BADANIA OPERACYJNE

„Badania operacyjne są sztuką dawania złych odpowiedzi na te praktyczne pytania, na które inne metody dają odpowiedzi jeszcze gorsze.”

T. Sayty

Standardowe zadanie programowania liniowego

Rozważamy proces, w którym zmiennymi są $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Proces poddany jest m ograniczeniom, zapisanymi w postaci:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

a_{ij}, b_i – znane współczynniki

Dopuszczamy jedynie nieujemne wartości x_j, czyli:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{2}$$

Zakładamy również, że:

$$b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{3}$$

Z procesem jest związana funkcja Z:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \tag{4}$$

$c_j, \quad j = 1, 2, ..., n$ – znane współczynniki

Zagadnienie polega na maksymalizacji (minimalizacji) funkcji Z (wzór (4)) spełniającej ograniczenia (1), (2), (3).

Zapis:

$$\mathrm{FC}: \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \rightarrow \quad \mathrm{MAX}$$

$$\mathrm{O}: \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \\ b_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{5}$$

Zapis w postaci macierzowej:

$$\mathrm{FC:}\quad Z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \to \mathrm{MAX}$$

$$\mathrm{O:}\begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{b} \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

☝ Bardzo powszechną w zagadnieniach praktycznych odmianą ograniczeń są ograniczenia w postaci nierówności.
To też są zagadnienia programowania liniowego ale
nie w postaci standardowej.

Przykład 1.

Zakład zamierza rozpocząć produkcję wyrobów W_1 i W_2. Wśród środków produkcyjnych, które zostaną użyte w produkcji dwa są limitowane. Limity te wynoszą: dla środka S_1 63 jednostki, a dla środka S_2 64 jednostki. Aby wyprodukować jednostkę wyrobu W_1 potrzeba 9 jednostek środka S_1 i 8 jednostek środka S_2. Aby wyprodukować jednostkę wyrobu W_2 potrzeba 7 jednostek S_1 i 8 jednostek S_2. Wyroby W_1 i W_2 są niezbędne do produkcji urządzenia U. Jedno urządzenie U wymaga 3 jednostek wyrobu W_1 i 2 jednostek wyrobu W_2. Produkcja będzie opłacalna, jeżeli zakład sprzeda wyroby W_1 i W_2 potrzebne do wytworzenia co najmniej 6 jednostek urządzenia U.

Wiedząc, że cena wyrobu W_1 będzie wynosić 6, a cena wyrobu W_2 5 określ wielkość produkcji maksymalizującej zysk ze sprzedaży.

		W_1	W_2	
①	S_1	9	7	63
②	S_2	8	8	64
③	U	3	2	6
	cena	6	5	

Zmienne decyzyjne:

x_1 – wielkość produkcji wyrobu W_1

x_2 – wielkość produkcji wyrobu W_2

Funkcja celu:

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \mathrm{MAX}$$

Ograniczenia:

① $$9x_1 + 7x_2 \leq 63$$

② $$8x_1 + 8x_2 \leq 64$$

③ $$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

Warunki brzegowe:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Zadanie programowania liniowego:

FC: $Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \mathrm{MAX}$

O:

① $9x_1 + 7x_2 \le 63$

② $x_1 + x_2 \le 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$

WB: $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

☝ Ograniczenia w postaci nierówności.
To nie jest standardowe zadanie programowania liniowego

METODA GEOMETRYCZNA

Zadanie programowania liniowego z dwoma zmiennymi decyzyjnymi można rozwiązać metodą geometryczną (szczegóły na laboratorium).

Na podstawie tej metody otrzymujemy zbiór punktów, a następnie sprawdzamy, w którym z nich wartość funkcji celu jest największa (lub najmniejsza).

Rozwiązanie dla zadania z Przykładu 1.:

$A(2,0)$	$Z(2,0)=6\cdot 2+5\cdot 0=12$	
$B(7,0)$	$Z(7,0)=6\cdot 7+5\cdot 0=42$	
$C(3.5,4.5)$	$Z(3.5,4.5)=6\cdot 3.5+5\cdot 4.5=43.5$	MAX
$D(0,8)$	$Z(0,8)=6\cdot 0+5\cdot 8=40$	
$E(0,3)$	$Z(0,3)=6\cdot 0+5\cdot 3=15$	

Odpowiedź:

Aby zysk był maksymalny, należy wyprodukować 3.5 jednostki W_1 oraz 4.5 jednostki W_2.

ZADANIE DUALNE

Przykład 2.

Zakład produkuje cztery wyroby W_1, W_2, W_3 i W_4. Wśród środków produkcyjnych, używanych w procesie wytwarzania wyrobów dwa są limitowane. Limity te, oraz ilości środków potrzebne do wytworzenia poszczególnych wyrobów zostały przedstawione w tabeli.
Znając jednostkowe ceny wyrobów, określić taki plan produkcji aby zysk był maksymalny.

	W_1	W_2	W_3	W_4	
S_1	1	3	1	1	600
S_2	4	1	1	5	1200
cena	8	9	6	10	

Zmienne decyzyjne:

x_i – wielkość produkcji wyrobu W_i $\quad i = 1...4$

Model matematyczny:

FC:

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 10x_4 \to \mathrm{MAX}$$

O:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 600$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 1200$$

WB:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Zadanie pierwotne:

FC: $Z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \to \mathrm{MAX}$

O: $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

WB: $\mathbf{x} \geq 0$

Zadanie dualne:

FC: $\widehat{Z} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \to \mathrm{MIN}$

O: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$

WB: $\mathbf{y} \geq 0$

Model matematyczny zadania dualnego:

FC:

$$\widehat{Z}(y_1, y_2) = 600y_1 + 1200y_2 \rightarrow \text{MIN}$$

O:

$$\begin{aligned} y_1 + 4y_2 &\geq 8 \\ 3y_1 + y_2 &\geq 9 \\ y_1 + y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 5y_2 &\geq 10 \end{aligned}$$

WB:

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Interpretacja zadania dualnego

Konkurent postanawia wykupić zapasy środków produkcji od producenta, i chce zminimalizować koszty materiałów (ma kupić 600 jednostek S_1 i 1200 jednostek S_2).

Zmienne decyzyjne w zadaniu dualnym:

y_1 – cena jednostki środka produkcji S_1
y_2 – cena jednostki środka produkcji S_2

$$\widehat{Z}(y_1, y_2) = 600y_1 + 1200y_2 \rightarrow \mathrm{MIN}$$

Interpretacja zadania dualnego c. d.

Wyprodukowanie wyrobów wiąże się z kosztem środków S_1 i S_2. Konkurent, aby zachęcić producenta do sprzedaży materiałów musi mu zapłacić co najmniej tyle, ile producent uzyskałby ze sprzedaży wyrobów, które produkuje.

$$y_1 + 4y_2 \geq 8$$

$$3y_1 + y_2 \geq 9$$

$$y_1 + y_2 \geq 6$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 10$$

Twierdzenie o dualności

Zadanie pierwotne ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy zadanie dualne ma rozwiązanie, oraz:

$$Z(\mathrm{MAX}) = \widehat{Z}(\mathrm{MIN})$$

wnioski:

1. Rozwiązując jedno z zadań, automatycznie rozwiązujemy też drugie.
2. Twierdzenie ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ czasami łatwiej jest rozwiązać zadanie dualne (mniej zmiennych).

Na podstawie metody geometrycznej:

$A(0,9)$ $\qquad \widehat{Z}(A) = 10800$

$B(3/2, 9/2)$ $\qquad \widehat{Z}(B) = 6300$

$C(5,1)$ $\qquad \widehat{Z}(C) = 4200$ $\qquad$ MIN

$D(10,0)$ $\qquad \widehat{Z}(D) = 6000$

Aby koszt materiałów był najmniejszy i wynosił 4200, konkurent musi zapłacić za jednostkę S_1 5, a za jednostkę S_2 1.

Na podstawie twierdzenia o dualności:

Maksimum FC zadania pierwotnego jest równe minimum FC zadania dualnego.

Zysk producenta wyniesie również 4200

Jakie jest rozwiązanie zadania pierwotnego?

Twierdzenie o równowadze.

Twierdzenie o równowadze

Jeżeli i–ty warunek zadania pierwotnego (ZP) jest (chociaż w jednym) optymalnym rozwiązaniu spełniony z nierównością (ostro), to odpowiadająca mu i–ta zmienna y_i w (dowolnym) optymalnym rozwiązaniu zadania dualnego (ZD) przyjmuje wartość zero.
Dla zmiennej $x_i > 0$ w rozwiązaniu optymalnym ZP odpowiadające jej i–te ograniczenie w ZD jest ograniczeniem równościowym.

Twierdzenie jest również słuszne w przeciwną stronę.

Rozwiązanie przykładu:

$$y_1 = 5 \quad y_2 = 1$$

Sprawdzenie ograniczeń ZD:

$$j = 1: \quad 5 + 4 \cdot 1 > 8$$
$$j = 2: \quad 3 \cdot 5 + 1 > 9$$
$$j = 3: \quad 5 + 1 = 6$$
$$j = 4: \quad 5 + 5 \cdot 1 = 10$$

Nierówności ostre dla $j = 1$ i $j = 2$:

$$\Downarrow$$

Dla rozwiązania optymalnego ZP $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$

Ponieważ: $y_1 = 5 > 0 \quad y_2 = 1 > 0$

Ograniczenia 1 i 2 w ZP są ograniczeniami równościowymi (przy czym $x_1 = 0$, $x_2 = 0$):

$$x_3 + x_4 = 600$$
$$x_3 + 5x_4 = 1200$$

$$x_3 = 450 \quad x_4 = 150$$

Odpowiedź do zadania pierwotnego:

Aby zysk był maksymalny, producent musi wyprodukować 450 jednostek W_3 i 150 jednostek W_4. Zysk wyniesie 4200.

Szczegółowe zasady formułowania zadania dualnego

Zadanie pierwotne	**Zadanie dualne**
maksymalizacja	minimalizacja

Zadanie pierwotne	**Zadanie dualne**
Ograniczenia	Zmienne
i - te: $\geq$	$y_i \leq 0$
i - te: $\leq$	$y_i \geq 0$
i - te: $=$	y_i dowolne

Zadanie pierwotne	**Zadanie dualne**
Zmienne	Ograniczenia
$x_j \geq 0$	j - te: $\geq$
$x_j \leq 0$	j - te: $\leq$
x_j dowolne	j - te: $=$

Przykład 3.

Dla podanego zadania pierwotnego zapisać zadanie dualne.

$$\text{FC}: \quad Z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \text{MAX}$$

$$\begin{aligned} \text{O}: \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 20 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \le 50 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 40 \end{aligned}$$

$$\text{WB}: \quad x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \le 0 \quad x_4 \ \text{dowolne}$$

Zadanie dualne:

$$\text{FC}: \quad \widehat{Z}(\mathbf{y}) = 20y_1 + 50y_2 + 40y_3 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\text{O}: \quad \begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 &\geq 3 \\ -3y_1 + 3y_2 + y_3 &\leq 1 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{WB}: \quad y_1 \ \text{dowolne} \qquad y_2 \geq 0 \qquad y_3 \leq 0$$

Na dzisiaj wystarczy...