



Evolutionary algorithms for solving single and multiple-objective political redistricting problems: the case study of Poland

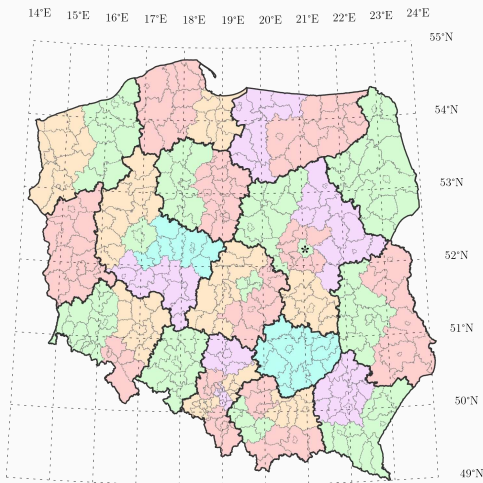
Michał Tomczyk, Miłosz Kadziński

Institute of Computing Science
Poznan University of Technology, Poland

www.cs.put.poznan.pl/mtomczyk/

Problem podziału na okręgi wyborcze

- **Problem:** podział na okręgi wyborcze
- Praca dotyczy wyborów do **Sejmu Rzeczypospolitej Polskiej**.
- Problem polega na wyznaczeniu granic okręgów wyborczych tak, by tak utworzony system spełniał pewne założone kryteria.
- Nie istnieje jeden uniwersalny zestaw kryteriów determinujący najlepszy możliwy do uzyskania podział.
- Obszar państwa jest dzielony na okręgi po to, aby zagwarantować, że reprezentanci z różnych obszarów Polski będą mogli zasiąść w sejmie.



Rozważone w pracy kryteria optymalizacji

1. Równość populacji w okręgach
2. Kompaktowość granic okręgów wyborczych
3. (Nie)podobieństwo z obecnym podziałem
4. Potencjalna liczba mandatów do uzyskania przez wybraną partię

+ cele/ograniczenia unikatowe dla danego kraju/systemu wyborczego

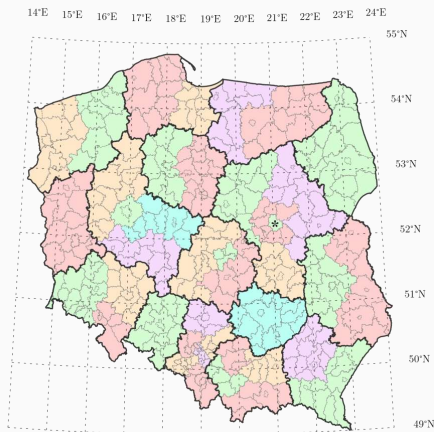
Obliczanie liczby mandatów

1. Jest 460 mandatów (miejsz w sejmie)
2. Jest 41 okręgów wyborczych
3. Liczba mandatów do uzyskania w każdym okręgu jest proporcjonalna do:

populacja okręgu / populacja Polski

4. W danym okręgu posłowie są wybierani według **metody D'Hondta** (co przekłada się na liczbę mandatów uzyskanych w okręgu). **Przykład:** jest 5 mandatów w okręgu; 3 partie X, Y, Z uzyskały następujące liczby głosów: 10, 6, 1.

Dzielnik	X	Y	Z
1	10	6	1
2	5	3	0.5
3	3.33	2	0.33





W większości istniejących prac problem jest zdefiniowany jako **jednokryteriowy** (np. minimalizacja odchylenia populacji w okręgach od wartości oczekiwanej), a ewentualne dodatkowe **cele** są traktowane jako **ograniczenia** (np. rozwiązanie musi spełniać pewne warunki odnośnie kompaktowości okręgów).

Dlaczego warto jednak traktować tego typu ograniczenia jako funkcje celu, tym samym redefiniując problem jako **wielokryteriowy**? Ponieważ wynik optymalizacji wielokryteriowej ma **znacznie większą wartość analityczną (szersza perspektywa)**.

$$\max \sum_{i=1}^n v_i x_i,$$

$$p.o. \sum_{i=1}^n s_i x_i \leq K,$$

$$x_i \in \{0,1\} \text{ dla } i = 1, \dots, 15$$

Optimum: $\mathbf{x} = [0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1]$

Poprawa jakości kształcenia: 33%

Całkowity koszt realizacji: 10

Budżet uczelni (albo limit na wydatki)
 $K = 10$

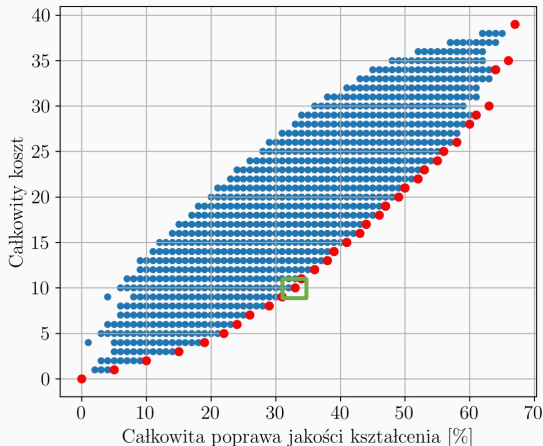
Projekt	Poprawa jakości kształcenia v_i [%]	Koszt realizacji s_i
1	5	3
2	3	5
3	10	2
4	6	4
5	4	1
6	5	3
7	2	1
8	1	4
9	6	4
10	3	1
11	7	3
12	5	4
13	2	1
14	3	2
15	5	1

Optymalizacja wielokryterkowa

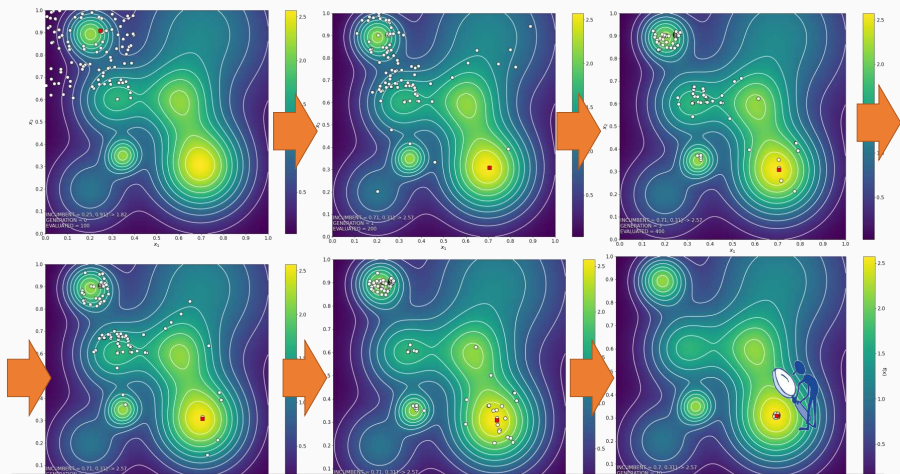
$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^n v_i x_i, \\ \min \sum_{i=1}^n s_i x_i, \\ x_i \in \{0,1\} \text{ dla } i = 1, \dots, 15 \end{aligned}$$

Celem realizacji zadania optymalizacji wielokryterowej jest przybliżenie frontu Pareta.

Dominującym nurtem w literaturze w tym kontekście jest wykorzystanie **algorytmów ewolucyjnych**



Algorytmy ewolucyjne: przypadek jednokryterowy



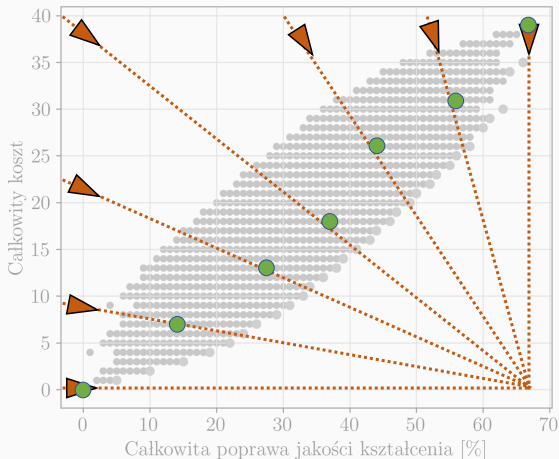
Algorytm Ewolucyjny: metaheurystyka przypominająca w swoim działaniu naturalną ewolucję. Optymalizuje ona jednocześnie **populację rozwiązań**, a każda iteracja (generacja) składa się takich procesów jak ocena przystosowania, dobór naturalny, czy reprodukcja (krzyżowanie + mutacja).

Algorytmy ewolucyjne: przypadek wielokryteriowy

MOEA/D: model algorytmu ewolucyjnego do rozwiązywania problemów wielokryteriowych.

Główna idea: dekompozycja problemu na wiele skalarnych funkcji celu ukierunkowujących proces ewolucji

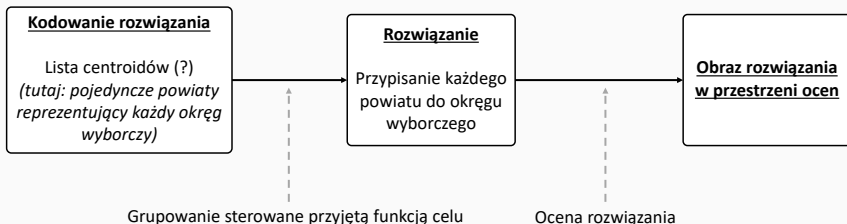
Przewaga nad algorytmami klasycznymi (np. metodą sumy ważonej): optymalizacja celów przebiega współbieżnie.



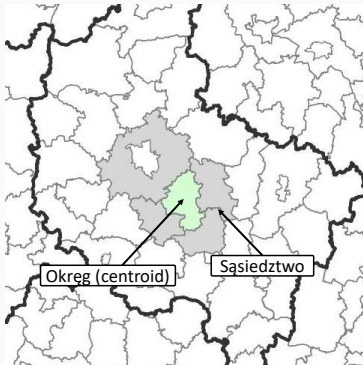
Reprezentacja oraz ewaluacja rozwiązań



W jaki sposób ewoluowane są potencjalne plany podziału Polski na okręgi wyborcze?



Reprezentacja oraz ewaluacja rozwiązań



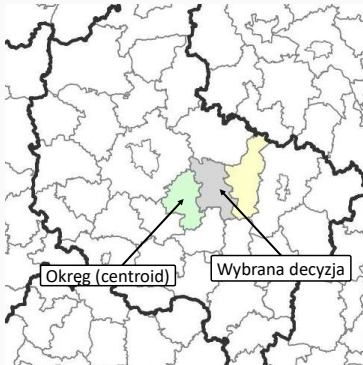
Grupowanie:

1. Utworzenie grup w oparciu o początkowe centroidy.
2. Iteracyjne powiększanie istniejących grup o ich sąsiednie, nieprzydzielone jeszcze powiaty. Proces jest sterowany heurystyką starającą się optymalizować przyjęte kryteria.

Proces jest efektywny obliczeniowo: został zaimplementowany w taki sposób, żeby zredukować liczbę potencjalnie duplikujących się operacji:

Na początku (wariant jednokryteriowy): dla każdego okręgu analizowane jest jego sąsiedztwo i szacowana użyteczność każdego sąsiada wg przyjętej heurystyki. Posortowane sąsiedztwo jest przechowywane w binarnym drzewie poszukiwań. Całokształt tych drzew (dla każdego okręgu) stanowi las decyzji.

Reprezentacja oraz ewaluacja rozwiązań



W każdej iteracji: wybierana jest z lasu najlepsza decyzja (okrąg + sąsiad do przydzielenia). Wyboru dokonuje dedykowana heurystyka.

Las nie jest tworzony na nowo, a odpowiednio modyfikowany w oparciu o powiaty sąsiadujące z właśnie dodawanym (możliwe są różne dalsze scenariusze).

W wariancie wielokryteriowym:

- Proces grupowania sterowany jest skalarną funkcją celu dostarczoną przez algorytm ewolucyjny.
- Decyzje nie mogą być jednoznacznie posortowane, ponieważ ich użyteczność jest oceniana z punktu widzenia kilku kryteriów. Z tego powodu zamiast drzew, stosowana jest struktura danych efektywnie przechowywująca i identyfikująca **niezdominowane decyzje**.

Przeprowadzone eksperymenty

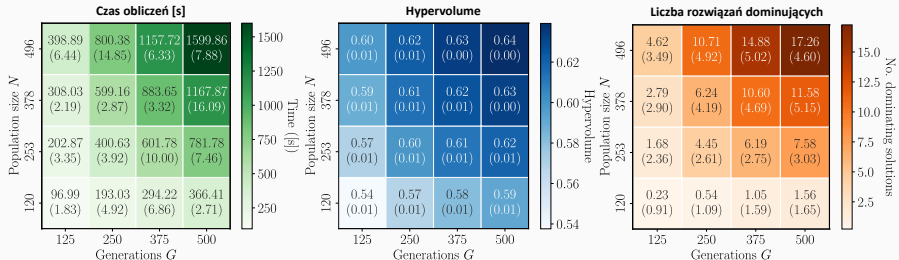
1. Weryfikacja skuteczności algorytmu w wariancie jednokryteriowym
2. Weryfikacja skuteczności algorytmu w wariancie wielokryteriowym
 - a. Eksperymenty uwzględniające apolityczne kryteria:
(równość populacji, kompaktowość dystryktów, niepodobieństwo z obowiązującym podziałem)
 - b. Eksperymenty uwzględniające polityczne kryterium:
(j.w. plus maksymalizacja liczby uzyskanych mandatów)
 - i. Analiza dla liczby okręgów równej 41 (obecna liczba okręgów)
 - ii. Analiza liczby możliwych do uzyskania głosów w przypadku wzrostu liczby okręgów



Eksperymenty uwzględniające tylko apolityczne kryteria

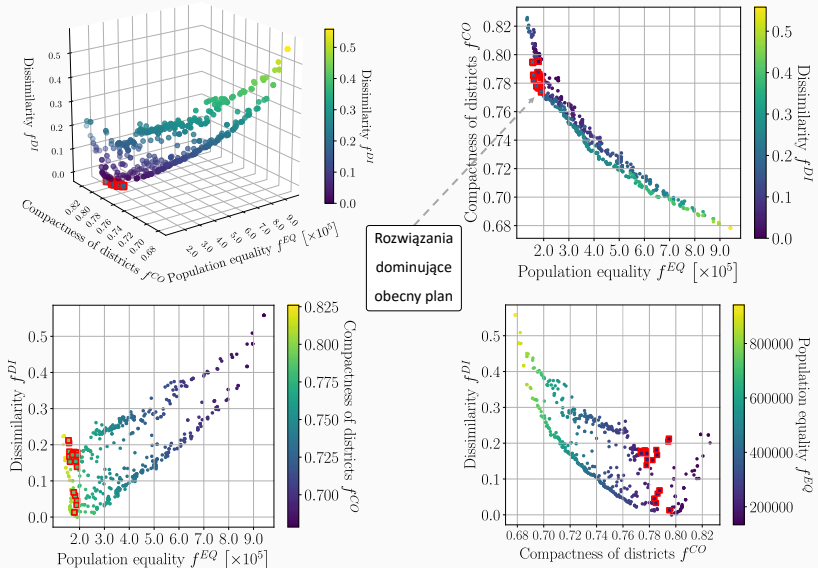
Analiza czułości

- Została przeprowadzona ekstensywna analiza czułości algorytmu na zmiany rozmiaru populacji i liczby generacji (16 kombinacji, wyniki są uśrednione po 100 uruchomieniach metody)
- Wykorzystane miary: Czas obliczeń; hypervolume; liczba rozwiązań w populacji, które dominują obecne rozwiązanie pod względem równości populacji i kompaktowości dystryktów



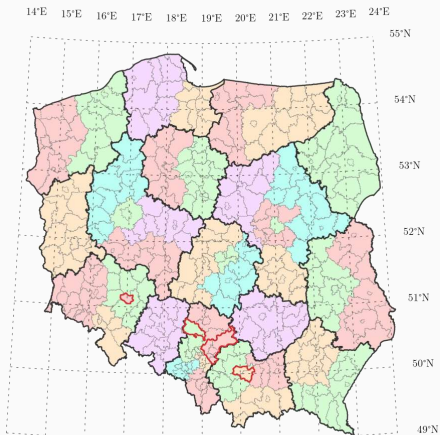
Eksperymenty uwzględniające tylko apolityczne kryteria

Wizualizacja skonstruowanych przez algorytm populacji rozwiązań

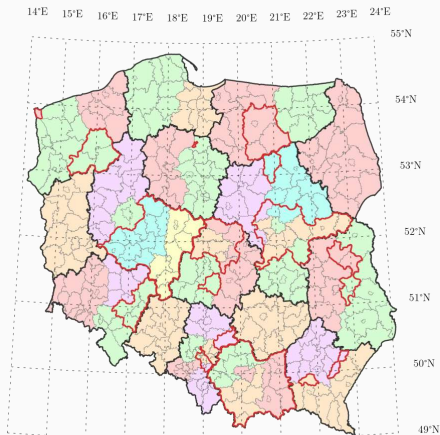


Ekspertyzmy uwzględniające tylko apolityczne kryteria

Przykładowe rozwiązania skonstruowane przez algorytm



Niepodobieństwo:	1%
Poprawa kryterium „równość populacji”:	5.9%
Poprawa kryterium „kompaktość”:	1.3%

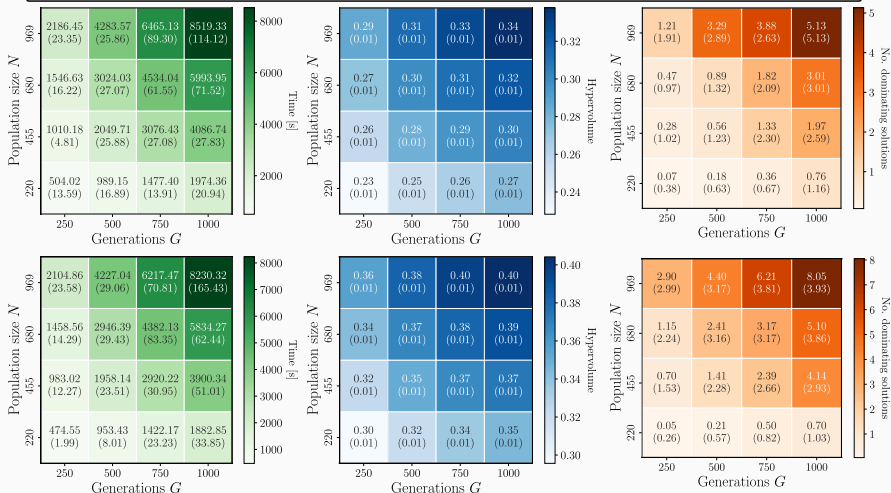


Niepodobieństwo:	18%
Poprawa kryterium „równość populacji”:	7.4%
Poprawa kryterium „kompaktość”:	2.5%

Eksperymenty uwzględniające polityczne kryterium

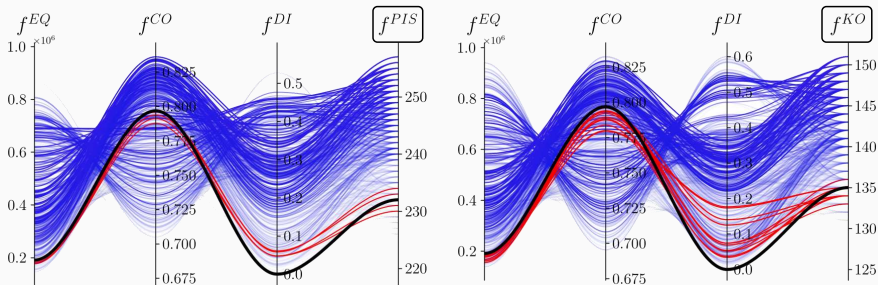
Analiza czułości

Zostały rozważone 2 scenariusze w kontekście dodatkowego, tj. czwartego kryterium optymalizacji: maksymalizacja mandatów uzyskanych przez PIS, bądź KO.



Eksperymenty uwzględniające polityczne kryterium

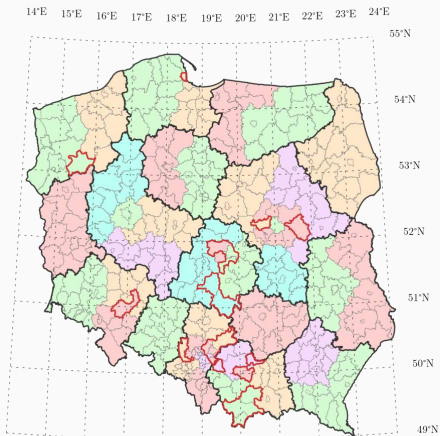
Wizualizacja skonstruowanych przez algorytm populacji rozwiązań



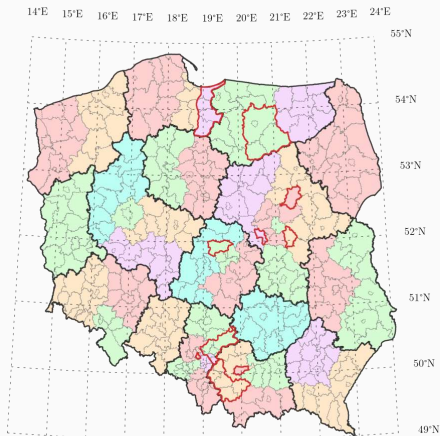
- Przykładowe finalne populacje wygenerowane dla dwóch rozważonych scenariuszy.
- Da się zaobserwować, że im więcej oczekiwanych mandatów partia chce uzyskać, tym większe zmiany w obecnym podziale są wymagane.
- Czarna linia: wartości funkcji celu dla obecnego rozwiązania.
- Czerwone linie: rozwiązania dominujące obecne pod względem „równości populacji” i „kompaktowości”.
- **Obserwacja:** istniejące takie dominujące rozwiązania, które **dodatkowo** także poprawiają możliwą do uzyskania liczbę mandatów (rozwiązania reprezentujące **niebezpieczne manipulacje**).

Eksperymenty uwzględniające polityczne kryterium

Przykładowe rozwiązania skonstruowane przez algorytm



Niepodobieństwo:	1%
Poprawa kryterium „równość populacji”:	1.7%
Poprawa kryterium „kompaktowość”:	1.3%
Dodatkowa liczba mandatów dla PIS	2



Niepodobieństwo:	1%
Poprawa kryterium „równość populacji”:	5.5%
Poprawa kryterium „kompaktowość”:	1.3%
Dodatkowa liczba mandatów dla KO	1

Eksperymenty uwzględniające polityczne kryterium

Wzrost liczby konstruowanych okręgów

Motywacja: Metoda D'Hondta silnie faworyzuje te partie mające wysoką przewagę nad innymi. Siła faworyzowania takich partii powinna wzrastać wraz z wzrostem liczby okręgów wyborczy.

Eksperymenty: rozważono następujące liczby okręgów do uzyskania: 41 (obecna liczba), 60, 80, 100.

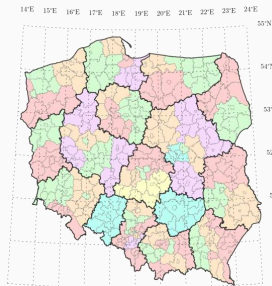
Proste podsumowanie: średnia i odchylenie standardowe średniej liczby mandatów uzyskiwanych przez rozwiązania w finalnych populacjach (dwa osobne scenariusze):

Liczba okręgów	PIS	KO
41	238.67 ± 0.24	138.83 ± 0.17
60	254.47 ± 0.26	144.89 ± 0.22
80	267.15 ± 0.28	147.79 ± 0.24
100	280.06 ± 0.34	151.06 ± 0.28

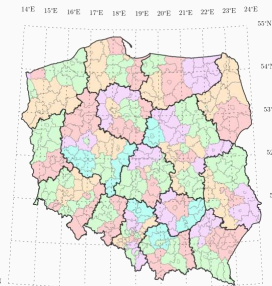
Ekspertyzenty uwzględniające polityczne kryterium

Wzrost liczby konstruowanych okręgów: przykładowe rozwiązania

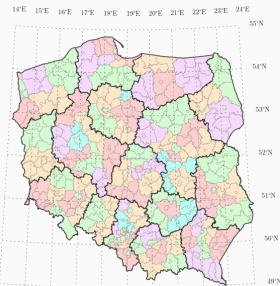
Przypadek dla PIS



Liczba okręgów:	60
Liczba mandatów (PIS)	251



Liczba okręgów:	80
Liczba mandatów (PIS)	261

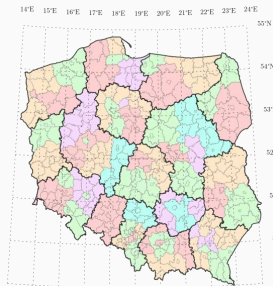


Liczba okręgów:	100
Liczba mandatów (PIS)	272

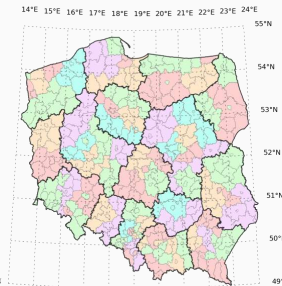
Eksperymenty uwzględniające polityczne kryterium

Wzrost liczby konstruowanych okręgów: przykładowe rozwiązania

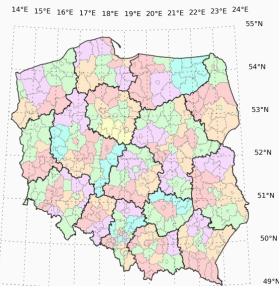
Przypadek dla KO



Liczba okręgów:	60
Liczba mandatów (KO)	139



Liczba okręgów:	80
Liczba mandatów (KO)	141



Liczba okręgów:	100
Liczba mandatów (KO)	143

- Przedstawienie nowatorskiego algorytmu ewolucyjnego do rozwiązywania wielokryterialnego problemu podziału kraju na okręgi wyborcze (w tym nurcie do tej pory istniały tylko 4 (!) prace)
- Algorytm implementuje nowoczesny model algorytmu ewolucyjnego (*istniejące prace oparte są o dużo starszy, mniej efektywny model*)
- W pracy rozważono równoczesną optymalizację do 4 funkcji celu (*najczęściej rozważana jest tylko równość populacji i kompaktowość kryteriów*) + w tym maksymalizacja liczby mandatów była celem nietrywialnym do zaimplementowania.
- Algorytm wykazuje się bardzo dobrą złożonością czasową.
- Algorytm jest w stanie konstruować dobrej jakości przybliżenia frontu Pareta, których rozwiązania mogą być znaczące dla decydenta.
- Dokonano analizy dotyczącej potencjalnych możliwych dróg do przeprowadzenia manipulacji wyborczych. Pokazano między innymi, że partia uzyskująca stosunkowo dużo głosów może uzyskać znacznie więcej mandatów w wyborach, gdy zostanie zwiększona liczba okręgów wyborczych.

Podsumowanie

Dalsze plany rozwoju

- **Dalsze skrócenie czasu wykonywania algorytmu:**
 - na etapie wykonywania procedury grupowania,
 - na etapie konstrukcji rozwiązań potomnych,
 - Poprzez zrównoleglenie (!).
- Wykorzystanie **prognoz** odnośnie **poparcia** w przyszłości zamiast danych przeszłych.
- Zastosowanie algorytmu i porównanie wyników w przypadku zastosowania **innej metody niż D'Hondta**.
- Przystosowanie algorytmu do rozwiązywania rozważanego problemu w **kontekście innych państw**.
- Wykonanie **analizy istotności powiatów** w kontekście budowy dobrych rozwiązań.
- Dalsza poprawa **efektywności** zastosowanego modelu **algorytmu ewolucyjnego**.
- Uwzględnienie jednoczesnej maksymalizacji liczby głosów **kilku partii** (osobne funkcje celu).

