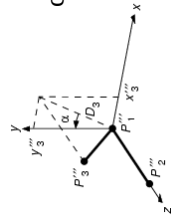
Krok 3: $R_x(\Phi)$



$$\cos \Phi = \frac{z_2'}{D_2}, \quad \sin \Phi = \frac{y_2'}{D_2}$$

$$D_2 = |P_1'' P_2'| = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Krok 4: $R_z(\alpha)$



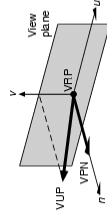
$$\cos \alpha = \frac{y_3''}{D_3}, \quad \sin \alpha = \frac{x_3''}{D_3}, \quad D_3 = \sqrt{x_3''^2 + y_3''^2}$$

Transformacja wynikowa: $R_z(\alpha) \cdot R_x(\Phi) \cdot R_y(\theta - 90) \cdot T(-x_1, -y_1, -z_1)$

Specyfikowanie rzutu 3D (1/2)

Rzutnia jest określona przez:

- punkt odniesienia rzutni (VRP)
- normalną do rzutni (VPN)

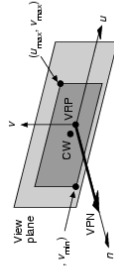


Układ współrzędnych rzutowania (VRC):

- początek układu w punkcie VRP
- oś n to VPN
- wektor VUP określa kierunek osi v
- oś u tworzy wraz z n i v prawoskrętny układ współrzędnych

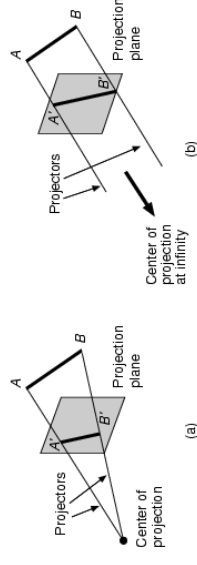
Okno na rzutni:

- środek w punkcie CW
- minimalne i maksymalne współrzędne



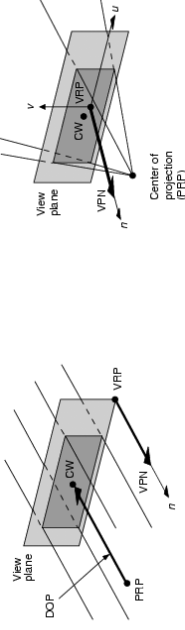
Rzutowanie 3D->2D

- Dwie klasy metod rzutowania:
 - rzuty równoległe (rys. b)
 - zachowują równoległość prostych, stosunek długości odcinków równoległych i związki miarowe figury płaskiej równoległej do płaszczyzny rzutowania
 - rzuty perspektywiczne (środkowe) (rys. a)
 - promienie rzutowania mają wspólny punkt, nazywany środkiem rzutowania; odległość tego punktu od rzutni decyduje o deformacji obrazu

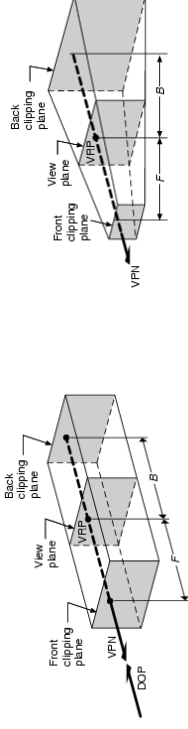


Specyfikowanie rzutu 3D (2/2)

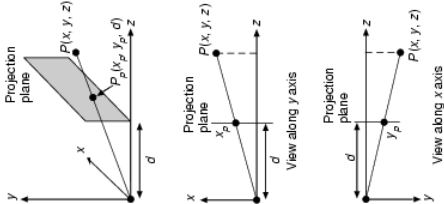
Punkt odniesienia rzutowania PRP i kierunek rzutowania DOP



Bryła widzenia dla rzutu równoległego i perspektywicznego



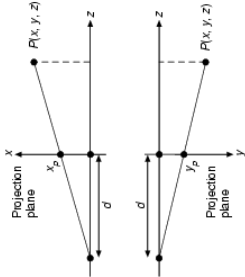
Rzuty perspektywiczne w układzie obserwatora (I)



$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}$$
$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d}$$
$$y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d}$$

Rzutnia prostopadła do osi z w punkcie z=d,
środek rzutowania w punkcie z=0

Płaskie rzuty geometryczne w układzie obserwatora (II)



$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z+d} \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z+d}$$
$$x_p = \frac{d \cdot x}{z+d} = \frac{x}{z/d+1}$$
$$y_p = \frac{d \cdot y}{z+d} = \frac{y}{z/d+1}$$

Rzutnia znajduje się w punkcie z=0, a środek rzutowania w punkcie z=-d

Rzuty perspektywiczne w układzie obserwatora (I)

Reprezentacja macierzowa rzutu perspektywicznego:

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = M_{per} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

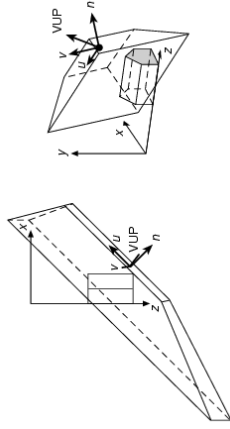
Rzuty perspektywiczne w układzie obserwatora (II)

Reprezentacja macierzowa rzutu perspektywicznego:

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix}$$

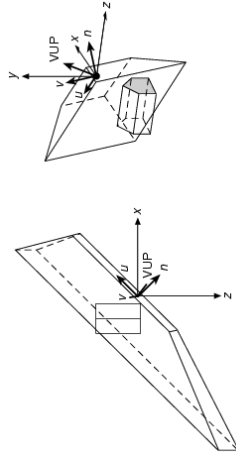
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = M_{per} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rzuty perspektywiczne w układzie współrzędnych świata (1/6)



Rzuty perspektywiczne w układzie współrzędnych świata (2/6)

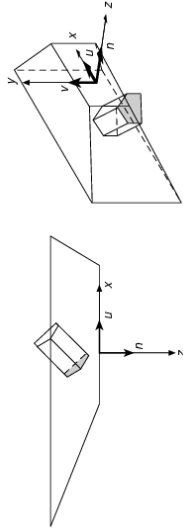
Krok 1: przesunięcie punktu VRP do początku układu współrzędnych



$T(-VRP)$

Rzuty perspektywiczne w układzie współrzędnych świata (3/6)

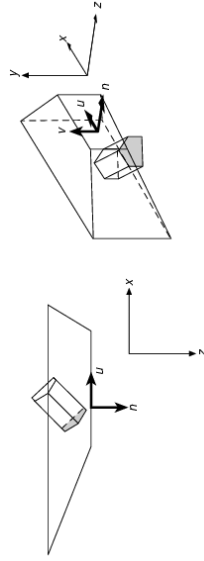
Krok 2: Taki obrót układu VRC, żeby oś n (VPN) pokryła się z osią z , oś u pokryła się z osią x i oś v pokryła się z osią y



Złożenie obrotów (obróć wokół dowolnej osi)

Rzuty perspektywiczne w układzie współrzędnych świata (4/6)

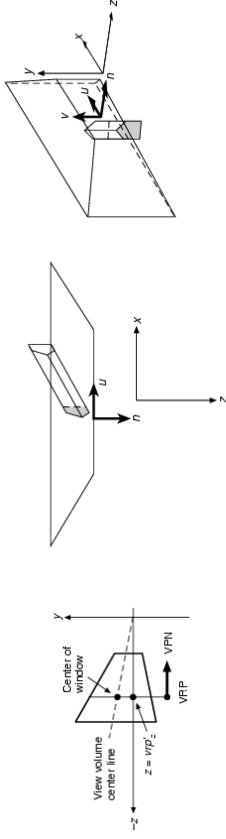
Krok 3: Takie przesunięcie, żeby środek rzutowania (COP), określony przez punkt PRP, stał się początkiem układu współrzędnych



$T(-PRP)$

Rzuty perspektywiczne w układzie współrzędnych świata (5/6)

Krok 4: Takie pochylenie, żeby środkowa linia bryły widzenia pokryła się z osią z



$$SH_{per} = SH_{xy}(shx_{per}, shy_{per})$$

$$shx_{per} = dop_x / dop_z, shy_{per} = dop_y / dop_z, DOP = CW - PRP$$

Obcinanie 3D przez kanoniczną bryłę widzenia (alg. Cohena-Sutherlanda)

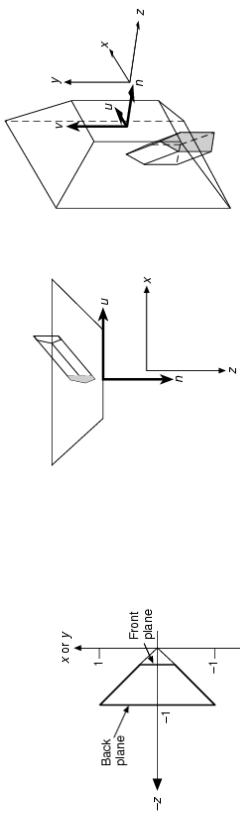
Algorytm podobny do stosowanego podczas obcinania 2D.

Punkty końcowe odcinka otrzymują sześciobitowe kody; bit przyjmuje wartość 1, gdy spełniony jest odpowiedni warunek:

- bit 1 – $y > z$
- bit 2 – $y < z$
- bit 3 – $x > -z$
- bit 4 – $x < z$
- bit 5 – $z < -1$
- bit 6 – $z > z_{min}$

Rzuty perspektywiczne w układzie współrzędnych świata (6/6)

Krok 5: Takie skalowanie, żeby bryła widzenia stała się kanoniczną bryłą widzenia dla rzutu perspektywicznego – prawidłowym ostrosłupem ściętym, określonym przez sześć płaszczyzn



$$x = z_i, x = -z_i, y = z_i, y = -z_i, z = -z_{min}, z = -1$$

Implementacja rzutowania 3D

1. Przygotowanie wejściowych obiektów we współrzędnych świata 3D
2. Transformacja punktów do kanonicznej bryły widzenia
3. Obcięcie przez kanoniczną bryłę widzenia
4. Rzutowanie na rzutnię
5. Przekształcenie na pole wizualizacji we współrzędnych ekranowych