

Optymalizacja. Programowanie Matematyczne

dr hab. inż. Maciej Komosiński, prof. PP

Instytut Informatyki
Politechnika Poznańska
www.cs.put.poznan.pl/mkomosinski

Tematyka

- Problemy – wykorzystanie zasobów, problemy transportowe, planowanie sieci dystrybucji, optymalizacja rozmieszczenia towarów w magazynie, przydział częstotliwości w sieci komórkowej, harmonogramowanie czasu pracy, projektowanie inżynierskie
- Metodyka – Programowanie Matematyczne: optymalizacja liniowa, nieliniowa, ciągła, całkowno-cyfrowa
- Narzędzia – solver MS Excel/OpenOffice, Ip_solve (<http://lpsolve.sourceforge.net/>), PuLP (<https://pythonhosted.org/PuLP/>), GAMS (<https://www.gams.com/>) i inne

Literatura

- Badania operacyjne dla informatyków (Błażewicz i in.)
- Badania operacyjne z komputerem (Trzaskalik)
- Decyzje managerskie z Excelem (Szapiro, Nykowski)
- Badania operacyjne w przykładach i zadaniach (Kukuła)

Optymalizacja – myślenie w kategoriach celów

Myślenie heurystyczne



Optymalizacja

- Jakie są moje cele?
Co chcę osiągnąć?
- Jakie decyzje mogę podjąć?
- Jakie ograniczenia muszę
uwzględnić?
- Jak ocenić wpływ decyzji na
cele?

Przykład – ustalanie lokalizacji towarów w zautomatyzowanym magazynie

Myślenie heurystyczne



Jeżeli towar jest często zamawiany, to należy go umieścić blisko obszaru kompletowania.



Przykład – ustalanie lokalizacji towarów w zautomatyzowanym magazynie

- Jakie są moje cele?
Co chcę osiągnąć?
- Jakie decyzje mogę podjąć?
- Jakie ograniczenia muszę uwzględnić?
- Jak ocenić wpływ decyzji na cele?
- Średnia długość drogi podczas kompletowania zlecenia powinna być jak najkrótsza.
- Przydział towarów do lokalizacji w magazynie
- Przydział każdego produktu
- Ograniczenia technologiczne
- Funkcja nieliniowa służąca do obliczania średniej długości drogi

Elementy zagadnienia optymalizacji

- Jakie są moje cele? Co chcę osiągnąć?
- Jakie decyzje mogę podjąć?
- Jakie ograniczenia muszę uwzględnić?
- Jak ocenić wpływ decyzji na cele?
- Kryteria. Funkcje celu
- Zmienne decyzyjne
- Ograniczenia. Przestrzeń rozwiązań dopuszczalnych
- Sposób obliczania funkcji celu
 - Analityczny
 - Symulacyjny

Przykład – ustalanie lokalizacji towarów w zautomatyzowanym magazynie

- Kryteria. Funkcje celu
- Zmienne decyzyjne
- Ograniczenia. Przestrzeń rozwiązań dopuszczalnych
- Sposób obliczania funkcji celu
 - Analityczny
 - Symulacyjny
- Średnia długość drogi podczas zlecenia.
- Przydział towarów do lokalizacji w magazynie
- Przydział każdego produktu.
- Ograniczenia technologiczne
- Funkcja nieliniowa

Co powoduje, że problemy optymalizacji są trudne?

- Wielkość przestrzeni rozwiązań
- Nieciągłość przestrzeni rozwiązań
- Nieliniowość
- Ograniczenia
- Problemy NP-trudne

Przestrzeń rozwiązań w problemie magazynowym

- 400 lokalizacji
- 200 produktów
- Jeśli dowolnie wiele produktów może leżeć w tym samym miejscu:
 - Liczba rozwiązań:

Przestrzeń rozwiązań w problemie magazynowym

- 400 lokalizacji
- 200 produktów
- Jeśli dowolnie wiele produktów może leżeć w tym samym miejscu:
 - Liczba rozwiązań: $400^{200} \approx 10^{520}$
- Jeśli nie:
 - Liczba rozwiązań:

Przestrzeń rozwiązań w problemie magazynowym

- 400 lokalizacji
- 200 produktów
- Jeśli dowolnie wiele produktów może leżeć w tym samym miejscu:
 - Liczba rozwiązań: $400^{200} \approx 10^{520}$
- Jeśli nie:
 - Liczba rozwiązań: $\frac{400!}{(400-200)!} \approx 10^{494}$

Prosty przykład

- Firma produkuje 2 produkty: farba-1 i farba-2.
- Zysk z produkcji
litra farby-1 wynosi 2zł, a z litra farby-2 3zł
- Do produkcji litra farby-1 potrzeba
0.1 litra półproduktu-A i 0.2 litra półproduktu-B.
- Do produkcji litra farby-2 potrzeba
0.3 litra półproduktu-A i 0.2 litra półproduktu-B.
- W ciągu miesiąca można zużyć
5000 litrów półproduktu-A i 6000 litrów półproduktu-B.
- Ile litrów farby-1 i farby-2 powinna produkować firma w ciągu
miesiąca, aby osiągnąć największy zysk?

Model matematyczny

Zmienne decyzyjne

- x_1 – produkcja farby-1
- x_2 – produkcja farby-2

Funkcja celu

- maksymalny zysk

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

Model matematyczny

Ograniczenia

- Nie można produkować ujemnej ilości farby
 - $x_1, x_2 \geq 0$
- Nie można przekroczyć dostępnej ilości żadnego z półproduktów
 - $0.1x_1 + 0.3x_2 \leq 5000$ (półprodukt A)
 - $0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 6000$ (półprodukt B)

Model matematyczny

- Maksymalizuj

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

- Przy ograniczeniach

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$0.1x_1 + 0.3x_2 \leq 5000$$

$$0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 6000$$

Graficzne rozwiązanie problemu optymalizacji

- Maksymalizuj
 $z = x_1 + x_2$
- Przy ograniczeniach
 $x_1, x_2 \geq 0$
 $2x_1 + 3x_2 \leq 6$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 6$

Metoda sympleksów

https://pl.wikipedia.org/wiki/Algorytm_sympleksowy

- Klasyczna metoda dla problemów liniowych (Dantzig, 1953)
 - Wykorzystuje fakt, że rozwiązanie optymalne jest rozwiązaniem wierzchołkowym
 - Krokowo przechodzi od jednego wierzchołka do innego o lepszej wartości funkcji celu
- Inne metody – metody punktu wewnętrznego

Analiza wrażliwości i analiza parametryczna

- Przydatne przy analizie ryzyka: ponieważ przyszłość jest nieznana, powinniśmy liczyć się ze zmianą warunków na podstawie których zbudowaliśmy zadanie PM
- Jak (i czy) zmiana prawych stron ograniczeń wpływa na optymalną wartość funkcji celu i wartości zmiennych decyzyjnych?
- Które ograniczenia są aktywne, a które nie?
- W jakim zakresie mogą się zmieniać współczynniki w funkcji celu, żeby otrzymane wartości zmiennych decyzyjnych i wartość optimum funkcji celu pozostały takie same?
- Jak będzie się zmieniać wartość optimum funkcji celu i powiązane wartości zmiennych decyzyjnych, kiedy będziemy modyfikowali wybrany, pojedynczy parametr oryginalnego zadania PM?

Zmienne ciągłe i dyskretne

- Zmienne ciągłe mogą (teoretycznie) przyjmować dowolne wartości rzeczywiste (z pewnego zakresu)
- Zmienne dyskretne mogą przyjmować tylko pewne wartości, np.:
 - Zmienne całkowitoliczbowe $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \{0, 1, 2, \dots\}$
 - Zmienne binarne $\{0, 1\}$

Problemy optymalizacji – nazewnictwo i algorytmy

- Liniowe problemy optymalizacji – programowanie liniowe
- Liniowe dyskretne/całkowitoliczbowe/binarne problemy optymalizacji – dyskretne/całkowitoliczbowe/binarne programowanie liniowe
- Liniowe mieszane dyskretne/całkowitoliczbowe/binarne problemy optymalizacji – mieszane dyskretne/całkowitoliczbowe/binarne programowanie liniowe

Problemy liniowe ciągłe a dyskretne; zaokrąglanie

- Ograniczenie zmiennych do wartości dyskretnych utrudnia problem
- Jeśli to możliwe, należy unikać wprowadzania takich ograniczeń
- Jeśli już mamy problem całkowitoliczbowy, może się wydawać że rozwiązanie problemu ciągłego i potem zaokrąglenie wartości zmiennych do liczb całkowitych da rozwiązanie optymalne, ale tak nie jest
- Optymalne wartości zmiennych całkowitych mogą być bardzo daleko od optymalnych wartości ciągłych
- Przykład rozwiązania problemu całkowitoliczbowego – patrz prezentacja algorytmu *Branch and Bound*
- Przykład i efekty naiwnego zaokrąglania:

<https://www.youtube.com/watch?v=WAwtgxHLqBY>

Przykład – wykorzystanie zasobów

- Firma produkuje cztery rodzaje farb
- Ceny jednostkowe tych farb to: 1.25, 1.5, 1.7, 2.4
- Koszty jednostkowe produkcji to: 1, 1.2, 1.3, 1.9
- Dwa półprodukty dostępne w ilościach: 10000 i 12000
- Roboczogodziny dostępne w ilości 1300

Przykład – wykorzystanie zasobów

- Firma produkuje cztery rodzaje farb
- Ceny jednostkowe tych farb to: 1.25, 1.5, 1.7, 2.4
- Koszty jednostkowe produkcji to: 1, 1.2, 1.3, 1.9
- Dwa półprodukty dostępne w ilościach: 10000 i 12000
- Roboczegodziny dostępne w ilości 1300
- Zapotrzebowania na półprodukty:

Półprodukt 1:	0.1	0.1	0.15	0.2
Półprodukt 2:	0.09	0.13	0.11	0.19
- Zapotrzebowania na roboczegodziny:
0.01, 0.017, 0.014, 0.019

Zapis matematyczny

- Maksymalizuj

$$z = 0.25 x_1 + 0.3 x_2 + 0.4 x_3 + 0.5 x_4$$

- Przy ograniczeniach

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$0.1 x_1 + 0.1 x_2 + 0.15 x_3 + 0.2 x_4 \leq 10000$$

$$0.09 x_1 + 0.13 x_2 + 0.11 x_3 + 0.19 x_4 \leq 12000$$

$$0.01 x_1 + 0.017 x_2 + 0.014 x_3 + 0.019 x_4 \leq 1300$$

Przykład: problem transportowy

- Firma posiada fabryki w 5 lokalizacjach w Polsce: Poznan, Wroclaw, Warszawa, Krakow, Gdansk
- Fabryki te dostarczają towary do 9 regionów obsługiwanych przez hurtownie w lokalizacjach: Poznan, Wroclaw, Warszawa, Krakow, Gdansk, Szczecin, Lodz, Katowice, Lublin
- Miesięczne możliwości produkcyjne poszczególnych fabryk (w paletach) wynoszą:
 - Gdansk 2000
 - Krakow 1500
 - Poznan 1500
 - Warszawa 2000
 - Wroclaw 1300

Przykład: problem transportowy

Miesięczne zapotrzebowania poszczególnych regionów (w paletach) wynoszą:

- Gdansk 1000
- Katowice 1300
- Krakow 1200
- Lublin 400
- Lodz 500
- Poznan 800
- Szczecin 300
- Warszawa 1400
- Wroclaw 700

Przykład: problem transportowy

- Znane są odległości pomiędzy każdą fabryką a każdą hurtownią
- Koszt transportu jednej palety wynosi 0.25 zł za kilometr
- Zapotrzebowania każdego regionu muszą być zaspokojone przez hurtownię zlokalizowaną w tym regionie
- Możliwości produkcyjne fabryk nie mogą zostać przekroczone
- Nie należy też produkować nadmiaru niepotrzebnego towaru
- Należy ustalić ile palet należy dostarczać rocznie z każdej fabryki do każdej hurtowni, aby zminimalizować koszty przewozów

Zapis matematyczny

Indeksy

- $i = 1, \dots, I$ fabryki
- $j = 1, \dots, J$ regiony

Zmienne

- x_{ij} – liczba palet dostarczanych z fabryki i do regionu j

Dane

- M_i – możliwości produkcyjne fabryki i
- Z_j – zapotrzebowania regionu j
- O_{ij} – odległość pomiędzy fabryką i a hurtownią w regionie j
- KT – koszt transportu

Zapis matematyczny

- Minimalizuj
 - Koszt = $\sum_i \sum_j x_{ij} O_{ij} KT$
- Przy ograniczeniach
 - $\sum_i x_{ij} \geq Z_j$ dla każdego $j = 1, \dots, J$
 - $\sum_j x_{ij} \leq M_i$ dla każdego $i = 1, \dots, I$
 - $x_{ij} \geq 0$ dla każdego $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$

Optymalizacja rozmieszczenia towarów w magazynie

- W magazynie znajduje się I lokalizacji
- Przechowywanych jest $J \leq I$ produktów
- W jednym kursie wózek przywozi tylko jeden towar
- Znane są odległości każdej lokalizacji od punktu kompletowania
- Znane są miesięczne zapotrzebowania (liczby zamówień) na poszczególne produkty
- W jakich lokalizacjach należy umieścić produkty, aby wózek pokonywał najkrótszą drogę?

Zapis matematyczny

Indeksy

- $i = 1, \dots, I$ lokalizacje
- $j = 1, \dots, J$ produkty

Zmienne

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$ – 1 jeżeli produkt j jest umieszczony w lokalizacji i

Dane

- O_i – odległość lokalizacji i od punktu kompletowania
- Z_j – miesięczna liczba zamówień produktu j

Zapis matematyczny

- Minimalizuj
 - $\text{Droga} = 2 \sum_i \sum_j x_{ij} O_i Z_j$
- Przy ograniczeniach
 - $\sum_i x_{ij} = 1$ dla każdego $j = 1, \dots, J$
 - $\sum_j x_{ij} \leq 1$ dla każdego $i = 1, \dots, I$

Optymalizacja rozmieszczenia towarów w magazynie 2

- Dodatkowo znane są liczby tzw. zamówień podwójnych – wózek w jednym kursie kompletuje dwa towary

Zapis matematyczny

Indeksy

- $i, i2 = 1, \dots, I$ lokalizacje
- $j, j2 = 1, \dots, J$ produkty

Zmienne

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$ – 1 jeżeli produkt j jest umieszczony w lokalizacji i

Dane

- O_i – odległość lokalizacji i od punktu kompletowania
- O_{ii2} – odległość lokalizacji i i $i2$
- Z_j – miesięczna liczba zamówień produktu j
- ZP_{jj2} – miesięczna liczba podwójnych zamówień produktów j i $j2$

Podwójne zamówienia

- Minimalizuj:
 - $$\text{Droga} = 2 \sum_i \sum_j x_{ij} O_i Z_j + \sum_i \sum_j x_{ij} O_i \sum_{j2} ZP_{jj2} + 0.5 \sum_i \sum_j \sum_{i2} \sum_{j2} x_{ij} x_{i2j2} O_{i i2} ZP_{j j2}$$
- Przy ograniczeniach
 - $\sum_i x_{ij} = 1$ dla każdego $j = 1, \dots, J$
 - $\sum_j x_{ij} \leq 1$ dla każdego $i = 1, \dots, I$

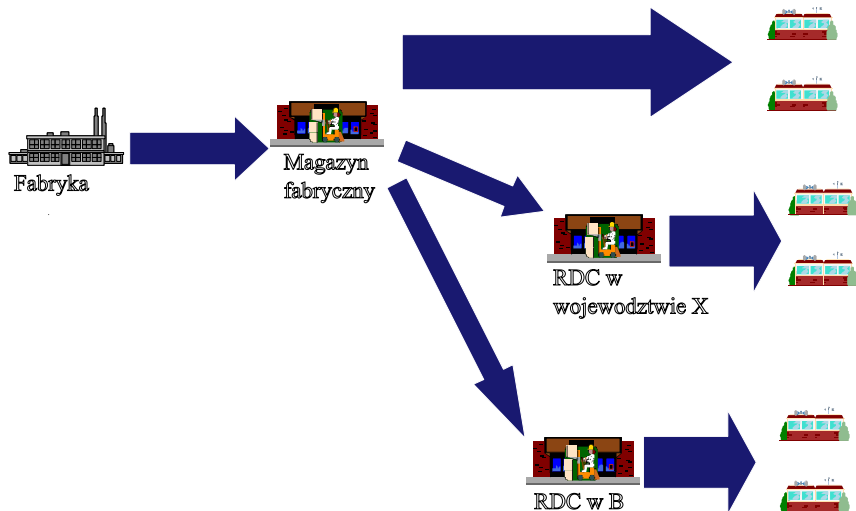
Optymalizacja systemu dystrybucji

- Firma posiada jedną fabrykę zlokalizowaną w Poznaniu
- Znane są zapotrzebowania na jej produkty w poszczególnych regionach kraju
- Firma rozważa utworzenie pewnej liczby centrów dystrybucji (magazynów) obsługujących jeden lub więcej regionów. Znany jest zbiór potencjalnych lokalizacji tych centrów.
- Znane są odległości poszczególnych potencjalnych lokalizacji centrów dystrybucji od fabryki oraz jednostkowe koszty transportu z fabryki do centrów

Optymalizacja systemu dystrybucji

- Znane są odległości pomiędzy poszczególnymi potencjalnymi lokalizacjami centrów dystrybucji a regionami. Znane są też jednostkowe koszty transportu z centrów dystrybucji do regionów. Koszty te są wyższe niż koszty transportu z fabryki do centrów dystrybucji.
- Znane są dodatkowe koszty przepływu palet przez centrum dystrybucji. Są one zerowe w Poznaniu gdyż centrum dystrybucji może być obecnie istniejący magazyn fabryczny.
- Należy ustalić w jakich lokalizacjach będą tworzone centra dystrybucji oraz jakie regiony będą one obsługiwały.

Optymalizacja systemu dystrybucji



Zapis matematyczny

Indeksy

- $i = 1, \dots, I$ potencjalne lokalizacje centrów dystrybucji
- $j = 1, \dots, J$ regiony

Zmienne

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$ – 1 jeżeli region j jest obsługiwany przez centrum dystrybucji i

Zapis matematyczny

Dane

- O_i – odległość lokalizacji i od fabryki
- O_{ij} – odległość lokalizacji i od regionu j
- Z_j – miesięczna liczba zamówień regionu j
- KP_i – koszt przepływu palety przez centrum dystrybucji w i
- KM, KR – jednostkowe koszty transportu na trasach do centrów dystrybucji i regionów

- Minimalizuj
 - Koszt =
$$\sum_i KM \cdot O_i \sum_j x_{ij} Z_j + \sum_i \sum_j x_{ij} Z_j O_{ij} KR + \sum_i KP_i \sum_j x_{ij} Z_j$$
- Przy ograniczeniach
 - $\sum_i x_{ij} = 1$ dla każdego $j = 1, \dots, J$

Koszt stały magazynu

- KS_i – koszt stały magazynu w lokalizacji i

Indeksy

- $i = 1, \dots, I$ potencjalne lokalizacje centrów dystrybucji
- $j = 1, \dots, J$ regiony

Zapis matematyczny

Zmienne

- $y_i \in \{0, 1\}$ – **1 jeżeli w lokalizacji i tworzone jest centrum dystrybucji**
- $x_{ij} \in \{0, 1\}$ – 1 jeżeli region j jest obsługiwany przez centrum dystrybucji i

Dane

- O_i — odległość lokalizacji i od fabryki
- O_{ij} — odległość lokalizacji i od regionu j
- Z_j — miesięczna liczba zamówień regionu j
- KP_i — koszt przepływu palety przez centrum dystrybucji w i
- KM, KR — jednostkowe koszty transportu na trasach do centrów dystrybucji i regionów

Koszt stały magazynu – zapis matematyczny

- Minimalizuj
 - $$\text{Koszt} = \sum_i KM \cdot O_i \sum_j x_{ij} Z_j + \sum_i \sum_j x_{ij} Z_j O_{ij} KR + \sum_i KP_i \sum_j x_{ij} Z_j + \sum_i KS_i y_i$$
- Przy ograniczeniach
 - $y_i = \min(1, \sum_j x_{ij})$ dla każdego $i = 1, \dots, I$
 - $\sum_i x_{ij} = 1$ dla każdego $j = 1, \dots, J$

Koszt stały magazynu – zapis matematyczny

- Minimalizuj
 - $$\text{Koszt} = \sum_i KM \cdot O_i \sum_j x_{ij} Z_j + \sum_i \sum_j x_{ij} Z_j O_{ij} KR + \sum_i KP_i \sum_j x_{ij} Z_j + \sum_i KS_i y_i$$
- Przy ograniczeniach
 - $x_{ij} \leq y_i$ dla każdego $j = 1, \dots, J, i = 1, \dots, I$
 - $\sum_i x_{ij} = 1$ dla każdego $j = 1, \dots, J$

Koszt zamrożonego kapitału

- Koszt stały wynika tak naprawdę z kosztu zamrożonego kapitału.
- Przy dostawach bezpośrednio z fabryki paleta przebywa w systemie dystrybucji średnio 10 dni.
- W przypadku centrum dystrybucji należy jeszcze dodać opóźnienie związane z dostawami do centrum.
- Dostawy do centrum realizowane są samochodami o ładowności 32 palet.
- Czas przebywania palety w systemie należy więc zwiększyć o połowę odstępu pomiędzy dostawami towaru.
- W każdym centrum dystrybucji należy przechowywać stały zapas bezpieczeństwa.

Zapis matematyczny

- PP – pojemność pojazdu dostarczającego palety do centrów dystrybucji
- ZB – zapas bezpieczeństwa, tj. liczba palet, które na stałe muszą być przechowywane w każdym centrum dystrybucji
- $DKZK$ – dzienny (dni kalendarzowe) koszt zamrożonego kapitału (jednej palety)
- PDR – procent dni roboczych w roku
- CPS – bazowy czas przebywania palety w systemie

Zapis matematyczny

- Odstęp pomiędzy dostawami do centrum dystrybucji i :
 - $ODD_i = 365 / \left(\sum_j x_{ij} Z_j / PP \right)$
- Średni czas przebywania palety w systemie:
 - $CPS + ODD_i / 2$
- Koszt zamrożonego kapitału w centrum dystrybucji i :
 - $365 ZB \cdot DKZK y_i + (CPS + ODD_i / 2) \sum_j x_{ij} Z_j DKZK =$
 $= DKZK (365 ZB y_i + (CPS + ODD_i / 2) \sum_j x_{ij} Z_j)$

Zapis matematyczny

- Koszt zamrożonego kapitału w centrum dystrybucji i :

$$\begin{aligned}
 & 365 \text{ ZB } DKZK y_i + (CPS + ODD_i/2) \sum_j x_{ij} Z_j \text{ DKZK} = \\
 & = DKZK(365 \text{ ZB } y_i + (CPS + ODD_i/2) \sum_j x_{ij} Z_j) = \\
 & = DKZK(365 \text{ ZB } y_i + (CPS + 365/(\sum_j x_{ij} Z_j / PP)/2) \sum_j x_{ij} Z_j) = \\
 & = DKZK(365 \text{ ZB } y_i + CPS \sum_j x_{ij} Z_j + 365/PP/2)
 \end{aligned}$$

Przydział częstotliwości w sieci komórkowej

- Operator telefonii komórkowej zarządza I komórkami i ma do dyspozycji pewną liczbę częstotliwości, J .
- Do każdej komórki (anten) można przydzielić pewien zbiór częstotliwości. Podaj ten przydział.
- Od liczby częstotliwości zależy liczba połączeń, które mogą być jednocześnie realizowane w ramach komórki,
- dlatego chcemy, by sumaryczna liczba wykorzystanych częstotliwości była jak największa.
- Znane są pary komórek pomiędzy którymi może zachodzić interferencja. Do komórek tych nie można przydzielać tych samych częstotliwości.

Zapis matematyczny

- Indeksy
 - $i, i_2 = 1, \dots, I$ komórki
 - $j = 1, \dots, J$ częstotliwości
- Zmienne
 - $x_{ij} \in \{0, 1\}$ – 1 jeżeli częstotliwość j jest przydzielona do komórki i
- Dane
 - $IN_{i i_2} - 1$ jeżeli do komórek i i i_2 nie można przydzielić tej samej częstotliwości

Zapis matematyczny

- Maksymalizuj:
 - Łączną liczbę wykorzystanych częstotliwości $\sum_i \sum_j x_{ij}$
- Przy ograniczeniach:
 - $x_{ij} + x_{i_2 j} \leq 2 - IN_{i \ i_2}$ dla każdego $i, i_2 = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$

Jak maksymalizować minimalną liczbę częstotliwości?

- Dodatkowa zmienna MLC – minimalna liczba częstotliwości (w GAMS-ie i tak jest potrzebna)
- Dodatkowe ograniczenie:
 - $MLC \leq \sum_j x_{ij}$ dla każdego $i = 1, \dots, I$
- Kryterium celu jest maksymalizacja MLC

Harmonogramowanie czasu pracy

- Supermarket pracuje 7 dni w tygodniu
- W poszczególnych dniach tygodnia potrzebne są następujące liczby pracowników:
 - Pon 17,
 - Wto 23,
 - Sro 23,
 - Czw 23,
 - Pia 29,
 - Sob 35,
 - Nie 28.

Harmonogramowanie czasu pracy

- Każdy pracownik musi pracować w cyklu 5 dni pracy, dwa dni wolne. Dni wolne pracownika mogą wypadać w dowolnym dniu tygodnia.
- Należy znaleźć harmonogram pracy minimalizujący łączną liczbę pracowników i zgodny z powyższymi ograniczeniami.

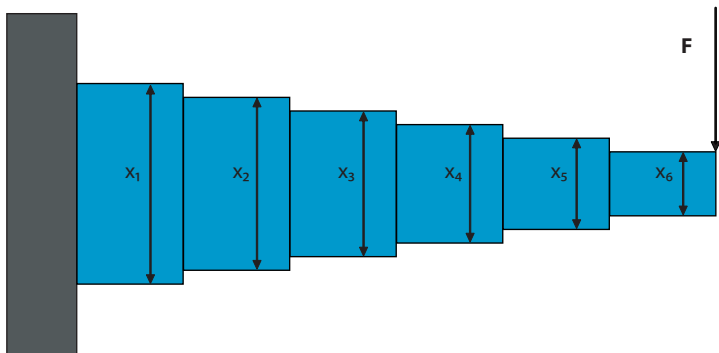
Zapis matematyczny

- Indeksy
 - $i = 1, \dots, I$ – dni tygodnia
 - $j = 1, \dots, J$ – możliwe wzory pracy
- Zmienne
 - $x_j \in \{0, 1, \dots\}$ – liczba pracowników pracujących według wzoru j
- Dane
 - Z_i – liczba pracowników potrzebna w dniu i
 - $PD_{ij} \in \{0, 1\}$ – 1 jeżeli we wzorze pracy j dzień i jest dniem roboczym

Zapis matematyczny

- Minimalizuj
 - Liczba pracowników = $\sum_j x_j$
- Przy ograniczeniach
 - $\sum_j x_j PD_{ij} \geq Z_i$ dla każdego $i = 1, \dots, I$

Problem projektowania belki



Model matematyczny

- x_i – szerokość segmentu i
- b – wysokość segmentu
- l – długość segmentu
- F – siła
- σ – współczynnik wytrzymałości na pękanie
- V – objętość belki
- U – ugięcie belki

Prawa fizyki

$$V = bl \sum_{i=1}^l x_i$$

$$U = \frac{Fl^3}{8E} \left(\frac{1}{l_1} + \sum_{i=1}^l \frac{i^3 - (i-1)^3}{l_i} \right)$$

$$l_i = \frac{bx_i^3}{12}$$

$$\frac{6Fn}{bx_i^2} \leq \sigma$$

Model matematyczny

- Minimalizuj

$$V = bl \sum_{i=1}^l x_i$$

- Przy ograniczeniach

$$U = \frac{Fl^3}{8E} \left(\frac{1}{l_1} + \sum_{i=1}^l \frac{i^3 - (i-1)^3}{l_i} \right) \leq U_{max}, l_i = \frac{bx_i^3}{12}$$

$$\frac{6Fn l}{bx_i^2} \leq \sigma, i = 1, \dots, l$$

$$12 \leq x_i \leq 32$$

Rozwiązywanie równań

Rozwiąż równanie

$$5 - 4x + 3x^2 + 3x^3 - x^4 = 0$$

Rozwiązywanie układów równań

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} -5x + xy + 2y = 0 \\ 3x - 2xy + y = 0 \end{cases}$$

Prognozowanie przebiegu testów

- Firma programistyczna w trakcie testów obserwuje niezawodność oprogramowania.

Zebrane dane są następujące:

<i>Liczba testów</i>	<i>Częstotliwość błędnych wykonań $1/h$</i>
0	5
100	4
200	3.2
300	2.6
400	2.1
500	1.8

Prognozowanie przebiegu testów

- Z doświadczenia wiadomo, że wzrost niezawodności (spadek częstotliwości błędnych wykonania) ma charakter wykładniczy:

$$CBW = CBW_0 \cdot e^{-c \cdot LT}$$

- Kiedy częstotliwość błędnych wykonania spadnie do poziomu 0.5?