

Wspomaganie decyzji

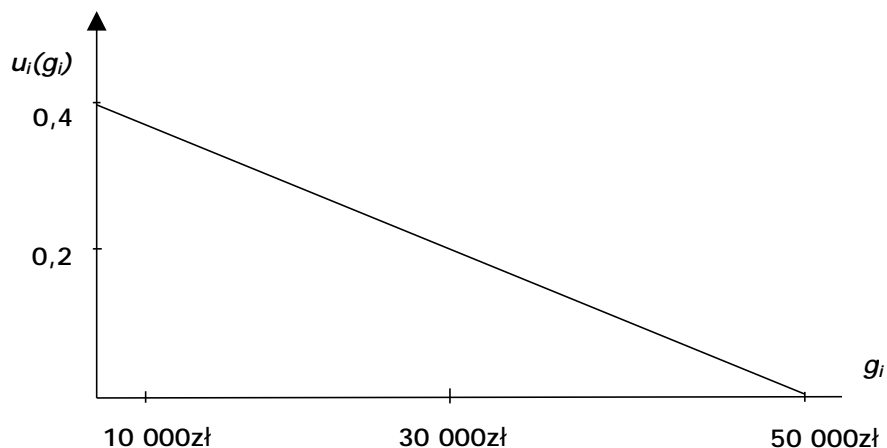
UTA - Funkcja użyteczności

Pojęcie funkcji użyteczności wprowadza się, aby ustalić ogólną jakość wariantu. Funkcja dokonuje agregacji wszystkich kryteriów do jednej wartości. Pozwala to na uszeregowanie wariantów w ranking, czyli porządkowanie. Wariant x o lepszej wartości użyteczności jest preferowany nad wariant y o wartości gorszej (zapisujemy to jako xPy). Warianty o tych samych wartościach użyteczności są nierozróżnialne (czyli xIy). Generalnie powinno zachodzić: im większa użyteczność (wartość funkcji użyteczności) danego wariantu, tym ten wariant lepszy (bardziej preferowany przez decydenta).

Prostą formą funkcji użyteczności jest suma, czyli tzw. postać addytywna. Wprowadźmy oznaczenia $g_1(x)$ – wartość wariantu na pierwszym kryterium (np. szybkość czy cena danego samochodu), $g_2(x)$ – na drugim kryterium, itp. Wartość użyteczności (którą będziemy nazywali później użytecznością globalną lub całkowitą) oznaczmy przez $U(x)$, nie może być ona po prostu sumą wartości na kryteriach, gdyż mogą być one w różny sposób skalowane, np. prędkość maksymalna samochodu przyjmuje wartości rzędu 200 (km/h), podczas gdy cena – rzędu 50 tysięcy (zł)! Do tego im mniejsza cena, tym lepiej (kryterium koszt), stąd cena nie może dodawać się do użyteczności (raczej powinna się odejmować w tym sensie, że im większa cena, tym niższa użyteczność wariantu).

Stąd na każdym kryterium należy zdefiniować preferencje decydenta dotyczącą tylko tego kryterium. Taką funkcję preferencji nazywamy **częstkową funkcją użyteczności** i będziemy oznaczali $u_i(g_i)$.

Przykład: Funkcja częstkowa dla ceny mogłaby schematycznie wyglądać w następujący sposób:



Widać, że przy niskich cenach wartość funkcji (a zarazem preferencja decydenta) jest duża (wolimy niskie ceny) i spada ze wzrastającą ceną. Wartość funkcji waha się w przedziale 0 – 0,4. Jest to użyteczność częstkowa, ponieważ określa ona preferencje tylko w zależności od jednego kryterium. Dopiero złożenie wszystkich wartości użyteczności częstkowych da użyteczność globalną, czyli ogólną jakość wariantu.

Teraz można już porównywać warianty, gdyż z każdym kryterium stowarzyszona jest funkcja częstkowa, ma wartości w podobnym przedziale i zawsze zachodzi, że im większa

wartość użyteczności – tym lepiej (bo oznacza to preferencję), nawet przy kryterium typu koszt (*strata*). Globalna funkcja użyteczności $U(x)$ wyraża się wtedy wzorem:

$$U(x) = \sum_{i=1}^m u_i(g_i(x))$$

gdzie m to liczba kryteriów. Tym samym bierzemy dany wariant x , który ma wartości $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ na kryteriach (ogólnie piszemy $g_i(x)$ na i -tym kryterium), wyznaczamy wartości funkcji użyteczności cząstkowej $u_1(g_1(x)), u_2(g_2(x)), \dots, u_m(g_m(x))$ i je sumujemy, a wtedy dostaniemy użyteczność globalną. Zakładamy, że maksymalną wartością globalnej użyteczności jest 1 i pojawi się dla wariantu, który miałby możliwie najlepsze wartości na wszystkich kryteriach (taki idealny wariant), a minimalną 0 (przy najgorszych możliwych wartościach).

Pytanie: czy brak wag przed kryteriami oznacza, że każde kryterium jest tak samo ważne?

Założenia metody UTA

W metodzie UTA (*Utility Additive*) tworzymy funkcje cząstkowe użyteczności, a na ich podstawie globalną funkcję użyteczności. Skąd bierzemy informację o preferencjach decydenta? Nie każemy mu samemu tych funkcji wyznaczyć, gdyż jest to trudne i mało czytelne i zapewne mało kto potrafiłby w tym momencie taką funkcję samemu ułożyć. Zamiast tego każemy mu wybrać podzbiór wariantów (tzw. **zbiór referencyjny**), które dobrze zna i których jest pewien, a następnie uszeregować je w ranking od najlepszego do najgorszego.

Przykład: Decydent chce dokonać wyboru samochodu podstawowej klasy. Spośród wszystkich możliwych samochodów wybiera pięć, do których preferencji jest pewien: Renault Clio, Volkswagen Polo, Opel Corsa, Fiat Punto i Toyota Corolla. Następnie ustawia je w ranking: najchętniej wybrałby Toyotę, następnie Corsę, potem Clio, później Volkswagena, a zdecydowanie nie chciałby kupić Fiata Punto, więc stawia go bez wahania na ostatniej pozycji :) Oczywiście, inne samochody też wchodzi w rachubę, powyższy zbiór jest tylko zbiorem referencyjnym. Gdy na jego podstawie zostaną określone funkcje użyteczności, może okazać się, że jakiś inny samochód byłby jeszcze lepszy od Toyoty.

Uwaga: Warianty mogą być *ex-aequo* postawione na tej samej pozycji! Tym samym w rankingu można użyć relacji preferencji (jeden wariant jest wyżej w rankingu od drugiego) lub nierozróżnialności (dwa warianty na tej samej pozycji).

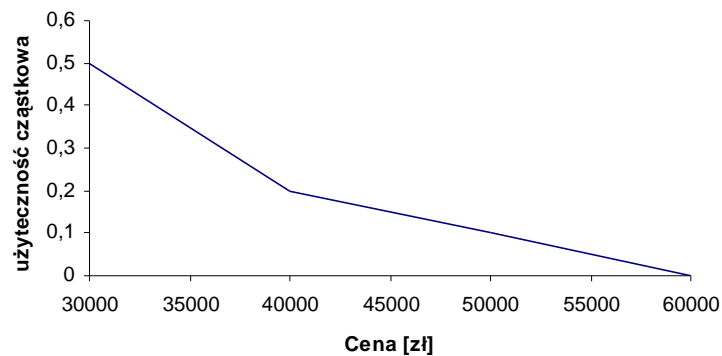
Następnie na podstawie powyższego rankingu, biorąc pod uwagę mocne i słabe strony wybranych wariantów tworzone są cząstkowe funkcje użyteczności. Używa się do tego metody programowania liniowego, która zostanie przy odrobinie szczęścia przedstawiona na wykładzie. Tworzy się problem programowania liniowego i dopasowuje się odpowiednie współczynniki liniowe funkcji tak, aby wybrany przez decydenta ranking można było odtworzyć za pomocą funkcji. Innymi słowy funkcje tworzone są w taki sposób, aby kolejność wśród wariantów ze zbioru referencyjnego nie zmieniała się, tzn. aby pierwszy wariant otrzymał największą użyteczność spośród wybranych wcześniej, itp.

Przykład: Na podstawie metody simpleks programowania liniowego wygenerowane zostały funkcje użyteczności cząstkowe. Przyjmijmy dla prostoty tylko dwa kryteria - cena oraz moc silnika (bardzo upraszcza to problem, ale pamiętajmy, że to dydaktyka!):

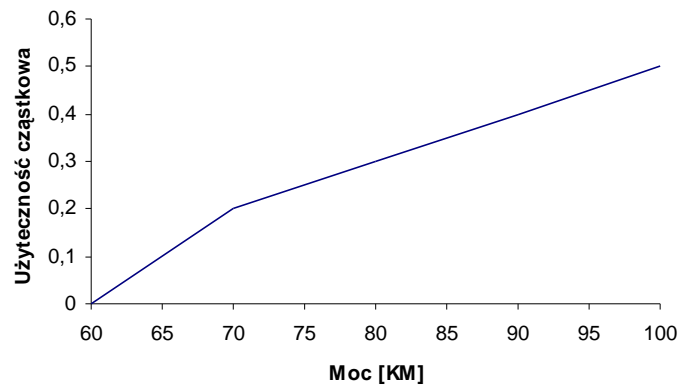
Samochód	Cena (zł)	Moc (KM)
Renault Clio	44 500	70
Volkswagen Polo	50 900	75
Opel Corsa	41 100	80
Fiat Punto	37 000	60
Toyota Corolla	56 000	97

Wygenerowane zostały następujące funkcje użyteczności na podstawie rankingu:

Cena



Moc silnika



Na ich podstawie możemy wyznaczyć wartości użyteczności cząstkowych i użyteczności globalnej:

Samochód	Wartość		Użyteczność globalna
	Ceny - $u_1(g_1)$	Mocy - $u_2(g_2)$	
Renault Clio	0,155	0,2	0,355
Volkswagen Polo	0,091	0,25	0,341
Opel Corsa	0,189	0,3	0,489
Fiat Punto	0,29	0	0,29
Toyota Corolla	0,04	0,47	0,51

Widać, że został odtworzony ranking na podstawie użyteczności globalnej.

Uwaga: Przekonaj się czy potrafisz odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Mając funkcje użyteczności i warianty x oraz y z brakującymi wartościami na danych kryteriach uzupełnij tak wartości, aby wariant x był preferowany nad y

Przykład: wybierzmy dwa inne samochody: Toyotę Yaris (cena 40 000, nieznaną ilość KM) oraz Peugeota 206 (cena 38 000, 60 KM). Mając dane powyższe funkcje (te z poprzedniego przykładu) użyteczności, powiedz, ile KM powinna mieć co najwyżej Toyota, aby była gorsza (miała mniejszą użyteczność globalną) od Peugeota?

Odpowiedź: Peugeot ma 0,26 użyteczności na cenie i 0 na mocy silnika, razem 0,26 (globalna użyteczność), Toyota ma 0,2 na cenie, stąd aby była gorsza od Peugeota (miała mniejszą globalną użyteczność), musiałaby mieć mniej niż 0,06 użyteczności cząstkowej na mocy silnika, czyli mniej niż 63 KM.

2. Mając dane warianty wraz z wartościami na kryteriach oraz funkcje użyteczności (cząstkowe) narysuj tak brakującą funkcję użyteczności cząstkowej, aby warianty były (np.) identyczne?

Przykład: Niech Yaris z poprzedniego przykładu ma 70KM. Narysuj tak funkcję użyteczności dla ceny, aby był preferowany nad Peugeota. Funkcja użyteczności dla mocy jest dana (taka, jak w poprzednim przykładzie).

Odpowiedź: W tym wypadku można przyjąć dla ceny również funkcję z poprzedniego przykładu, ale nie jest to oczywiście jedyna – można naszkicować każdą inną, byle się zgadzała użyteczność globalna (dla Yaris musi być wyższa)

Mając funkcje cząstkowe możemy za ich pomocą ocenić wszystkie warianty, nie tylko zbiór referencyjny! Pozwala to na wybór najlepszego wariantu z całego zbioru, a najlepszym może okazać się wariant leżący poza zbiorem referencyjnym! (np. Ford Focus)

Parametry i współczynniki

Garść parametrów technicznych i uwag:

- funkcje cząstkowe nie muszą być liniowe, zakłada się, że są odcinkami liniowe przy czym liczba „złamań” jest parametrem, jaki należy podać. Oczywiście, im bardziej połamana funkcja tym lepiej da się dopasować do danych, ale zarazem tym bardziej skomplikowana,
- wartości funkcji cząstkowych dla najgorszej możliwej wartości na danym kryterium powinny wynosić zero, $u_i|_{g_i^*(x)} = 0$

- suma wartości wszystkich funkcji cząstkowych dla najlepszych możliwych wartości na danych kryteriach (czyli użyteczność globalna wariantu „idealnego” składającego się z samych najlepszych wartości na wszystkich kryteriach) musi być równa 1, $\sum_{i=1}^k u_i [g_i^*(x)] = 1$
- funkcje użyteczności muszą być monotoniczne (tzn. stale rosnące lub malejące).

Nie zawsze da się dokładnie odtworzyć zadeklarowany ranking. Jeśli nie jest to możliwe, należy:

- zmienić zbiór referencyjny, lub
- zwiększyć liczbę „złamań” funkcji cząstkowych (funkcja składa się z większej ilości odcinków)

Miarą zgodności rankingu z funkcjami (czyli poprawności opisu za pomocą funkcji lub jeszcze inaczej: zgodności funkcji użyteczności z preferencjami decydenta) jest tzw. **współczynnik Kendalla**. Jego wartość waha się w przedziale od -1 do 1, przy czym 1 oznacza pełną zgodność, a -1 – kompletny brak zgodności! Jak się go oblicza? Porównuje się dwa porządki (każdy wariant z każdym) – jeden określony przez decydenta, drugi – uzyskany za pomocą funkcji użyteczności. Każda para wariantów różni się w obu porządkach zmniejsza współczynnik Kendalla (maksymalnie wynosi on 1, może spaść do -1).

Jeśli współczynnik Kendalla nie jest równy 1, oznacza to, że nie udało się dokładnie opisać zbioru za pomocą funkcji. Trzeba zmienić zbiór referencyjny, lub przyjąć więcej punktów złamań dla funkcji.