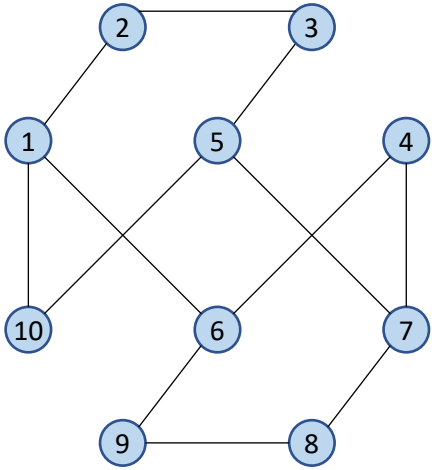
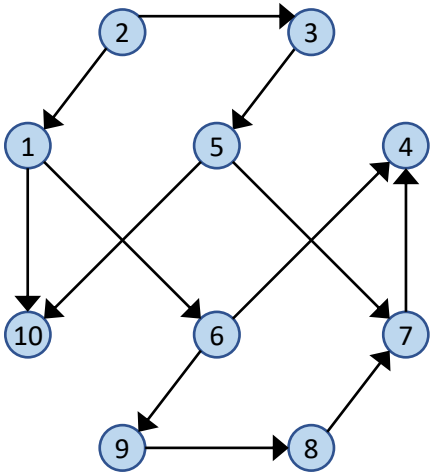
Graf i digraf

Graf $G=(V,E)$ to struktura, która składa się ze zbioru wierzchołków V oraz zbioru krawędzi E:
$V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$, gdzie $\forall_{i=1..m}\, e_i=(u,v)$: $u,v \in V$

Liczbę n wierzchołków w grafie nazywamy **rzędem grafu** G.
Liczbę m krawędzi w grafie nazywamy **rozmiarem grafu** G.



Graf nieskierowany
(krawędzie nieskierowane)



Digraf = graf skierowany
(łuki = krawędzie skierowane)

Jeśli krawędź wchodzi lub wychodzi z wierzchołka to mówimy, że jest z nim **incydentna**.

Liczba krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v_i w grafie nieskierowanym to **stopień wierzchołka** v_i. W grafie skierowanym każdy wierzchołek ma:

- **stopień wejściowy** (liczba krawędzi wchodzących do tego wierzchołka, ang. in-degree) oraz
- **stopień wyjściowy** (liczba krawędzi wychodzących, ang. out-degree).

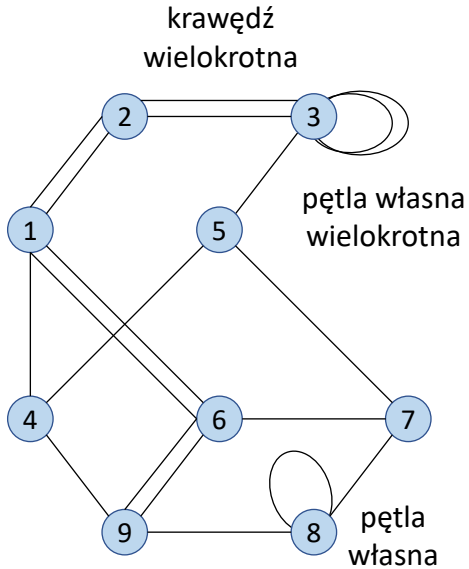
Jeśli krawędź wychodzi i wchodzi do tego samego wierzchołka to nazywamy ją **pętlą własną**.

Multigraf to taki graf, w którym występują pętle i krawędzie wielokrotne. Jeśli dwa wierzchołki *u*, *v* są połączone kilkoma krawędziami to mówimy, że krawędzie te tworzą krawędź wielokrotną.

Graf prosty to graf bez pętli własnych i krawędzi wielokrotnych.

Graf pełny to graf, w którym każda para wierzchołków jest połączona krawędzią. Taki graf ma $m=\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi, gdzie n to liczba wierzchołków grafu.

Graf rzadki to graf, który ma niewiele krawędzi: $m<<n^2$ (m – liczba krawędzi, n – liczba wierzchołków grafu).



Multigraf

Ścieżka, droga i cykl

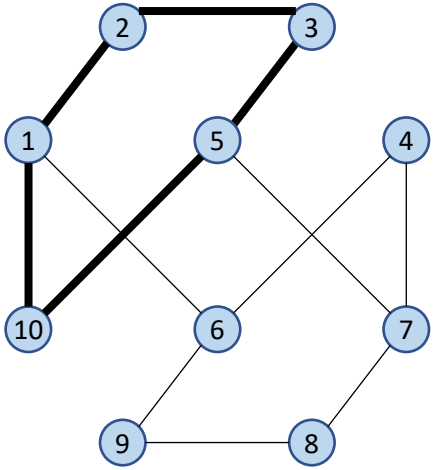
Ścieżka w grafie $G=(V,E)$ to skończony ciąg wierzchołków tego grafu. Ścieżkę w grafie G możemy zapisać tak: $v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_{i+2} \rightarrow \ldots \rightarrow v_{i+k}$, gdzie $\forall_{i \in \{1,..|V|\}} v_i \in V$. **Długość ścieżki** to liczba jej krawędzi.

Ścieżka prosta to ścieżka, w której wierzchołki nie powtarzają się

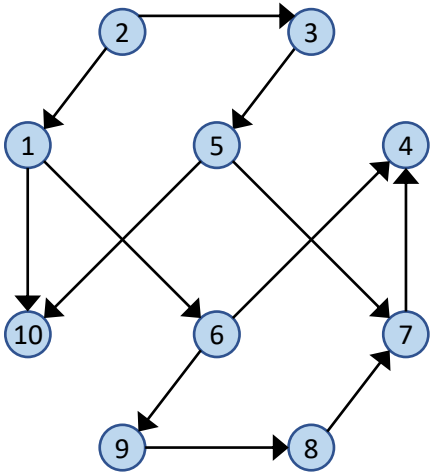
Droga w grafie $G=(V,E)$ to skończony ciąg krawędzi/łuków tego grafu.

Cykl w grafie $G=(V,E)$ to ścieżka zamknięta, tj. ścieżka, w której pierwszy wierzchołek jest jednocześnie ostatnim.

Graf zawierający cykl to **graf cykliczny**. Graf, w którym nie ma cyklu to **graf acykliczny**.



Graf nieskierowany cykliczny



Digraf acykliczny

Graf $G=(V,E)$, gdzie V to lista wierzchołków ($|V|=n$), a E to lista krawędzi/łuków ($|E|=m$) można zapisać maszynowo stosując jedną z reprezentacji:

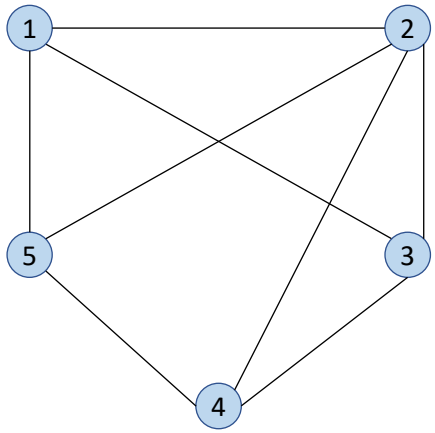
Struktura danych	**Rozmiar***	**Graf nieskierowany**	**Graf skierowany**
Macierz sąsiedztwa	n x n	√	√
Macierz incydencji	n x m	√	√
Lista krawędzi	m	√	√
Lista incydencji/sąsiedztwa	n + m	√	
Lista następników	n + m		√
Lista poprzedników	n + m		√
Macierz grafu	n x (n + 4)		√

* Inaczej można powiedzieć, że jest to złożoność pamięciowa i zapisać w notacji O, np. dla macierzy sąsiedztwa złożoność pamięciowa będzie wynosiła $O(n^2)$.

Macierz sąsiedztwa M dla grafu nieskierowanego $G=(V,E)$

- ma rozmiar $|V|^2$
- numer wiersza macierzy = numer wierzchołka grafu
- numer kolumny macierzy = numer wierzchołka grafu

- M[i,j]=1 iff w grafie G istnieje krawędź (v_i, v_j)
- M[i,j]=0 iff w grafie G nie istnieje krawędź (v_i, v_j)



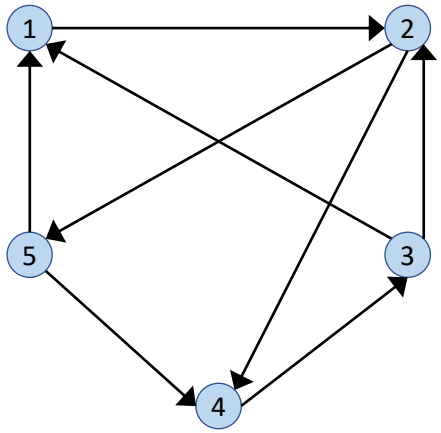
	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Macierz sąsiedztwa dla grafu nieskierowanego jest symetryczna względem głównej przekątnej. Całą informacja o strukturze grafu jest zawarta w połowie macierzy pod (lub nad) przekątną.

Zaleta: bardzo szybka możliwość sprawdzenia czy istnieje krawędź między dwoma wierzchołkami.

Macierz sąsiedztwa M dla grafu skierowanego $G=(V,E)$

- ma rozmiar $|V|^2$
- numer wiersza macierzy = numer wierzchołka grafu
- numer kolumny macierzy = numer wierzchołka grafu



- M[*i*,*j*]=1 iff w grafie *G* istnieje łuk (v_i, v_j)
- M[*i*,*j*]=-1 iff w grafie *G* istnieje łuk (v_j, v_i)
- M[*i*,*j*]=0 iff w grafie *G* nie istnieje łuk między v_i, v_j

	1	2	3	4	5
1	0	1	-1	0	-1
2	-1	0	-1	1	1
3	1	1	0	-1	0
4	0	-1	1	0	-1
5	1	-1	0	1	0

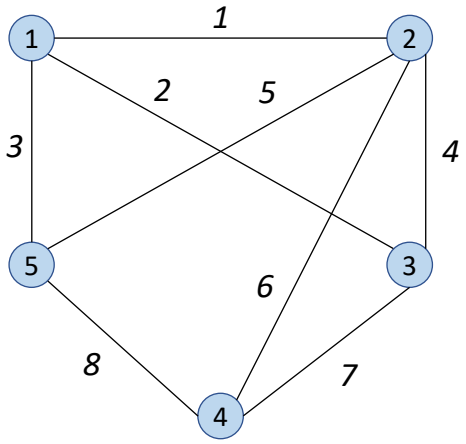
Macierz sąsiedztwa dla grafu skierowanego nie jest symetryczna względem głównej przekątnej ale jej połowa jest wystarczająca do odwzorowania pełnej informacji o grafie.

Macierz incydencji M dla grafu nieskierowanego $G=(V,E)$

- ma rozmiar |V|x|E|
- numer wiersza macierzy = numer wierzchołka grafu
- numer kolumny macierzy = numer\etykieta krawędzi grafu

- M[i,j]=1 iff w grafie G wierzchołek v_i jest incydentny z krawędzią e_j
- M[i,j]=0 iff w grafie G nie ma incydencji między wierzchołkiem v_i i krawędzią e_j

Jest to bardzo nieefektywna reprezentacja. Nie poleca się jej stosowania w praktyce.

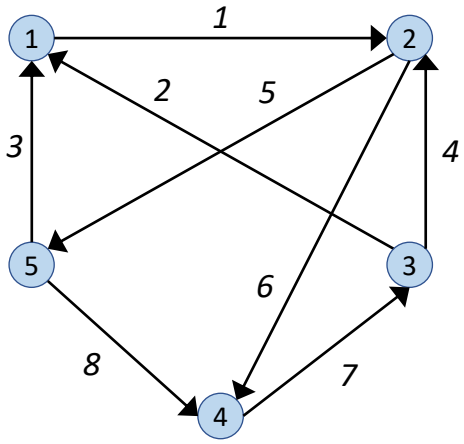


	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	1	0	1	0	0	1

Macierz incydencji M dla grafu skierowanego $G=(V,E)$

- ma rozmiar |V|x|E|
- numer wiersza macierzy = numer wierzchołka grafu
- numer kolumny macierzy = numer\etykieta łuku

- M[i,j]=-1 iff w grafie G łuk e_j wychodzi z wierzchołka v_i
- M[i,j]=1 iff w grafie G łuk e_j wchodzi do wierzchołka v_i
- M[i,j]=2 iff w grafie G łuk e_j jest pętlą własną
- M[i,j]=0 iff w grafie G nie ma incydencji między wierzchołkiem v_i i łukiem e_j



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	-1	-1	0	0
3	0	-1	0	-1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	1	1	-1
5	0	0	-1	0	1	0	0	-1

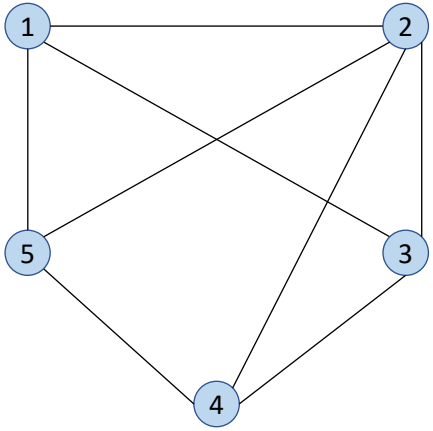
Reprezentacje maszynowe grafu: lista krawędzi

1	2
1	3
1	5
2	1
2	3
2	4
2	5
3	1
3	2
3	4
4	2
4	3
4	5
5	1
5	2
5	4

Lista krawędzi dla grafu nieskierowanego $G=(V,E)$

- ma rozmiar |E|
- ta reprezentacja jest często stosowana dla grafów rzadkich

1	2
1	3
1	5
2	3
2	4
2	5
3	4
4	5



Komentarz:

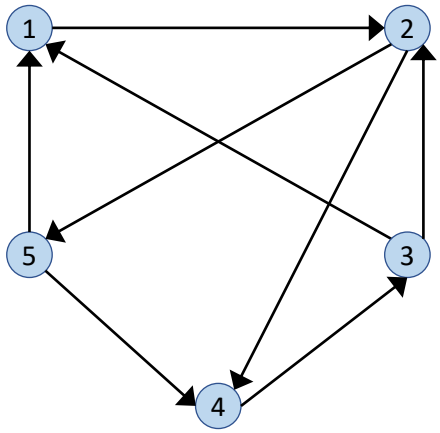
Listę krawędzi dla grafu nieskierowanego możemy stworzyć tak, że dla każdego wierzchołka zapiszemy na tej liście wszystkie incydentne z nim krawędzie. Wtedy lista będzie miała rozmiar 2x|E|, ponieważ każda krawędź wystąpi na liście dwukrotnie.

Nie jest to jednak konieczne (ani optymalne z punktu widzenia pamięci). Dlatego na liście każdą krawędź pojedynczo zachowując regułę, że wpisujemy krawędź (i,j) wtedy, gdy i<j, czyli np. jeśli mamy krawędź między wierzchołkiem 1 i 4, to wpiszemy ją jako (1,4) ale już nie jako (4,1).

Lista krawędzi dla digrafu $G=(V,E)$

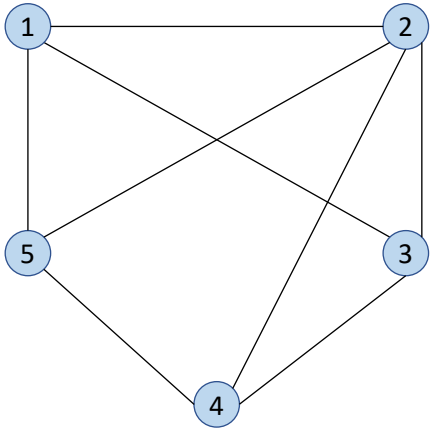
- ma rozmiar |E|
- ta reprezentacja jest często stosowana dla grafów rzadkich

1	2
2	4
2	5
3	1
3	2
4	3
5	1
5	4



Lista incydencji (lista sąsiedztwa) dla grafu nieskierowanego $G=(V,E)$

- ma rozmiar |V|+|E|
- z każdym wierzchołkiem związana jest lista jego sąsiadów (wierzchołków, z którymi jest on połączony krawędzią)



1 → 2 → 3 → 5

2 → 1 → 3 → 4 → 5

3 → 1 → 2 → 4

4 → 2 → 3 → 5

5 → 1 → 2 → 4

Reprezentacje maszynowe grafu: lista następników i lista poprzedników

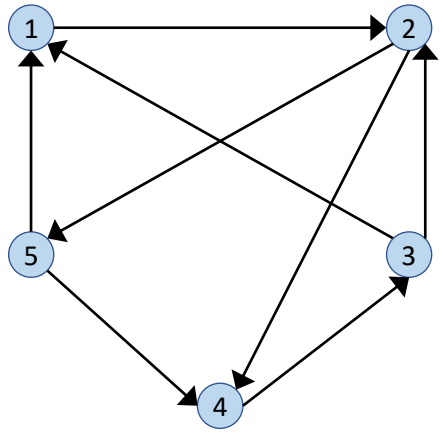
Lista następników dla digrafu $G=(V,E)$

- ma rozmiar |V|+|E|
- każdy wierzchołek jest głową listy zawierającej jego następniki

Lista poprzedników dla digrafu $G=(V,E)$

- ma rozmiar |V|+|E|
- każdy wierzchołek jest głową listy zawierającej jego poprzedniki

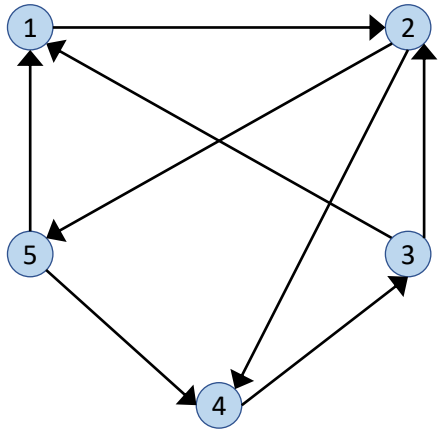
1 → 2
2 → 4 → 5
3 → 1 → 2
4 → 3
5 → 1 → 4



1 → 3 → 5
2 → 1 → 3
3 → 4
4 → 2 → 5
5 → 2

Macierz grafu M dla grafu skierowanego *G*=(*V*,*E*)

- ma rozmiar |V|x(|V|+4)



Macierz wypełniamy w taki sposób:

a) Komórki M[*i*,*j*], dla *i*, *j* = 1..|V| przyjmują wartości:

$$M[i,j] \in \begin{cases} \langle -|V|, -1\rangle & \text{jeśli } (v_i, v_j) \notin E \wedge (v_j, v_i) \notin E \\ \langle 0,\ |V|\rangle & \text{jeśli } (v_i, v_j) \in E \wedge (v_j, v_i) \notin E \\ \langle |V|+1, 2\cdot|V|\rangle & \text{jeśli } (v_i, v_j) \notin E \wedge (v_j, v_i) \in E \\ \langle 2\cdot|V|+1, 3\cdot|V|\rangle & \text{jeśli } (v_i, v_j) \in E \wedge (v_j, v_i) \in E \end{cases}$$

b) Dodatkowo:

- Komórka M[i,|V|+1] zawiera pierwszy następnik v_i (0 jeśli brak)
- Komórka M[i,|V|+2] zawiera pierwszy poprzednik v_i (0 jeśli brak)
- Komórka M[i,|V|+3|] zawiera pierwszy nieincydentny z v_i
- Komórka M[i,|V+4|] zawiera pierwszy z cyklu (ta kolumna jest używana w przypadku multigrafów)

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-4	2	10	-4	10	2	3	1
2	8	-2	8	5	5	4	1	2
3	2	2	-5	9	-5	1	4	3
4	-4	10	3	-4	10	3	2	1
5	4	7	-5	4	-5	1	2	3

Lista następników L_N

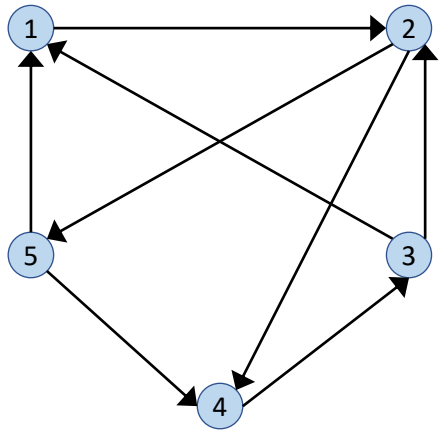
1 → 2
2 → 4 → 5
3 → 1 → 2
4 → 3
5 → 1 → 4

Lista poprzedników L_P

1 → 3 → 5
2 → 1 → 3
3 → 4
4 → 2 → 5
5 → 2

Lista brak incydencji L_B

1 → 1 → 4
2 → 2
3 → 3 → 5
4 → 1 → 4
5 → 3 → 5



W przypadku, gdy wierzchołek nie ma następnika/poprzednika/nieincydentnego na liście wpisujemy 0 (na potrzeby wypełnienie macierzy grafu). Na liście braku incydencji zaznaczamy też brak pętli własnych.

Krok 1.

Wypełnienie komórek M[i,|V|+1] (tj. kolumna 6): tu w wierszu i wpisujemy pierwszy następnik wierzchołka v_i z listy L_N.

Wypełniamy komórkę M[i,j] jeśli istnieje łuk $v_i \rightarrow v_j$. Do komórki M[i,j] wstawiamy numer ostatniego następnika wierzchołka v_i z listy L_N.

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2				2		
2				5	5	4		
3	2	2				1		
4			3			3		
5	4			4		1		

Lista następników L_N

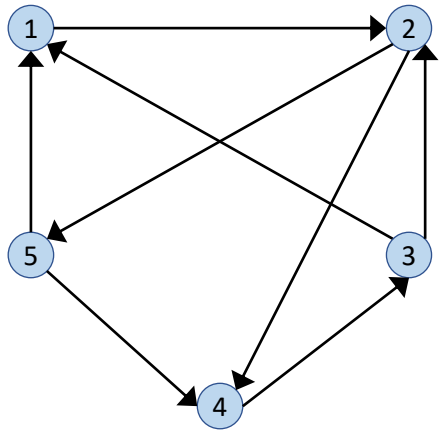
1 → 2
2 → 4 → 5
3 → 1 → 2
4 → 3
5 → 1 → 4

Lista poprzedników L_P

1 → 3 → 5
2 → 1 → 3
3 → 4
4 → 2 → 5
5 → 2

Lista brak incydencji L_B

1 → 1 → 4
2 → 2
3 → 3 → 5
4 → 1 → 4
5 → 3 → 5



W przypadku, gdy wierzchołek nie ma następnika/poprzednika/nieincydentnego na liście wpisujemy 0 (na potrzeby wypełnienie macierzy grafu). Na liście braku incydencji zaznaczamy też brak pętli własnych.

Krok 2.

Wypełnienie komórek M[i,|V|+2] (tj. kolumna 7): tu w wierszu i wpisujemy pierwszy poprzednik wierzchołka v_i z listy L_P.

Wypełniamy komórkę M[i,j] jeśli istnieje łuk $v_j \rightarrow v_i$. Do komórki M[i,j] wstawiamy sumę numeru ostatniego poprzednika wierzchołka v_i z listy L_P i liczby wierzchołków w grafie. Np. M[2,1]=3+5=8

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2	**10**		**10**	2	**3**	
2	**8**		**8**	5	5	4	**1**	
3	2	2		**9**		1	**4**	
4		**10**	3		**10**	3	**2**	
5	4	**7**		4		1	**2**	

Lista następników L_N

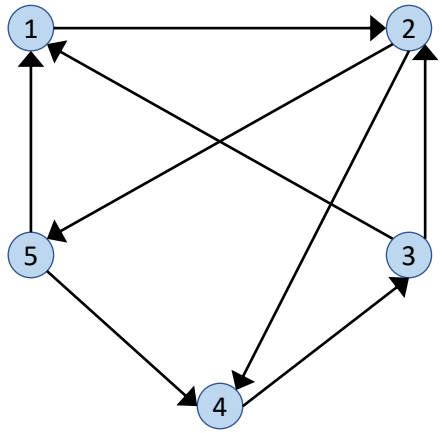
1 → 2
2 → 4 → 5
3 → 1 → 2
4 → 3
5 → 1 → 4

Lista poprzedników L_P

1 → 3 → 5
2 → 1 → 3
3 → 4
4 → 2 → 5
5 → 2

Lista brak incydencji L_B

1 → 1 → 4
2 → 2
3 → 3 → 5
4 → 1 → 4
5 → 3 → 5



W przypadku, gdy wierzchołek nie ma następnika/poprzednika/nieincydentnego na liście wpisujemy 0 (na potrzeby wypełnienie macierzy grafu). Na liście braku incydencji zaznaczamy też brak pętli własnych.

Krok 3.

Wypełnienie komórek M[i,|V|+3] (tj. kolumna 8): tu w wierszu i wpisujemy pierwszy wierzchołek nieincydentny z wierzchołkiem v_i z listy L_B.

Wypełniamy komórkę M[i,j] jeśli nie istnieje łuk między v_i oraz v_j. Do komórki M[i,j] wstawiamy numer ostatniego wierzchołka nieincydentnego z wierzchołkiem v_i z listy L_B ze znakiem minus.

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	**-4**	2	10	**-4**	10	2	3	**1**
2	8	**-2**	8	5	5	4	1	**2**
3	2	2	**-5**	9	**-5**	1	4	**3**
4	**-4**	10	3	**-4**	10	3	2	**1**
5	4	7	**-5**	4	**-5**	1	2	**3**

Podstawowe operacje dla różnych reprezentacji maszynowych grafu $G=(V,E)$, gdzie V to lista wierzchołków ($|V|=n$), a E to lista krawędzi/łuków ($|E|=m$) mają następujące złożoności (oszacowanie najgorszego przypadku):

Struktura danych	**Sprawdzenie istnienia jednej krawędzi**	**Przejrzenie wszystkich sąsiadów wierzchołka***	**Przejrzenie wszystkich krawędzi**
Macierz sąsiedztwa	O(1)	O(n)	$O(n^2)$
Macierz incydencji	O(m)	O(m)	O(m)
Lista krawędzi	O(m)	O(m)	O(m)
Lista incydencji	O(n)	O(n)	O(m)
Lista następników	O(n)	O(n)	O(m)
Lista poprzedników	O(n)	O(n)	O(m)
Macierz grafu	O(1)	O(n)	O(m)

*tj. wierzchołków sąsiednich (w grafie nieskierowanym) lub następników/poprzedników (w digrafie)

Metody przechodzenia grafu (w celu odwiedzenia wszystkich jego wierzchołków):

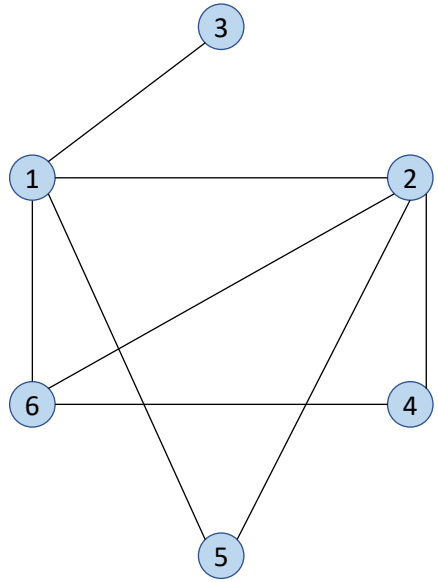
1. Przechodzenie grafu **w głąb** (**DFS**, Depth First Search)
   metoda działa na tej samej zasadzie, co pre-order dla drzewa
2. Przechodzenie grafu **wszerz** (**BFS**, Breadth First Search)
   metoda działa na tej samej zasadzie, co level-order dla drzewa

Obie metody mają zastosowanie zarówno dla grafów nieskierowanych jak i skierowanych, cyklicznych i acyklicznych. Od przechodzenia drzewa (in-order, level-order) różnią się tym, że muszą mieć zabezpieczenie przed zapętleniem (np. w przypadku cyklu w grafie).

Ich czas działania (złożoność) zależy od zastosowanej reprezentacji maszynowej grafu, która determinuje czas dostępu do potrzebnych informacji (np. znalezienia następnika bieżącego wierzchołka).

Przechodzenie grafu **w głąb** (Depth First Search):

1. Wybierz wierzchołek startowy *v* (np. ten o najmniejszym indeksie lub ten o zerowym stopniu wejściowym w digrafie).
2. Odwiedź *v*, oznacz jako odwiedzony i odłóż na stosie.
3. Jeśli istnieją nieodwiedzone następniki *v* to wybierz pierwszy z nich (*v* ← następnik(*v*)) i idź do pkt. 2.
4. Jeśli wszystkie następniki *v* są odwiedzone oraz odwiedzono już wszystkie wierzchołki grafu to koniec.
5. Jeśli wszystkie następniki *v* są odwiedzone ale nie odwiedzono jeszcze wszystkich wierzchołków grafu zdejmij ze stosu ostatni wierzchołek.
6. Jeśli stos nie jest pusty to *v* ← bieżący wierzchołek na szczycie stosu, w przeciwnym razie *v* ← dowolny nieodwiedzony jeszcze wierzchołek grafu. Idź do pkt. 3.

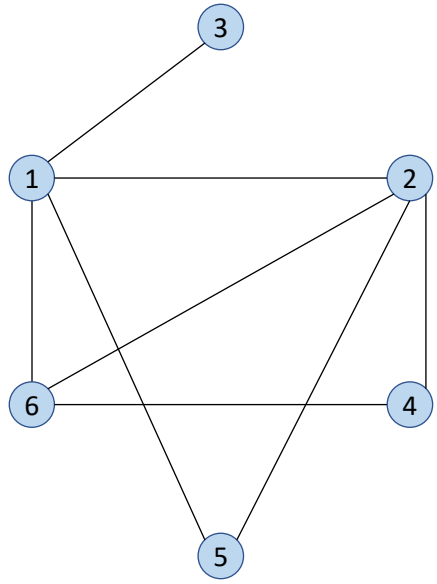


DFS dla powyższego grafu:
1, 2, 4, 6, 5, 3

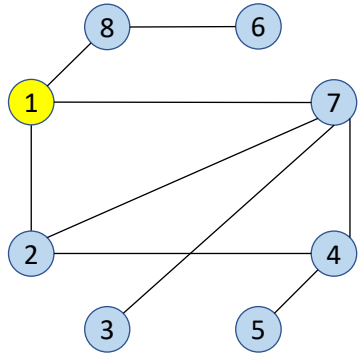
Metody przechodzenia grafu: DFS

DFS: pseudokod

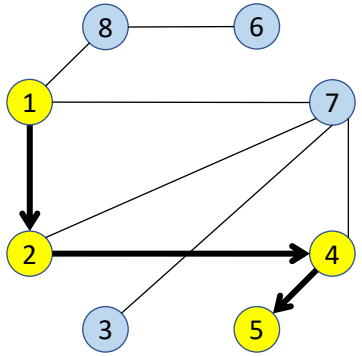
```
DFS(G, u)
      u.visited = true
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v.visited == false
              DFS(G, v)

init() {
      for each u ∈ G
           u.visited = false
      for each u ∈ G
          DFS(G, u)
}
```



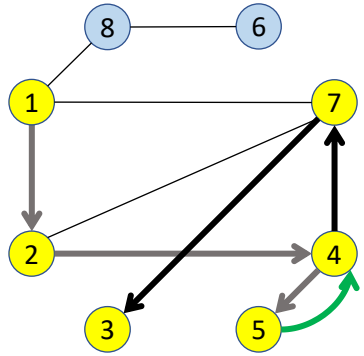
Metody przechodzenia grafu: DFS



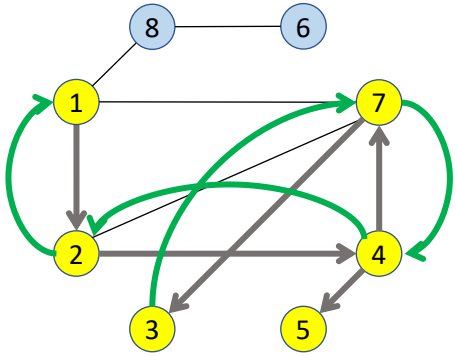
Wystartuj z wierzchołka v_1



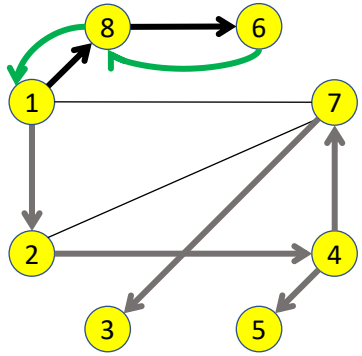
Idź w głąb grafu po nieodwiedzonych wierzchołkach dopóki możesz:
$1 \rightarrow \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{4} \rightarrow \mathbf{5}$



v_5 nie ma następnika więc wycofaj się do v_4. Idź w głąb po kolejnych nieodwiedzonych wierzchołkach
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5\ (\rightarrow 4) \rightarrow \mathbf{7} \rightarrow \mathbf{3}$



Z v_3 wycofaj się po przebytej ścieżce do najbliższego wierzchołka z nieodwiedzonym następnikiem (v_1):
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5\ (\rightarrow 4) \rightarrow 7 \rightarrow 3\ (\rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$

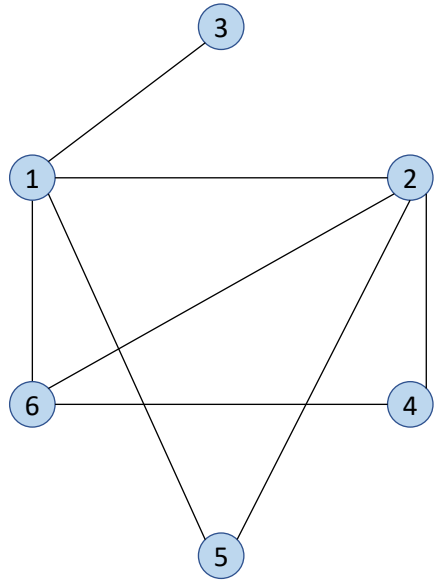


Idź w głąb po kolejnych nieodwiedzonych wierzchołkach.
Z v_6 wycofaj się po przebytej ścieżce i zakończ: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5\ (\rightarrow 4) \rightarrow 7 \rightarrow 3\ (\rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \rightarrow \mathbf{8} \rightarrow \mathbf{6}\ (\rightarrow 8 \rightarrow 1)$

DFS:
1, 2, 4, 5, 7, 3, 8, 6

Przechodzenie grafu **wszerz** (Breadth First Search):

1. Wybierz wierzchołek startowy *v* (np. ten o najmniejszym indeksie lub ten o zerowym stopniu wejściowym w digrafie).
2. Odwiedź *v* i oznacz jako odwiedzonego.
3. Jeśli istnieją nieodwiedzone następniki wierzchołka *v* odwiedź je (w kolejności alfabetycznej) i oznacz jako odwiedzone.
4. Jeśli wszystkie wierzchołki grafu są odwiedzone to koniec.
5. Dla *i* = 1 .. *liczba-następników-v*
   v ← następnik$_i$(*v*)
   idź do pkt. 2.

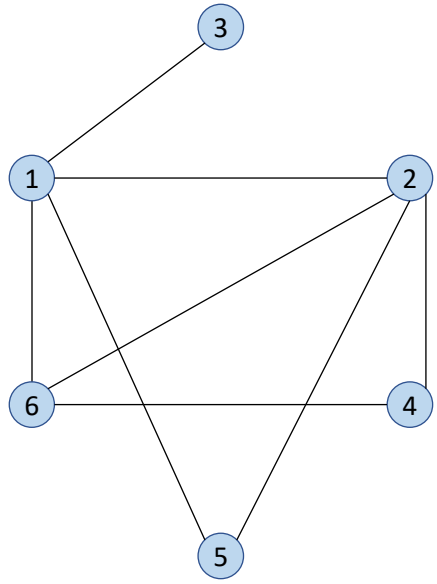


BFS dla powyższego grafu:
1, 2, 3, 5, 6, 4

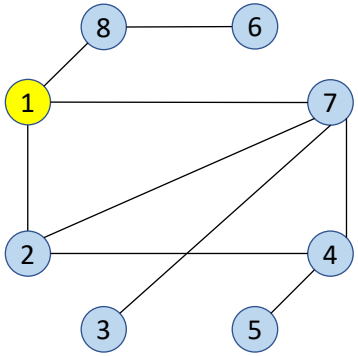
Metody przechodzenia grafu: DFS

BFS: pseudokod

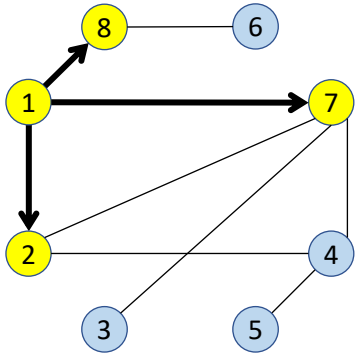
```
BFS(G, u)
      create stack Q
      u.visited = true
      Q.push(u)

      while Q != empty
           u = Q.pop()
            for each v ∈ G.Adj[u]
                 if v.visited == false
                    v.visited = true
                    Q.push(v)
```



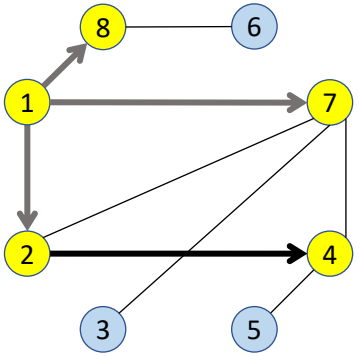
Metody przechodzenia grafu: BFS



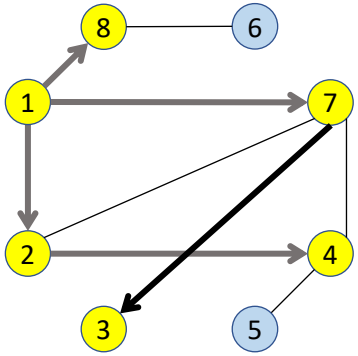
Wystartuj z wierzchołka v_1.
v_1 = wierzchołek bieżący



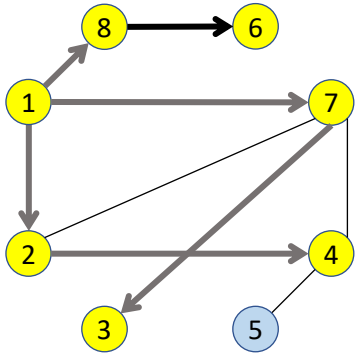
Odwiedź nieodwiedzone następniki wierzchołka bieżącego:
$1 \rightarrow \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{7} \rightarrow \mathbf{8}$



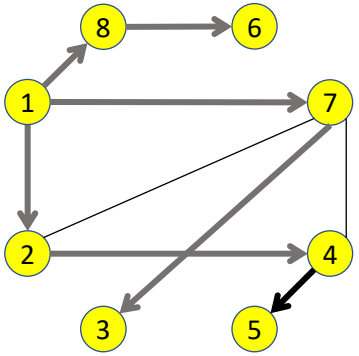
Odwiedź nieodwiedzone następniki v_2:
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \mathbf{4}$



Odwiedź nieodwiedzone następniki v_7:
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow \mathbf{3}$



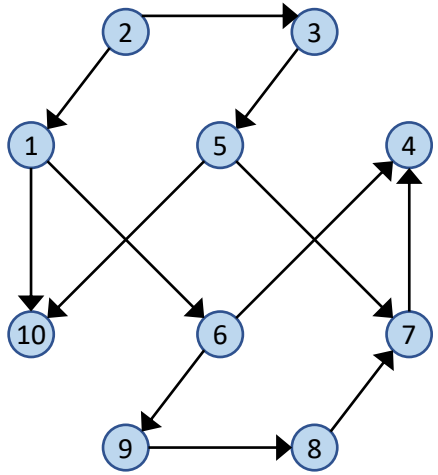
Odwiedź nieodwiedzone następniki v_8:
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow \mathbf{6}$



Odwiedź nieodwiedzone następniki v_4:
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow \mathbf{5}$
Odwiedź nieodwiedzone nast. v_3, v_6, v_5.

BFS:
1, 2,
7, 8,
4, 3,
6, 5

Ćwiczenie



W głąb (DFS)

1, 6, 4, 9, 8, 7, 10, 2, 3, 5

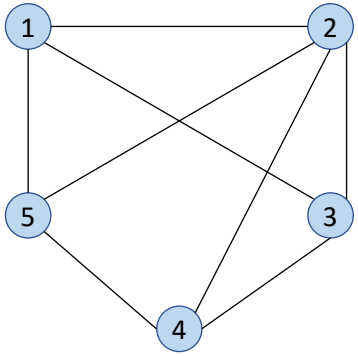
Wszerz (BFS)

1, 6, 10, 4, 9, 8, 7, 2, 3, 5

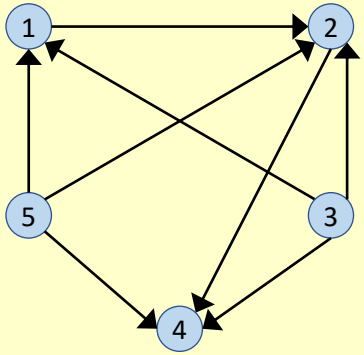
Sortowanie topologiczne grafu skierowanego $G=(V, E)$ polega na liniowym uporządkowaniu wierzchołków tego grafu w taki sposób, że dla każdej pary wierzchołków $u, v \in V$ połączonych łukiem z u do v, w porządku topologicznym u występuje przed v.

Sortowanie topologiczne grafu G jest możliwe tylko wówczas, gdy G jest **grafem skierowanym acyklicznym** (w skrócie jest to **DAG** – Directed Acyclic Graph).

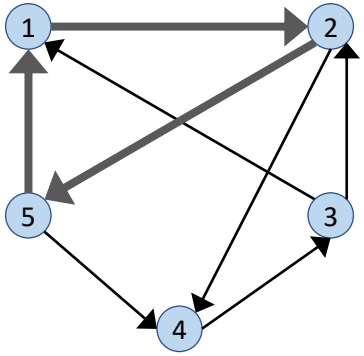
To nie jest DAG



To jest DAG



To nie jest DAG



Metody sortowania topologicznego wierzchołków grafu:

1. **Algorytm Kahna**
   sortowanie z usuwaniem wierzchołków niezależnych (mających zerowy stopień wejściowy)
   [Kahn AB (1962) Topological sorting of large networks. Communications of the ACM 5 (11):558–562]

2. **Algorytm oparty na procedurze DFS**
   [Tarjan RE (1976) Edge-disjoint spanning trees and depth-first search. Acta Informatica,6(2):171–185]

3. **Algorytmy równoległe**
   np. zrównoleglona wersja algorytmu Kahna
   [Dekel E, Nassimi D, Sahni S (1981) Parallel matrix and graph algorithms. SIAM Journal on Computing 10(4):657–675]

Algorytm Kahna

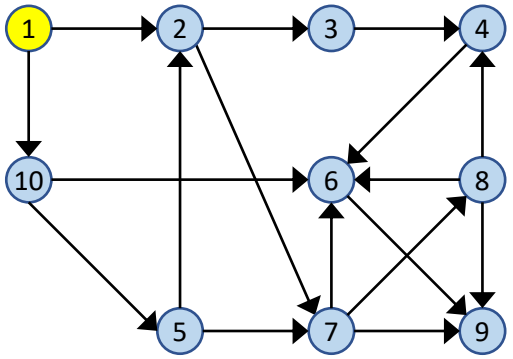
Dane wejściowe: skierowany acykliczny graf $G=(V,E)$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E jest niepustym zbiorem łuków.

1. Utwórz listę L, na którą będą wstawiane wierzchołki w porządku topologicznym.
2. Znajdź w grafie $G=(V,E)$ wierzchołek niezależny $u \in V$, tj. taki wierzchołek, który ma zerowy stopień wejściowy (ang. in-degree): in-deg(u) = 0.
3. Dopisz wierzchołek u na koniec listy L: $L \leftarrow u$.
4. Usuń wierzchołek u z grafu $G=(V,E)$: $V = V \setminus \{u\}$.
5. Jeśli graf $G=(V,E)$ zawiera jeszcze jakieś wierzchołki ($V \neq \emptyset$) idź do pkt. 2.
   W przeciwnym razie koniec.

Dane wyjściowe: Lista L zawierająca wierzchołki grafu G posortowane topologicznie.

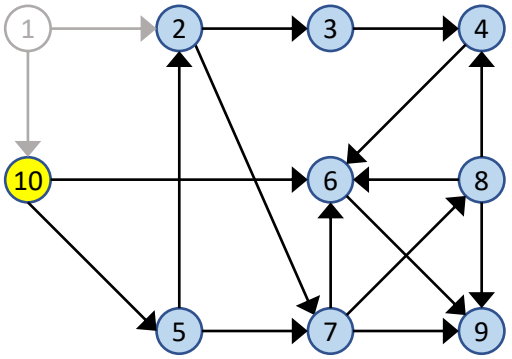
Sortowanie topologiczne: algorytm Kahna

Krok 1.



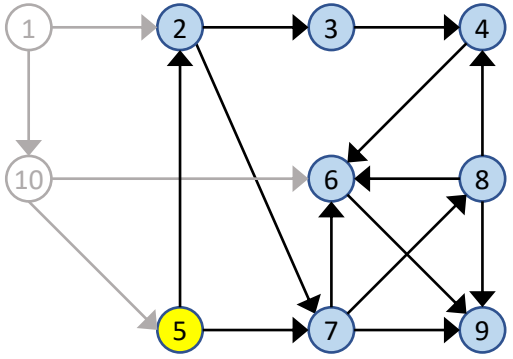
in-deg(v_1)=0
Posortowana lista [] ← v_1
Usuń z grafu v_1 wraz z łukami wychodzącymi

Krok 2.



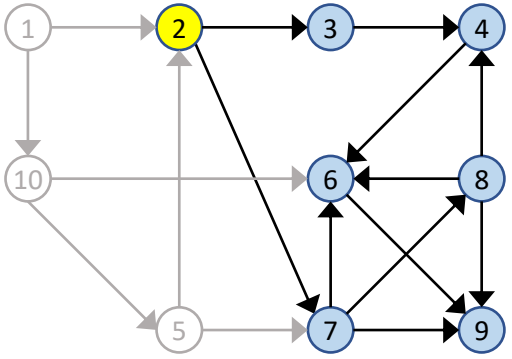
in-deg(v_{10})=0
Posortowana lista [1] ← v_{10}
Usuń z grafu v_{10} wraz z łukami wychodzącymi

Krok 3.



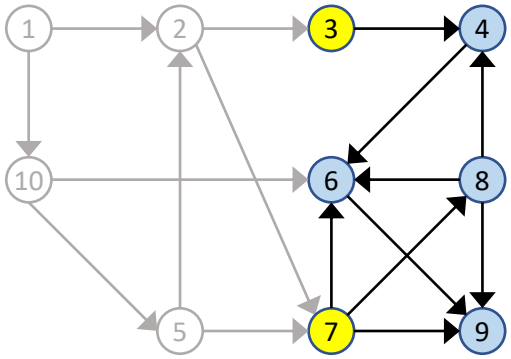
in-deg(v_5)=0
Posortowana lista [1, 10] ← v_5
Usuń z grafu v_5 wraz z łukami wychodzącymi

Krok 4.



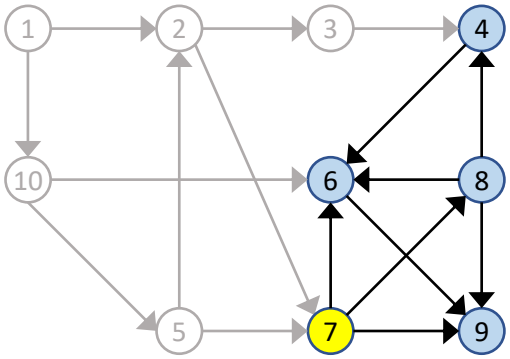
in-deg(v_2)=0
Posortowana lista [1, 10, 5] ← v_2
Usuń z grafu v_2 wraz z łukami wychodzącymi

Krok 5.



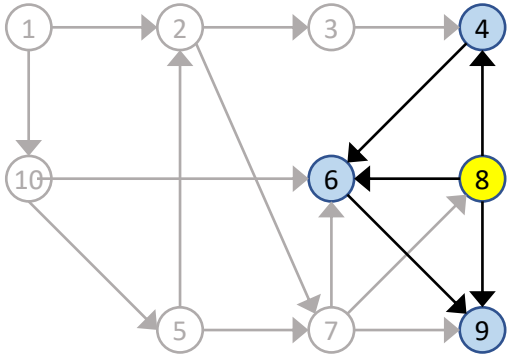
in-deg(v_3)=in-deg(v_7)=0
Posortowana lista [1, 10, 5, 2] ← v_3 (bierzemy pierwszy)
Usuń z grafu v_3 wraz z łukami wychodzącymi

Krok 6.



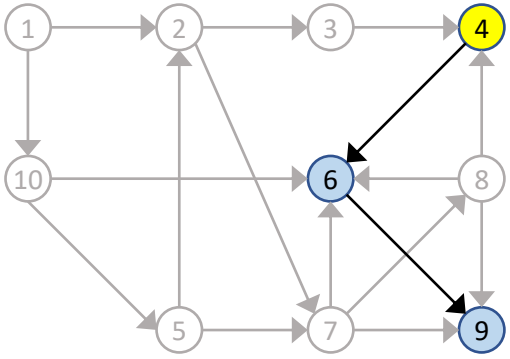
in-deg(v_7)=0
Posortowana lista [1, 10, 5, 2, 3] ← v_7
Usuń z grafu v_7 wraz z łukami wychodzącymi

Krok 7.



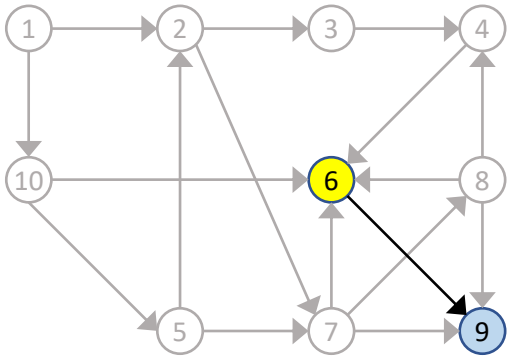
in-deg(v_8)=0
Posortowana lista [1, 10, 5, 2, 3, 7] ← v_8
Usuń z grafu v_8 wraz z łukami wychodzącymi

Krok 8.



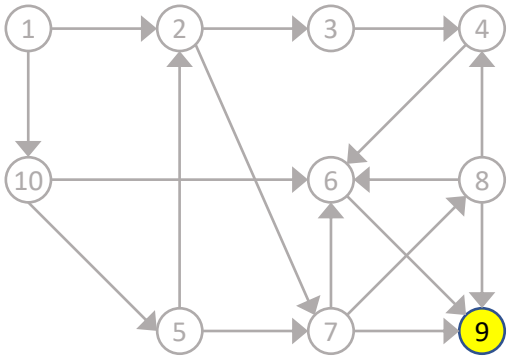
in-deg(v_4)=0
Posortowana lista [1, 10, 5, 2, 3, 7, 8] ← v_4
Usuń z grafu v_4 wraz z łukami wychodzącymi

Krok 9.



in-deg(v_6)=0
Posortowana lista [1, 10, 5, 2, 3, 7, 8, 4] ← v_6
Usuń z grafu v_6 wraz z łukami wychodzącymi

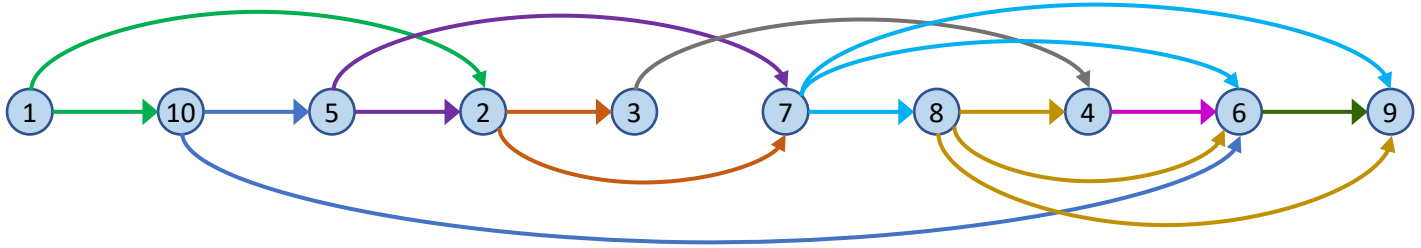
Krok 10.



in-deg(v_9)=0
Posortowana lista [1, 10, 5, 2, 3, 7, 8, 4, 6] ← v_9
Usuń z grafu v_9 wraz z łukami wychodzącymi

Wierzchołki grafu posortowane topologicznie: **1, 10, 5, 2, 3, 7, 8, 4, 6, 9**

Graf w postaci liniowej z wierzchołkami uporządkowanymi topologicznie



Algorytm oparty na DFS

Dane wejściowe: skierowany acykliczny graf $G=(V,E)$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E jest niepustym zbiorem łuków.

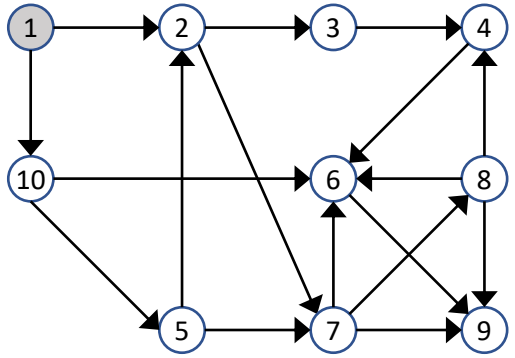
1. Przypisz wszystkim wierzchołkom grafu G kolor biały.
2. Utwórz listę L, na którą będą wstawiane wierzchołki w porządku topologicznym.
3. Utwórz stos S, na który będą wstawiane przetworzone wierzchołki.*
4. Wybierz w grafie $G=(V,E)$ biały wierzchołek startowy u (najlepiej jeśli będzie to wierzchołek niezależny).
5. Odwiedź wierzchołek u, pokoloruj go na szaro.
6. Jeśli istnieją białe następniki u to wybierz jeden z nich: $u \leftarrow$ następnik(u). Idź do pkt. 5.
7. Jeśli u nie ma białego następnika, pokoloruj u na czarno i wstaw na stos: $S \leftarrow u$.
8. Cofnij się do szarego poprzednika u na przebytej ścieżce jeśli istnieje taki poprzednik: $u \leftarrow$ poprzednik(u) oraz przejdź do pkt. 6.
9. Jeśli u nie ma szarego poprzednika i wszystkie wierzchołki grafu G są czarne (są na stosie), idź do pkt. 11.
10. Jeśli u nie ma szarego poprzednika i w grafie G są jeszcze białe wierzchołki, idź do pkt. 4.
11. Dla $i=1..|V|$: zdejmij i-ty wierzchołek ze stosu S i wpisz na koniec listy posortowanej: $L \leftarrow S(i)$.

Dane wyjściowe: Lista L zawierająca wierzchołki grafu G posortowane topologicznie.

*Zamiast implementować stos, wierzchołki można od razu wstawiać na listę L, ale zawsze na początek listy!

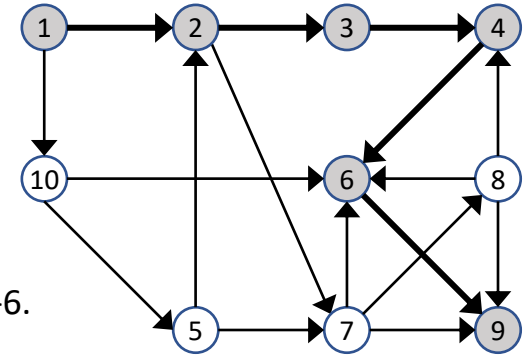
Sortowanie topologiczne: algorytm oparty na DFS

Krok 1.



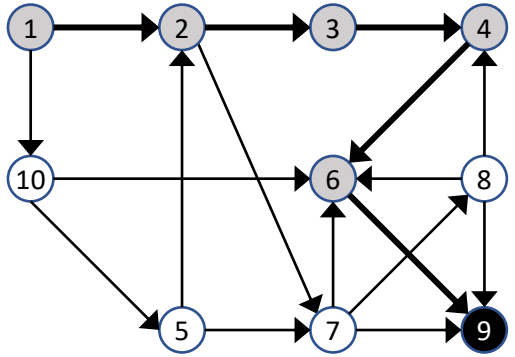
Odwiedź wierzchołek startowy: v_1
Pokoloruj go na szaro.

Kroki 2-6.



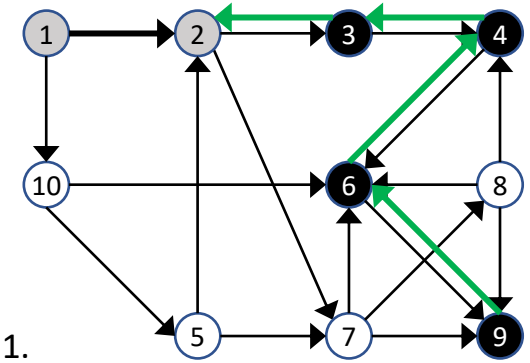
Idź w głąb grafu (DFS) kolorując odwiedzane wierzchołki na szaro.

Krok 7.



v_9 nie ma białych następników. Pokoloruj go na czarno i wrzuć na stos: S[] ← v_9

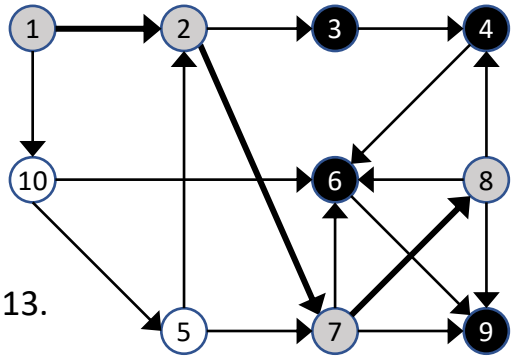
Kroki 8-11.



Wycofaj się po ścieżce do pierwszego wierzchołka, mającego białe następniki. Wierzchołki, z których się cofasz koloruj na czarno i wrzucaj na stos: S[3,4,6,9]

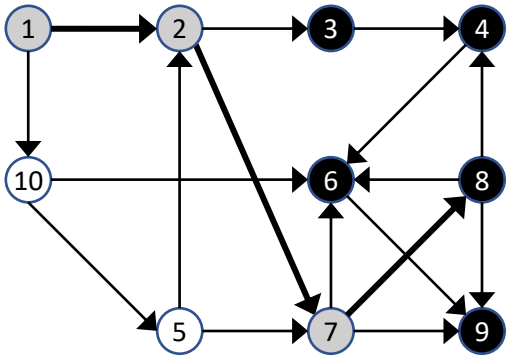
Sortowanie topologiczne: algorytm oparty na DFS

Kroki 12-13.



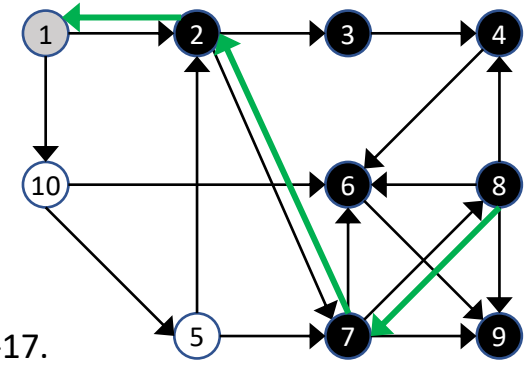
Idź w głąb grafu (DFS) po białych wierzchołkach kolorując je na szaro.

Krok 14.



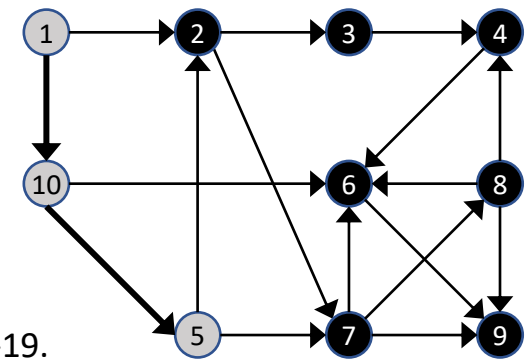
v_8 nie ma białych następników.
Pokoloruj go na czarno i wrzuć na stos:
$S[3,4,6,9] \leftarrow v_8$

Kroki 15-17.



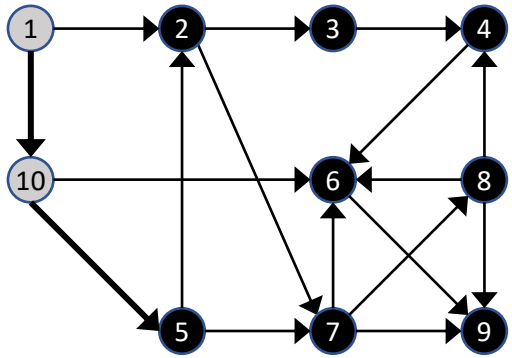
Wycofaj się po ścieżce do pierwszego wierzchołka, z białymi następnikami. Wierzchołki, z których się cofasz koloruj na czarno i wrzucaj na stos: S[2,7,8,3,4,6,9]

Kroki 18-19.



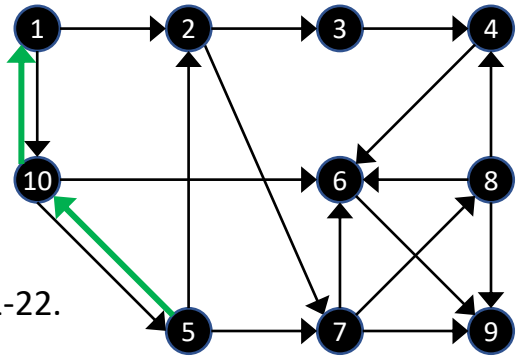
Idź w głąb grafu (DFS) po białych wierzchołkach kolorując je na szaro.

Krok 20.



v_5 nie ma białych następników.
Pokoloruj go na czarno i wrzuć na stos: S[2,7,8,3,4,6,9] ← v_5

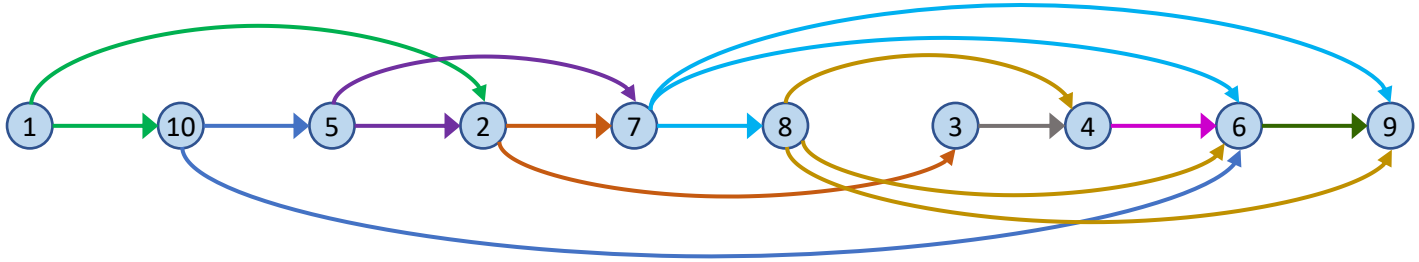
Kroki 21-22.



Wycofaj się po ścieżce do pierwszego wierzchołka.
Wierzchołki, z których się cofasz koloruj na czarno i wrzucaj na stos: S[1,10,5,2,7,8,3,4,6,9]
Wszystkie wierzchołki w grafie są czarne. Koniec.

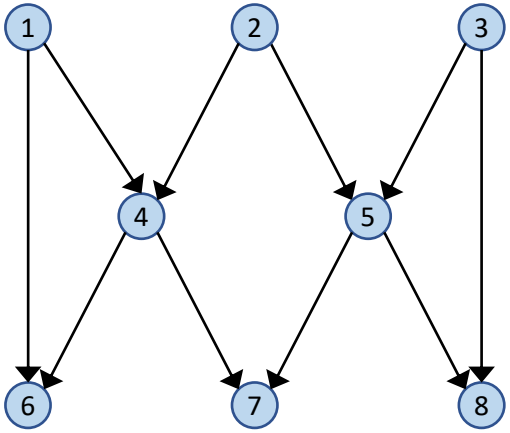
Wierzchołki grafu posortowane topologicznie: **1, 10, 5, 2, 7, 8, 3, 4, 6, 9**

Graf w postaci liniowej z wierzchołkami uporządkowanymi topologicznie



W jednym grafie skierowanym *G* może istnieć **wiele różnych porządków topologicznych** jego wierzchołków.

Przykładowy graf $G=(V,E)$
$V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$E=\{(1,4),(1,6),(2,4),(2,5),(3,5),(3,8),(4,6),(4,7),(5,7),(5,8)\}$



Różne uporządkowania topologiczne wierzchołków grafu *G*:

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- 1, 2, 4, 6, 3, 5, 8, 7
- 3, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 6
- 3, 2, 1, 5, 4, 8, 7, 6
- 1, 3, 2, 4, 6, 5, 8, 7
- …

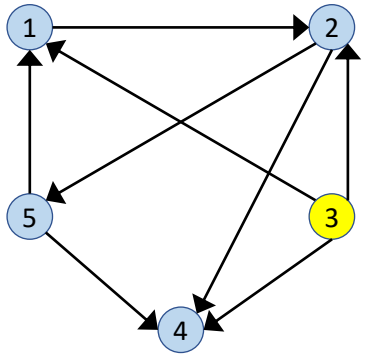
Jeśli w grafie, którego wierzchołki sortujemy topologicznie istnieje cykl, to może on zostać wykryty (tj. algorytm może stwierdzić istnienie cyklu). Kiedy to się dzieje:

Algorytm Kahna

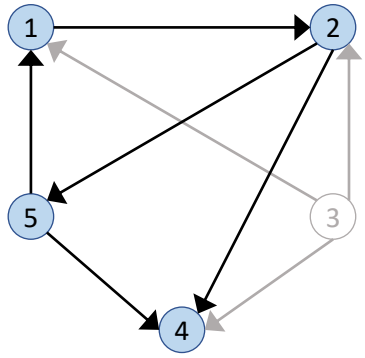
- w każdym kroku szuka w grafie niezależnego wierzchołka (wierzchołka, do którego nie wchodzą żadne łuki), aby go wstawić na posortowaną listę, a następnie usuwa go z grafu wraz z łukami wychodzącymi.
- Jeśli w którymś momencie algorytm **nie znajdzie ani jednego wierzchołka niezależnego, ale w grafie nadal są jakieś wierzchołki** (tzn. nie wszystkie wierzchołki grafu wejściowego znalazły się na liście posortowanej), to znaczy, że w pozostałej części grafu znajduje się cykl.
- W takim przypadku sortowanie topologiczne zostaje przerwane (nie można uporządkować topologicznie wierzchołków grafu).

Przykład

in-deg(v_3)=0
Posortowana lista [] ← v_3
Usuń z grafu v_3 wraz z łukami wychodzącymi



Nie ma wierzchołka bez wchodzących krawędzi. Cykl!



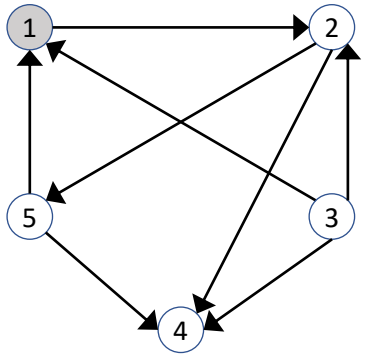
Jeśli w grafie, którego wierzchołki sortujemy topologicznie istnieje cykl, to może on zostać wykryty (tj. algorytm może stwierdzić istnienie cyklu). Kiedy to się dzieje:

Algorytm oparty na DFS

- wchodząc do białego wierzchołka przeszukuje jego następniki. Następniki mogą być białe (nie były jeszcze odwiedzone i można do nich wejść w kolejnym kroku) lub czarne (zostały już odwiedzone i wpisane na posortowaną listę, a procedura wycofała się z takich wierzchołków).
- Jeśli w którymś momencie okaże się, że **biały wierzchołek, który właśnie odwiedzamy ma szarego następnika**, to znaczy, że w grafie istnieje cykl.
- Do tego cyklu należy na pewno wierzchołek, w którym jesteśmy oraz jego szary następnik. W takim przypadku sortowanie topologiczne zostaje przerwane (nie można uporządkować topologicznie wierzchołków grafu).

Przykład

Odwiedź wierzchołek startowy v_1. Pokoloruj go na szaro.



Idź w głąb grafu (DFS) po białych wierzchołkach i koloruj je na szaro. v_5 ma szarego następnika. Cykl!