



# Laboratorium

## Inteligentnych Systemów Sterowania

Mariusz Nowak  
Instytut Informatyki  
Politechnika Poznańska

ver. 2010.04-01

## Spis treści

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Układ regulacji automatycznej z regulatorami klasycznymi typu P, PI i PID ..... | 3  |
| 1.1. URA z regulatorem typu P .....                                                | 3  |
| 1.2. URA z regulatorem typu PI .....                                               | 4  |
| 1.3. URA z regulatorem typu PID .....                                              | 4  |
| 2. Model matematyczny silnika prądu stałego .....                                  | 5  |
| 2.1. Parametry elektryczne .....                                                   | 5  |
| 2.2. Parametry mechaniczne .....                                                   | 6  |
| 2.3. Układ równań różniczkowych modelu silnika .....                               | 7  |
| 2.4. Schemat blokowy silnika .....                                                 | 8  |
| 3. Układ regulacji automatycznej z regulatorami dyskretnymi .....                  | 9  |
| 3.1. Ekstrapolator zerowego rzędu .....                                            | 9  |
| 3.2. Transmitancja dyskretna .....                                                 | 9  |
| 3.3. Przekształcenie $\mathcal{Z}$ .....                                           | 10 |
| 3.4. Transmitancje klasycznych regulatorów dyskretnych .....                       | 10 |

## Spis rysunków

|                                                                   |   |
|-------------------------------------------------------------------|---|
| Rysunek 1. URA z regulatorem typu P i obiektem inercyjnym .....   | 3 |
| Rysunek 2. URA z regulatorem typu PI i obiektem inercyjnym .....  | 4 |
| Rysunek 3. URA z regulatorem typu PID i obiektem inercyjnym ..... | 4 |
| Rysunek 4. Schemat blokowy silnika prądu stałego .....            | 8 |
| Rysunek 5. Schemat blokowy silnika w Matlabie Simulinku .....     | 8 |
| Rysunek 6. Schemat blokowy URA w Matlabie Simulinku .....         | 9 |

## 1. Układ regulacji automatycznej z regulatorami klasycznymi typu P, PI i PID

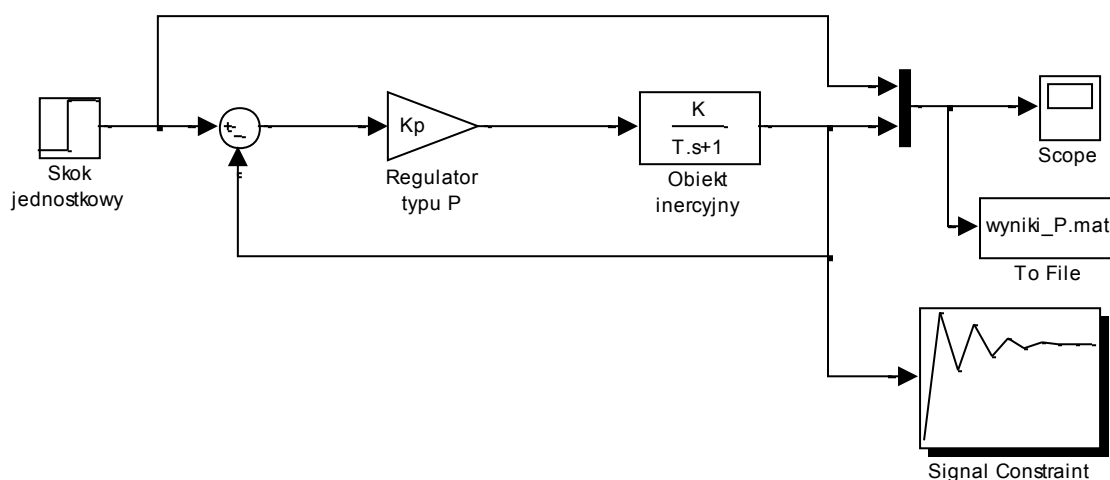
Sygnał sterujący regulatora PID można wyrazić wzorem:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Transmitancja operatorowa regulatora PID przyjmuje postać:

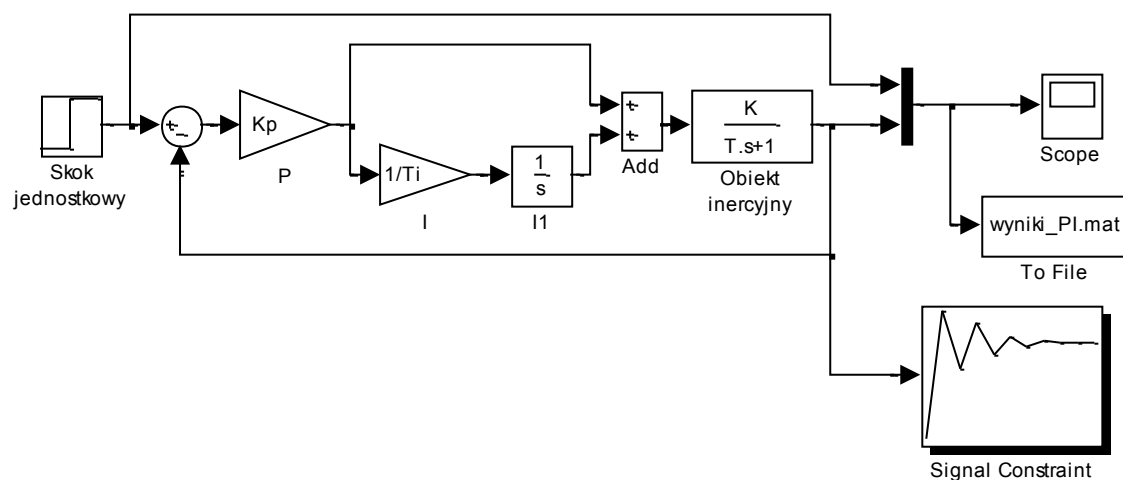
$$G_r(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

### 1.1. URA z regulatorem typu P



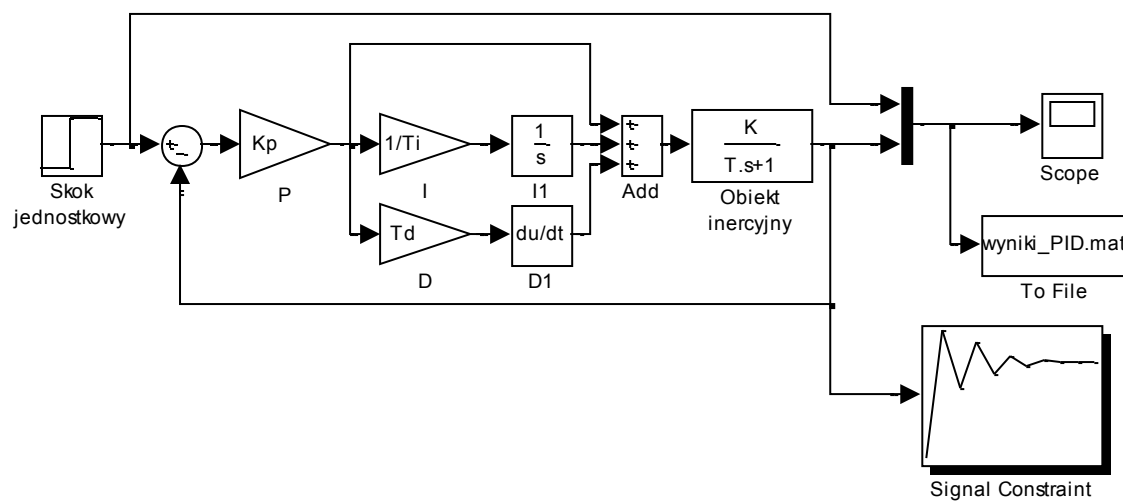
Rysunek 1. URA z regulatorem typu P i obiektem inercyjnym

## 1.2. URA z regulatorem typu PI



Rysunek 2 URA z regulatorem typu PI i obiektem inercyjnym

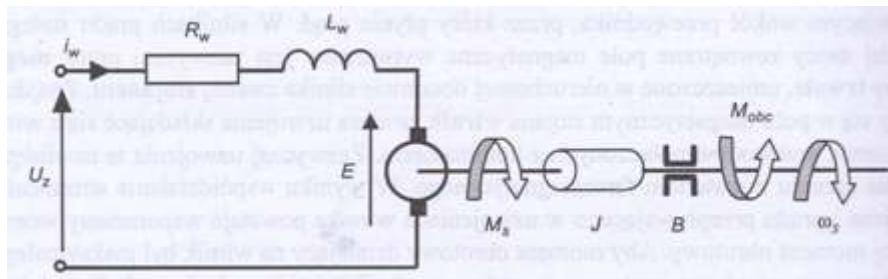
## 1.3. URA z regulatorem typu PID



Rysunek 3 URA z regulatorem typu PID i obiektem inercyjnym

## 2. Model matematyczny silnika prądu stałego

Model silnika – zależność między napięciem zasilającym  $U_z$  a prędkością kątową wirnika  $\omega_s$ .



Rysunek 4 Schemat zastępczy obwodu wirnika silnika prądu stałego

Należy rozważyć elektryczne i mechaniczne parametry obwodu wirnika poprzez zdefiniowanie dwóch równań modelujących działanie silnika.

### 2.1. Parametry elektryczne

*Wielkości elektryczne:*

- $U_z$  – napięcie zasilające wirnik,
- $i_w$  – prąd płynący w uzwojeniach wirnika,
- $R_w$  – rezystancja zastępcza uzwojeń wirnika,
- $L_w$  – indukcyjność zastępcza uzwojeń wirnika,
- $E$  – sem indukcji,
- $\omega_s$  – prędkość kątowa wirnika.

*Równanie elektryczne silnika:*

$$U_z = U_{R_w} + U_{L_w} + E$$

$$U_{R_w} = R_w i_w$$

$$U_{L_w} = L_w \frac{di_w}{dt}$$

$$E = k_e \omega_s$$

$$U_z = R_w i_w + L_w \frac{di_w}{dt} + k_e \omega_s$$

## 2.2. Parametry mechaniczne

*Wielkości mechaniczne:*

- $M_s$  – moment obrotowy wirnika,
- $\omega_s$  – prędkość kątowna wirnika,
- $B$  – współczynnik tarcia lepkiego zredukowany do wału wirnika,
- $J$  – moment bezwładności zredukowany do wału wirnika,
- $i_w$  – prąd płynący w uzwojeniach wirnika,
- $M_{obc}$  – stały moment obciążenia silnika,
- $k_m$  – stała mechaniczna

*Równanie momentu obrotowego silnika:*

$$M_s = M_a + M_v + M_{obc}$$

$$M_s = k_m i_w$$

$$M_a = J \frac{d\omega_s}{dt}$$

$$M_v = B\omega_s$$

$$k_m i_w = J \frac{d\omega_s}{dt} + B\omega_s + M_{obc}$$

### 2.3. Układ równań różniczkowych modelu silnika

$$\begin{cases} U_z = R_w i_w + L_w \frac{di_w}{dt} + k_e \omega_s \\ k_m i_w = J \frac{d\omega_s}{dt} + B \omega_s + M_{obc} \end{cases}$$

Po przekształceniach:

$$\begin{cases} \frac{di_w}{dt} = -\frac{R_w}{L_w} i_w - \frac{k_e}{L_w} \omega_s + \frac{1}{L_w} U_z \\ \frac{d\omega_s}{dt} = -\frac{k_m}{J} i_w - \frac{B}{J} \omega_s + \frac{1}{J} M_{obc} \end{cases}$$

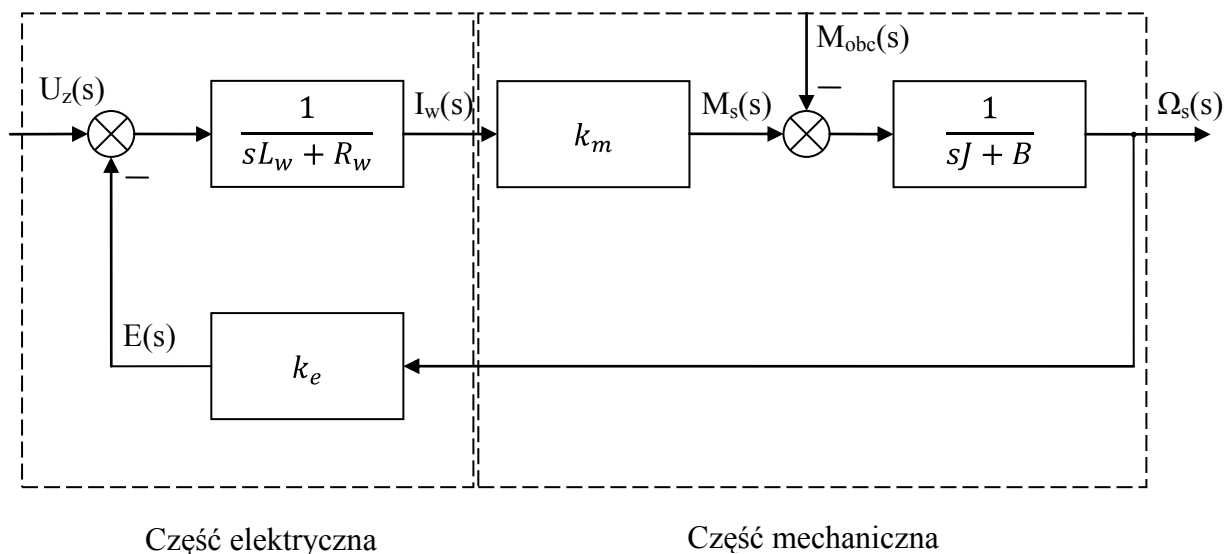
Po przekształceniu Laplace'a otrzymujemy:

$$\begin{cases} sI_w(s) - i_w(0) = -\frac{R_w}{L_w} I_w(s) - \frac{k_e}{L_w} \Omega_s(s) + \frac{1}{L_w} U_z(s) \\ s\Omega_s(s) - \omega_s(0) = -\frac{k_m}{J} I_w(s) - \frac{B}{J} \Omega_s(s) + \frac{1}{J} M_{obc}(s) \end{cases}$$

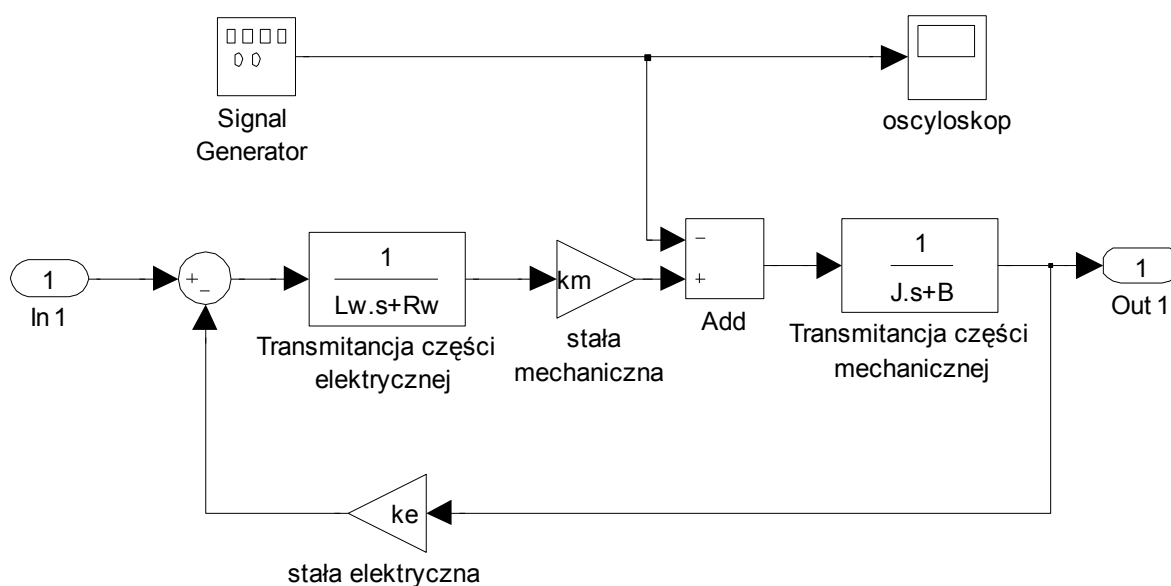
Po dalszych przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} I_w(s) = \frac{-k_e \Omega_s(s) + U_z(s)}{sL_w + R_w} \\ \Omega_s(s) = \frac{k_m I_w(s) - M_{obc}(s)}{sJ + B} \end{cases}$$

## 2.4. Schemat blokowy silnika



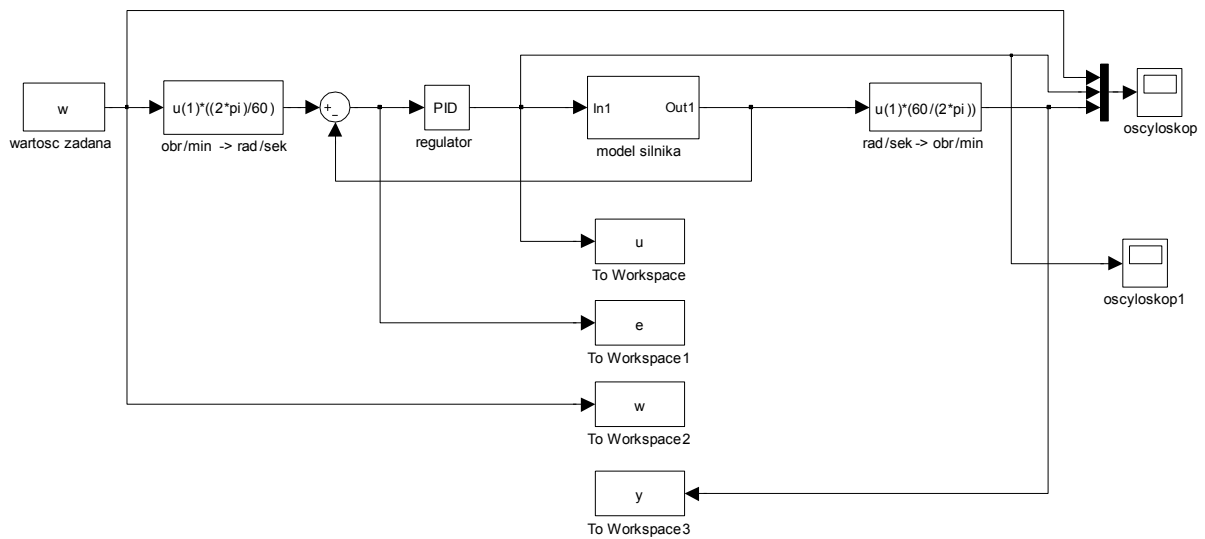
Rysunek 4. Schemat blokowy silnika prądu stałego



Rysunek 5. Schemat blokowy silnika w Matlabie Simulinku

Parametry elektryczne i mechaniczne silnika:

$R_w = 2$   
 $L_w = 0.5$   
 $k_m = 0.1$   
 $J = 0.02$   
 $B = 0.2$   
 $k_e = 0.1$



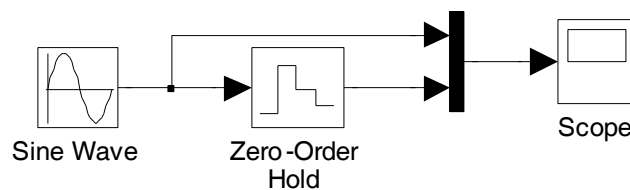
Rysunek 6 Schemat blokowy URA w Matlabie Simulinku

### 3. Układ regulacji automatycznej z regulatorami dyskretnymi

#### 3.1. Ekstrapolator zerowego rzędu

Element formujący:

$$G_1(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}$$



#### 3.2. Transmitancja dyskretna

### 3.3. Przekształcenie $\mathcal{Z}$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

```
% definicja obiektu - transmitancja operatorowa
G1=tf([2],[10 1]);
%% przejście na dziedzinę dyskretną
Ts=0.1;
G12=c2d(G1,Ts);
```

### 3.4. Transmitancje klasycznych regulatorów dyskretnych

Algorytm pozycyjny z całkowaniem metodą prostokątów sposobem różnic wstecznych:

$$u(i) - u(i-1) = k_p \left( e(i) + \frac{T_s}{T_i} \sum_{n=0}^i e(n) + \frac{T_d}{T_s} (e(i) - e(i-1)) \right)$$

Algorytm przyrostowy (prędkościowy):

$$u(i) - u(i-1) = k_p (e(i) - e(i-1)) + k_p \frac{T_s}{T_i} e(i) + k_p \frac{T_d}{T_s} (e(i) - 2e(i-1) + e(i-2))$$

Transmitancja dyskretnego regulatora PID:

$$G_{PID}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = k_p \left( 1 + \frac{T_s}{T_i} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{T_d}{T_s} \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1}} \right)$$

$$G_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

gdzie:

$$q_0 = k_p \left( 1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right)$$

$$q_1 = -k_p \left( 1 + 2 \frac{T_d}{T_s} \right)$$

$$q_2 = k_p \frac{T_d}{T_s}$$