Teoretyczne podstawy programowania liniowego

Plan

* Elementy algebry liniowej

Kombinacja liniowa

Definicja

Kombinacja liniowa wektorów (punktów) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ to wektor $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ taki, że $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathrm{R}$, $i = 1,2, \dots, k$.

Kombinacja liniowa jest **nieujemna** wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_i \ \lambda_i \geq 0$, $i = 1,2, \dots, k$.

Kombinacja liniowa wektorów jest **wypukła,** gdy jest nieujemna oraz $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

Liniowa zależność

O wektorach $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ mówimy, że tworzą układ **liniowo niezależny** jeżeli

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \ \ (\lambda_i \in R, i = 1,2, \dots, k)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\underset{i}{\forall} \lambda_i = 0 \ \ (i = 1,2, \dots, k)$

Jeżeli implikacja $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ nie zachodzi, to wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ nazywamy **liniowo zależnymi,** a zbiór tych wektorów **układem liniowo zależnym**

Wnioski

* Z poprzednich definicji wynika, że:
  * Układ wektorów jest liniowo zależny, jeżeli chociaż jeden jest kombinacją liniową pozostałych
  * W układzie wektorów liniowo niezależnych żadnego wektora nie można przedstawić jako kombinacji liniowej pozostałych
  * Szczególnym przypadkiem są wersory przestrzeni R^n

Twierdzenia 1 i 2

Twierdzenie

Dowolny układ wektorów zawierający wektor zerowy jest układem liniowo zależnym

Twierdzenie

Maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni R^n wynosi n

Wniosek

Dowolny układ $n + k \quad (k \geq 1)$ wektorów należących do R^n jest liniowo zależny

Wektory rozpinające zbiór

Definicja

Niech $\mathrm{S} \subset \mathrm{R}^n$. Układ wektorów $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_k} \in \mathrm{S}$ **rozpina zbiór** S**,** jeżeli dla każdego $\mathbf{a} \in \mathrm{S}$ istnieją takie $\lambda_i \in \mathrm{R}\ \ (i = 1,2, \dots, k)$, że $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{b_i}$, tzn. każdy element $\mathbf{a} \in \mathrm{S}$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów rozpinających $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_k}$.

Przykład

$\mathrm{S} = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right\}$, wektory $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ rozpinają zbiór S

Baza zbioru wektorów

<u>Definicja</u>

Bazą zbioru S nazywamy liniowo niezależny układ wektorów $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_p} \in \mathrm{S}$ rozpinający zbiór S.

<u>Przykład</u>

a) $\mathrm{S}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$, wektory $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ rozpinają zbiór S_1 i są jego bazą (są liniowo niezależne).

b) $\mathrm{S}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, wektory $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rozpinają zbiór S_2, ale nie są jego bazą (są liniowo zależne).

Twierdzenie 3

Twierdzenie

Liczba wektorów stanowiących bazę zbioru S jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych wektorów należących do S.

Wniosek

Dowolny zbiór n liniowo niezależnych wektorów należących do R^n jest bazą przestrzeni R^n. Każdy element przestrzeni R^n można przedstawić za pomocą tych wektorów

Twierdzenie 4

Twierdzenie

Dla ustalonej bazy $\mathrm{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b}_{\boldsymbol{p}}\}$ zbioru S dowolny wektor $\mathbf{a} \in S$ można w jednoznaczny sposób przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy.

Twierdzenie 5

Twierdzenie

Niech $\mathrm{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_p}\}$ będzie bazą zbioru S.
Jeżeli $\mathbf{a} \in \mathrm{S}$ spełnia następujące warunki:

1) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
2) $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{b_i}$, gdzie $\lambda_r \neq 0$

to zastąpienie wektora $\mathbf{b_r}$ w bazie B wektorem $\mathbf{a}$ daje zbiór wektorów $\mathrm{B}' = \mathrm{B} - \{\mathbf{b_r}\} \cup \{\mathbf{a}\}$ będący nową bazą zbioru S.

Przykład

$\mathrm{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ jest bazą w przestrzeni R^2 wektor $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ jest następująca kombinacją liniową wektorów bazy:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\lambda_1 = 2 \neq 0$ to na podstawie twierdzenia 5 można stworzyć nową bazę $\mathrm{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ lub ze względu na $\lambda_2 = -1 \neq 0$ bazę $\mathrm{B}'' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Bazy sąsiednie

Definicja

Dwie bazy nazywamy sąsiednimi jeśli różnią się od siebie tylko jednym wektorem

Macierz **A**

Jeżeli zbiór $\mathrm{S} \subset \mathrm{R}^m$ zawiera skończoną liczbę n wektorów to można go przedstawić w postaci macierzy typu $m \quad n$. Tj. jeśli $S = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}\}$, to z wektorów $\mathbf{a}_j \in \mathrm{S} \subset \mathrm{R}^m$ można utworzyć macierz $\mathbf{A} = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}]$

Od macierzy **A** do rozwiązania układu **Ax=b**

Dana macierz $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ typu $m \times n$, gdzie $\mathbf{a}_j \in \mathrm{R}^m$ dla $j = 1,2, \dots, n$.

Jeżeli rząd macierzy $r(\mathbf{A}) = m$, to macierz można podzielić na dwie części $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_\mathbf{B}, \mathbf{A}_\mathbf{R}]$, gdzie:

- $\mathbf{A}_\mathbf{B}$ jest macierzą typu $m \quad m$ i rzędu m złożoną z kolumn bazowych macierzy $\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}_\mathbf{R}$ jest macierzą typu $m \times (n - m)$ złożoną z pozostałych kolumn.

Od macierzy **A** do rozwiązania układu **Ax=b** – c.d.

Niech B oznacza zbiór numerów kolumn macierzy $\mathbf{A}$ będących bazą tej macierzy $\mathrm{B} = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$.

Wówczas $\mathbf{A}_\mathbf{B} = \left[a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}\right]$, gdzie $j_k \in \mathrm{B}$ dla $k = 1,2, \dots, m$

Od macierzy **A** do rozwiązania układu **Ax=b** – c.d.

Załóżmy, że mamy następujący układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, który można przedstawić jako $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{b}$, gdzie $x_j \in \mathrm{R}$ $(j = 1,2, \dots , n)$ i jest składową wektora $\mathbf{x}$, co można przedstawić jako $\sum_{j\in \mathrm{B}} \mathbf{a}_j x_j^B + \sum_{j\notin \mathrm{B}} \mathbf{a}_j x_j^R = \mathbf{b}$, gdzie x_j^B są składowymi wektora $\mathbf{x}$ stojącymi przy kolumnach bazowych $(j \in \mathrm{B})$, a x_j^B są składowymi wektora $\mathbf{x}$ stojącymi przy kolumnach niebazowych $(j \notin \mathrm{B})$

Od macierzy **A** do rozwiązania układu **Ax=b** – c.d.

Jeżeli wektor $\mathbf{x}$ podzielimy na dwie części, to otrzymamy wektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\boldsymbol{B}} \\ \mathbf{x}^{\boldsymbol{R}} \end{bmatrix}$, gdzie $\mathbf{x}^{\boldsymbol{B}} \in \mathrm{R}^{m}$, a $\mathbf{x}^{\boldsymbol{R}} \in \mathrm{R}^{n-m}$, przy czym $\mathbf{x}^{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} x_1^B \\ x_2^B \\ \vdots \\ x_m^B \end{bmatrix}$, a $\mathbf{x}^{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} x_1^R \\ x_2^R \\ \vdots \\ x_{n-m}^R \end{bmatrix}$.

Wektor $\mathbf{x}^{\boldsymbol{B}}$ ma m składowych ponieważ $r(\mathbf{A}) = m$.

Od macierzy **A** do rozwiązania układu **Ax=b** – c.d.

Układ sprowadza się więc do postaci:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{B}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{B}} + \mathbf{A}_{\boldsymbol{R}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{R}} = \mathbf{b}$$

gdzie:

x_j^B to zmienne bazowe

x_j^R to zmienne niebazowe (wtórne)

$\mathbf{x}^{\boldsymbol{B}}$ wektor zmiennych bazowych

$\mathbf{x}^{\boldsymbol{R}}$ wektor zmiennych bazowych

Od macierzy **A** do rozwiązania układu **Ax=b** – c.d.

Zatem:

$$\mathbf{x}^{B} = \mathbf{A}_{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_{B}^{-1}\mathbf{A}_{R}\mathbf{x}^{R}$$

Jeśli w układzie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ustalimy dowolną bazę $\mathbf{A_B}$ składającą się z kolumn macierzy $\mathbf{A}$, to wektor zmiennych bazowych $\mathbf{x}^{B}$ można przedstawić powyższą zależnością.

Jeżeli $\mathbf{x}^{R}$ ustalimy w dowolny sposób, a następnie wyznaczymy $\mathbf{x}^{B}$, to rozwiązanie $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{B} \\ \mathbf{x}^{R} \end{bmatrix}$ jest rozwiązaniem układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Przykład

Układ:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$$
$$x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$$

Co jest równoważne zapisowi:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x_1 + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x_2 + \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}x_3 + \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}x_4 = \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$$

Jedna z baz to $A_B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$, zmienne x_1 i x_2 będą zmiennymi bazowymi, czyli $x^B = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, natomiast $A_R = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$, a $x^R = \begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$.

Przykład – c.d.

Układ można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Czyli

$$x_1 = 4 - 3x_3 + 3x_4$$
$$x_2 = 2 + x_3 - 2x_4$$

Jeżeli teraz ustalimy dowolne x_3 i x_4 np. $x_3 = 1$ i $x_4 = 2$, to wówczas $x_1 = 7$ a $x_2 = -1$. Jest to jedno z wielu rozwiązań tego układu.

Rozwiązanie bazowe

Definicja

Rozwiązaniem bazowym układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nazywamy takie rozwiązanie $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \in \mathrm{R}^n$, w którym wszystkie zmienne wtórne są równe zero $\mathbf{x}^{\boldsymbol{R}} = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\boldsymbol{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, gdzie $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \in \mathrm{R}^n, \quad \mathbf{x}^{\boldsymbol{B}} \in \mathrm{R}^m$.

Wniosek

Rozwiązanie bazowe układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ można otrzymać podstawiając $\mathbf{x}^{\boldsymbol{R}} = \mathbf{0}$

Rozwiązanie zdegenerowane

Definicja

Rozwiązanie bazowe nazywamy zdegenerowanym jeżeli choć jedna ze składowych wektora $\mathbf{x}^{\boldsymbol{B}}$ jest równa zeru.

Uwaga

Rozwiązania zdegenerowane, o ile występują w algorytmie simpleks, mogą prowadzić do zapętlenia algorytmu.

Liczba rozwiązań bazowych

Każde rozwiązani bazowe odpowiada jednej ustalonej bazie $\mathbf{A}_{\boldsymbol{B}}$.

Każdej bazie $\mathbf{A}_{\boldsymbol{B}}$ odpowiada inne rozwiązanie bazowe.

Zatem liczba różnych rozwiązań bazowych układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wynosi tyle, ile różnych baz $\mathbf{A}_{\boldsymbol{B}}$ można wyodrębnić z macierzy $\mathbf{A}$

Prowadzi to do następującego wniosku:

Maksymalna liczba rozwiązań bazowych układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, w którym $\mathbf{A}$ jest typu $m \times n$, $r(\mathbf{A}) = m$ oraz $m \leq n$ wynosi $\binom{n}{m}$

Twierdzenie 6

<u>Twierdzenie</u>

Jeżeli układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nie jest sprzeczny to ma co najmniej jedno rozwiązanie bazowe.

Zbiory wypukłe

Zbiór wypukły

<u>Definicja</u>

Zbiór $\mathrm{C} \subset \mathrm{R}^n$ nazywamy **wypukłym** wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda\mathbf{x_1} + (1-\lambda)\mathbf{x_2} \in \mathrm{C}$, dla dowolnych $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathrm{C}$ oraz $\lambda \in [0,1]$.

<u>Przykład</u>

Punkt wierzchołkowy

Definicja

Punkt $\mathbf{x} \in \mathrm{C}$ nazywamy **wierzchołkiem zbioru** wypukłego $\mathrm{C} \subset \mathrm{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie dwa punkty $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathrm{C}$ (gdzie $\mathbf{x_1} \neq \mathbf{x_2}$) spełniajace warunek

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x_1} + (1 - \lambda)\mathbf{x_2}$$

gdzie $\lambda \in (0,1)$.

Twierdzenia 7, 8 i 9

Twierdzenie

Zbiór rozwiązań układu równań liniowych postaci $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (gdzie $\mathbf{A}$ jest typu $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ oraz $\mathbf{b} \in \mathrm{R}^m$) jest zbiorem wypukłym.

Twierdzenie

Półprzestrzeń postaci $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq d$, gdzie $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$ jest zbiorem wypukłym.

Twierdzenie

Część wspólna dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Wniosek

Zbiór nieujemnych rozwiązań układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest zbiorem wypukłym

Wielościenny zbiór wypukły i wielościan wypukły

Definicja

Wielościennym zbiorem wypukłym nazywamy iloczyn skończonej liczby półprzestrzeni

Definicja

Wielościanem wypukłym nazywamy wielościenny zbiór wypukły i ograniczony

Przykład

Twierdzenia 10 i 11

Twierdzenie

Jeżeli zbiór K jest wielościanem wypukłym, to każdy jego punkt da się przedstawić jako wypukłą kombinację liniową punktów wierzchołkowych tego wielościanu.

Twierdzenie

Zbiór rozwiązań układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest zbiorem wielościennym wypukłym.

Wniosek

Jeżeli zbiór rozwiązań układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest ograniczony, to jest on wielościanem wypukłym.

Rozwiązania problemu PL

* Niesprzeczny problem PL:
  * ma skończone rozwiązanie optymalne (jedno lub nieskończenie wiele)
  * nie ma skończonego rozwiązania optymalnego

Własności problemów PL

Twierdzenia 12 i 13

Twierdzenie

Zbiór X (zbiór rozwiązań dopuszczalnych problemu PL) jest zbiorem wypukłym

Twierdzenie

Zbiór X jest zbiorem wielościennym wypukłym

Bazowe rozwiązanie dopuszczalne

Definicja

Bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym nazywamy każde nieujemne rozwiązanie bazowe problemu

Twierdzenia 14 i 15

Twierdzenie

Jeżeli wektor $\mathbf{x}_B \in \mathrm{X}$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, to jest on również punktem wierzchołkowym zbioru X.

Twierdzenie

Jeżeli wektor $\mathbf{x} \in \mathrm{X}$ jest punktem wierzchołkowym zbioru X, to jest on również dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Twierdzenie 16

Twierdzenie

Jeżeli problem PLS nie jest sprzeczny oraz funkcja celu jest ograniczona z góry (dołu) w zbiorze X rozwiązań dopuszczalnych problemu, to rozwiązanie optymalne zadania leży w co najmniej jednym punkcie wierzchołkowym zbioru X.

Twierdzenie 17

Twierdzenie

Jeżeli problem PLS ma więcej niż jedno rozwiązanie optymalne, to każda kombinacja wypukła tych rozwiązań jest również rozwiązaniem optymalnym.

Wniosek

Rozwiązań optymalnych należy szukać wśród dopuszczalnych rozwiązań bazowych układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$