Metody Optymalizacji

Dr hab. inż. Maciej Komosiński, mgr inż. Agnieszka Mensfelt

Wstęp

W ogólności optymalizacja związana jest z maksymalizowaniem lub minimalizowaniem pewnej wielkości – np. maksymalizacja zysku z przedsięwzięcia, minimalizacja kosztu inwestycji, minimalizacja długości trasy, maksymalizacja przepustowości sieci, itp. Mamy więc do czynienia z próbą znalezienia ekstremum pewnej funkcji, nazywanej funkcją celu.

Co powinniśmy zdefiniować przy rozważaniu problemu optymalizacji:

- decyzje jakie jesteśmy w stanie podjąć, próbując osiągnąć wyznaczony cel
- ograniczenia, jakie należy uwzględnić przy podejmowaniu decyzji (nie wszystkie decyzje są możliwe)
- cel, jaki chcemy osiągnąć wyrażony poprzez decyzje (funkcję celu)

Przykład: *Rozważmy problem transportu towarów z miasta A do miasta B przez C. Celem będzie tutaj wytyczenie trasy o najkrótszym czasie przejazdu. Decyzjami (lub wariantami decyzyjnymi) będą różne trasy. Ograniczenia to założenie, że trasa zaczyna się w mieście A, kończy w mieście B i musi przechodzić przez miasto C. Funkcją celu będzie przyporządkowanie każdej trasie jej kosztu (czasu przejazdu), wyznaczoną przez zsumowanie wszystkich kosztów czasowych odcinków dróg z jakich składa się trasa.*

Programowanie matematyczne

Ogólna postać zadania programowania matematycznego jest następująca:

(max lub min) $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

przy ograniczeniach (p.o.) $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$

$g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$

...

$g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$

Tutaj funkcja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest **funkcją celu**, która ma zostać minimalizowana lub maksymalizowana, przy założeniu, że spełnione są wszystkie ograniczenia (nierówności).

Funkcje mogą być dowolnej postaci. Jeśli chociaż jedna z nich jest nieliniowa, to cały problem jest **nieliniowy**. Jeśli wszystkie funkcje (zarówno f jak i g) są liniowe, to mówimy o problemie **programowania liniowego** (PL). Problem PL jest dużo prostszy od nieliniowego, stąd pożądane są funkcje takiego typu. Ogólnie problem PL można sformułować przy założeniu, że funkcje mają postać liniową, czyli są postaci:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

Mamy więc taką (standardową) postać problemu PL (zobacz też http://pl.wikipedia.org/wiki/Programowanie_liniowe):

$$
\begin{aligned}
&\text{(max lub min) } z = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
&\textit{p.o.} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&\qquad\; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\qquad\; \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\qquad\; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&\qquad\; x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

Zwróćmy uwagę na ostatnie ograniczenie – wszystkie zmienne muszą być nieujemne! To ograniczenie musi zawsze występować w standardowej postaci problemu programowania liniowego. Co do reszty, to należy pamiętać że wszystkie znaki w ograniczeniach są postaci „≤”, ale nic nie szkodzi, jeśli potrzebujemy użyć ograniczenie w przeciwną stronę, tzn. ze znakiem „≥” po prostu przemnażając całą nierówność przez –1.

Podobnie jest z maksymalizacją i minimalizacją. Jeśli mamy problem z maksymalizacją to możemy uzyskać minimalizację po prostu przemnażając funkcję celu przez –1, i odwrotnie (ogólnie minimalizacja *f(x)* jest tym samym co maksymalizacja *–f(x)*)

<u>Przykład:</u> Przykładowy problem PL (programowania liniowego):

funkcja celu: $(max)\ z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4$

ograniczenia: $x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq -20$

$2x_1 - x_2 - x_4 \geq 15$

$3x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 14$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Wyróżniamy jeszcze problem **programowania liniowego całkowitoliczbowego**, w którym dodatkowo zakładamy, że wszystkie zmienne $x_1, x_2, ..., x_n$ muszą być całkowite, tj. przyjmować wartości postaci 0, 1, 2, ... Problem ten jest dużo trudniejszy, należy do klasy problemów NP-zupełnych, stąd ograniczenia do całkowitych wartości zmiennych należy unikać (o ile można). W szczególności, jeśli dodatkowo narzucamy ograniczenie, że zmienne muszą być nie większe od 1 (czyli przyjmują tylko 0 lub 1), to mamy do czynienia z **programowanie zerojedynkowym (binarnym)**.

Zadania z treścią

Poniżej przykładowe zadania z treścią, w których celem jest przedstawienie problemu w sformalizowanym zapisie jako problem PL.

<u>Zadanie 1:</u> Rolnik postanowił zasadzić sadzonki trzech typów – A, B i C. Każda z sadzonek zajmuje odpowiednią ilość miejsca: A – 2 m^2, B – 1,5m^2, C – 2,5m^2. Dodatkowo, każde drzewo potrzebuje odpowiedniej ilości nawozu – A – 10 jednostek, B – 15 jednostek, C – 20 jednostek. Po pewnym czasie nasz rolnik będzie miał z sadzonek zysk: A – 500zł, B – 400zł, C – 700zł. Mając ograniczony obszar pola (500m^2) i ograniczoną ilość nawozu (2000 jednostek), wybierz sadzonki tak, aby rolnik zarobił najwięcej.

<u>Zadanie 2:</u> Zakłady Przemysłu Cukierniczego 8 SIERPNIA produkują dwa rodzaje popularnych cukierków: sugusy i ciągutki. Do produkcji cukierków zużywa się, w różnych proporcjach, dwie masy: mleczną i bakaliową. W celu uzyskania 100 kg sugusów miesza się 70 kg masy mlecznej i 30 kg masy bakaliowej, natomiast w celu uzyskania 100 kg ciągutek – 10 kg masy mlecznej i 90 kg masy bakaliowej. W pewnym tygodniu zakład dysponuje 7000 kg masy mlecznej i 9000 kg masy bakaliowej. Mimo wysokich cen cukierków ZPC 8 SIERPNIA nie mają trudności ze sprzedażą swoich wyrobów. Cena sugusów wynosi 13 zł/kg, a ciągutek 16 zł/kg.

<u>Zadanie 3:</u> Przedsiębiorca chce zainwestować najwyżej 10 000 zł w dwa fundusze: fundusz akcji i fundusz obligacji. Średni roczny zysk funduszu akcji wynosi 12%, zaś zysk funduszu obligacji 9%. Przedsiębiorca postanowił, że w fundusz obligacji zainwestuje co najmniej 2 000 zł i nie więcej niż 6 000 zł w fundusz akcji. Ponadto przedsiębiorca nie chce zainwestować w fundusz akcji więcej niż w fundusz obligacji. Ile pieniędzy powinien on zainwestować w fundusz akcji, a ile w obligacji, aby osiągnąć maksymalny zysk w ciągu roku? Jakiego zysku może wówczas oczekiwać?

Zadanie 4: Zakład produkcyjny produkuje dwa typy wyrobów: krzesła i stoły. Każdy z tych produktów musi być złożony z części a następnie wykończony i zapakowany. Czas potrzebny na złożenie krzesła i stołu wynosi odpowiednio 3 i 4 jednostki czasu. Wykończenie i zapakowanie krzesła i stołu wynosi odpowiednio 6 i 2 jednostki czasu. Producent dysponuje 60 jednostkami czasu na składanie wyrobów i 32 jednostkami czasu na wykończenie i zapakowanie. Każde krzesło przynosi zysk wielkości 20 jednostek a stół - 24 jednostki. Ile krzeseł i ile stołów powinien zakład wyprodukować dla maksymalizacji zysku?

Zadanie 5: Rolnik postanowił zasadzić sadzonki. Ma do dyspozycji n sadzonek. Każde z sadzonek zajmuje odpowiednią ilość miejsca a_i. Dodatkowo, każda sadzonka potrzebuje odpowiedniej ilości nawozu – b_i. Po pewnym czasie nasz rolnik będzie miał z sadzonek zysk: c_i. Mając ograniczony obszar pola (A) i ograniczoną ilość nawozu (B), wybierz sadzonki tak, aby rolnik zarobił najwięcej.

Zadanie 6: Pewna fabryka produkuje wyroby z surowców, przy czym mamy n wyrobów i m surowców. Ilość j-tego surowca potrzebny do wyprodukowania i-tego wyrobu oznaczymy przez a_{ij}. W jakich ilościach produkować wyroby dla maksymalizowania zysku, skoro zysk z i-tego wyrobu to c_i, przy czym mamy też ograniczoną ilość każdego surowca (b_j).

Zadanie 7: Problem plecakowy – mamy 7 elementów, z których każdy ma pewną wagę (wypisaną w tabelce) oraz zysk. Jakie elementy (mamy do dyspozycji po jednej sztuce każdego) należy włożyć do plecaka, aby maksymalizować zysk, przy czym do plecaka może się zmieścić ilość przedmiotów o całkowitej wadze nie przekraczającej 20.

element nr	waga	zysk
1	4	4
2	7	10
3	3	3
4	10	13
5	5	6
6	5	7
7	15	20

Zadanie 8: Mamy trzy magazyny w różnych miastach (Detroit, Pittsburgh i Buffalo), w których znajduje się odpowiednio 250, 130 i 235 ton papieru. Są cztery wydawnictwa (Boston, New York, Chicago i Indianapolis), które potrzebują odpowiednio 75, 230, 240 i 70 ton papieru aby produkować nowe książki. Mamy następujące koszty transportu z miasta do miasta (za tonę papieru):

From \ To	**Boston (BS)**	**New York (NY)**	**Chicago (CH)**	**Indianapolis (IN)**
Detroit (DT)	15	20	16	21
Pittsburgh (PT)	25	13	5	11
Buffalo (BF)	15	15	7	17

Zadanie 9: Mamy grupę ludzi, którzy mają zostać wybrani do pracy w firmie informatycznej. Każdy z nich oczekuje też pewnej konkretnej pensji.

Imię	Pensja
Jan Kowalski	5000
Anna Nowak	4500
Tomasz Niewiadomski	6000
Ewa Kaczmarek	3500

Posiadają oni następujące umiejętności:

Nazwa	**J.K.**	**A.N.**	**T.N.**	**E.K.**
J. Angielski	+	-	-	+
J. Niemiecki	+	-	+	-
Prawo jazdy	-	+	+	+
Dyspozycyjność w weekend	-	+	+	+
Zdolności kierownicze	+	+	-	-
Programowanie	+	+	+	-
Znajomość marketingu	-	-	+	+
Obsługa sieci komputerowej	+	+	-	-
Techniki optymalizacji	-	-	+	+

Jakie osoby należy wybrać tak, aby była przynajmniej jedna osoba, która posiada każdą z umiejętności?