

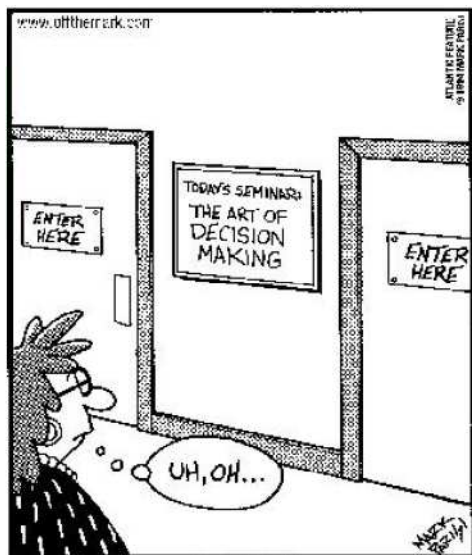
Cel: Pierwsze laboratorium ze Wspomagania Decyzji będzie podzielone na trzy części. W pierwszej omówimy zasady gry w trakcie tego semestru. W drugiej spróbuję Was nauczyć kilku pojęć z języka dotyczącego wspomagania decyzji. W trzeciej zrobimy szybką powtórkę z programowania liniowego, które będzie nam potrzebne przy okazji drugich zajęć i dalej, gdy będziemy już poznawać właściwe metody wspomagania decyzji.

1. Dane kontaktowe i zasady gry

Miłosz Kadziński *Kontakt:* milosz.kadziński@cs.put.poznan.pl, pokój 1.6.6 - 1p. w CWiBT, tel. (61) 6653022,
Docelowy prowadzący: Michał Fredrych, michał.fredrych@cs.put.poznan.pl, jeśli wysyłacie maile związane z przedmiotem, to **koniecznie z tytułem zaczynającym się od [WD]**

Terminy zajęć: poniedziałek 15.10-16.40, 16.50-18.20

Plan zajęć lab. ze Wspomagania Decyzji

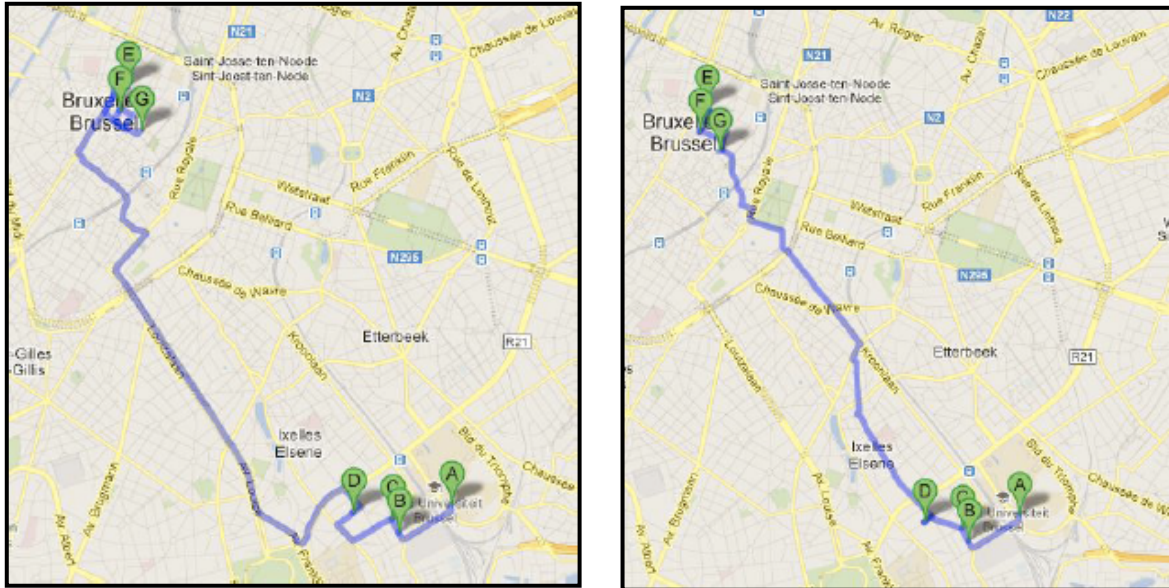


1. Wprowadzenie do WD + programowanie liniowe
2. Programowanie nieliniowe + linearyzacja
3. Teoria społecznego wyboru
4. Teoria zbiorów przybliżonych w kontekście klasyfikacji
5. Metoda węgierska, zadania do samodzielnego rozwiązania
6. Kolokwium I
7. Metoda wspomagania problemów porządkowania - UTA
8. Metoda wspomagania problemów porządkowania - Assess
9. Metoda wspomagania problemów wyboru - ELECTRE I
10. Metoda wspomagania problemów sortowania - ELECTRE TRI
- Duży raport dotyczący wspomagania decyzji w II cz. semestru
11. Kolokwium II

Zaliczenie: Główną częścią Waszej końcowej oceny są dwa kolokwia zaliczeniowe (zadania obliczeniowe + teoria przerabiana na zajęciach). Kolokwia są długie, wyczerpujące i wymagają regularnego przyswajania materiału. Obydwa kolokwia trzeba zaliczyć. Trzecią ważną składową oceny końcowej jest duży raport dotyczący analizy stworzonego przez Was problemu decyzyjnego; raport ten jest realizowany w II części semestru. Potem to wszystko podsumowuję i stosuję standardowe procentowe progi ocen: [0,50) - 2.0; [50,60) - 3.0; [60,70) - 3.5; [70,80) - 4.0; [80,90) - 4.5; [90,100] - 5.0. Zastrzegamy sobie prawo podwyższenia oceny, nawet jeśli zgodnie z progami nie będzie taka wychodziła.

2. Przykłady wprowadzające

Cel: Załóżmy, że jesteśmy w piątkowy wieczór w Brukseli, mieście znanym z dobrych pubów; wieczór jest długi, a my chcielibyśmy odwiedzić wszystkie siedem miejsc z następującej listy: Le Waff, Le Gaugain, L'Atelier, Le Corbeau, La Lunette, La Mort oraz Subite (patrz symbole A-G na poniższej mapie)



Odwiedziny można zrealizować w różnej kolejności i pokonując różne trasy (patrz powyższe rysunki), ale dobrze byłoby ustalić jakiś plan i trasę przed rozpoczęciem wieczoru, żeby potem się nie pogubić. Sensownym rozwiązaniem wydaje się minimalizacja długości trasy, którą będziemy musieli pokonać. W tym kontekście lepszym rozwiązaniem wydaje się to zaprezentowane po prawej stronie.

Tego typu problemy znacie z przedmiotów optymalizacja kombinatoryczna oraz badania operacyjne, a ich ogólne sformułowanie, angażujące zbiór zmiennych decyzyjnych x , funkcję celu $f(x)$ oraz zbiór ograniczeń $Ax \leq b$ jest następujące:

$$\max f(x)$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

W powyższym przykładowym problemie chcemy zminimalizować długość trasy (bardzo precyzyjnie zdefiniowany pojedynczy cel) przy odwiedzeniu wszystkich pubów i ograniczeniach dotyczących możliwych tras, wyznaczonych przez chodniki i drogi w Brukseli.

Problemów tego typu znacie już mnóstwo: *problem najkrótszej ścieżki*, *problem komiwożera*, *minimalne drzewo rozpinające*, *problem plecakowe*, *problem szeregowania zadań*, itd.

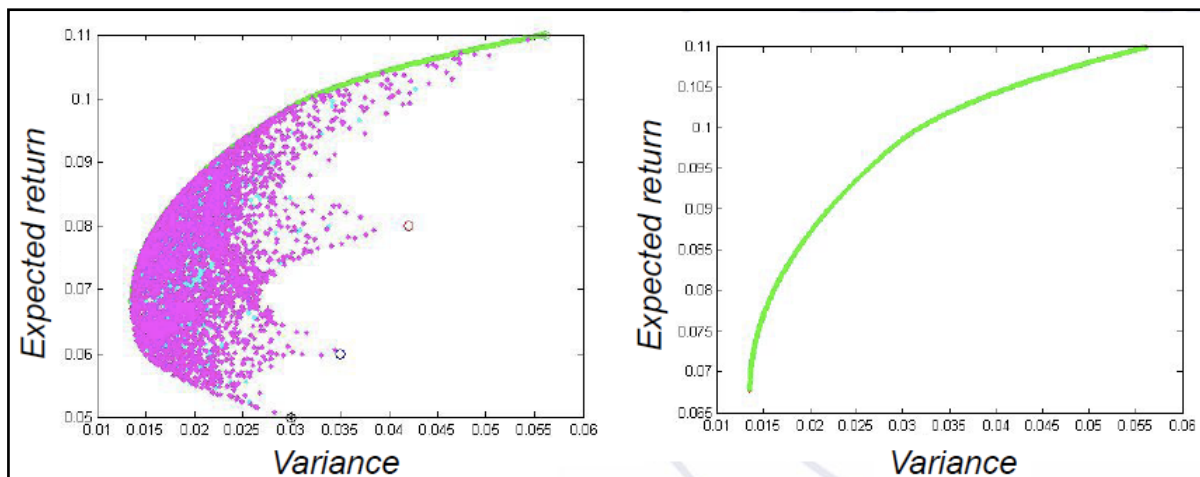
Główny trend w badaniach operacyjnych to optymalizacja jednokryterialna (ang. *mono-* lub *single-objective*):

- Świetnie zdefiniowany problem z matematycznego punktu widzenia (jasny cel do osiągnięcia);
- Porządek rozwiązań jest jasno zdefiniowany, wszystkie rozwiązania można ze sobą porównać i w związku z tym można (stosunkowo łatwo) znaleźć rozwiązanie optymalne;
- Realność? Niska. W praktyce decyzje w problemach jednokryterialnych są podejmowane tylko z punktu widzenia finansowego (minimalizuj koszt, maksymalizuj zysk), a przecież istnieją też inne istotne punkty widzenia na jakość rozwiązań, które trzeba wziąć pod uwagę.

Czy zawsze w problemach uwzględnia się tylko jedno kryterium?

Portfolio management (Markowitz, 1952) - problem zarządzania portfelem

- Zainwestuj kapitał o wysokości K w różne akcje;
- Pomysł: « *do not put all your eggs in the same bag* » (nie inwestuj wszystkiego w jedną firmę, bo może skończyć się to klęską)
- W problemie rozważa się dwa (sprzeczne) cele - kryteria oceny:
 - maksymalizacja zysku (zwrotu; *expected return*) - chcemy zarobić tak dużo, jak się da;
 - minimalizacja ryzyka (wariancji; *variance*) - chcemy ograniczyć ryzyko tak bardzo, jak się da;
- Przykładowy wynik eksperymentu z 4 inwestycjami - tysiące rozwiązań zaprezentowanych na wykresie jako poszczególne punkty (na osi x - *variance* - chcemy mieć małą wartość, na osi y - *expected return* - chcemy mieć dużą wartość); widzimy że kryteria są sprzeczne - jak godzisz się na duże ryzyko, to możesz dużo zarobić, a jeśli chcesz ograniczyć ryzyko, to spadają też potencjalne zyski; dodatkowa obserwacja: niektóre rozwiązania - te fioletowe - są gorsze od innych - tych zielonych, bo oferują mniejszy zysk przy większym ryzyku; te najbardziej interesujące rozwiązania nazywane niezdominowanymi zaprezentowano na rysunku po prawej stronie



Przykładów dobrze zdefiniowanych problemów dwukryterialnych można podać mnóstwo. Aby odwołać się do tego, co znacie, wspomnę tylko **dwukryterialny problem przepływowy**, gdzie n zadań realizuje się na m maszynach z myślą o jednoczesnej minimalizacji całkowitego czasu wykonania (*makespan*) oraz całkowitego opóźnienie (*total tardiness*).

Ogólne sformułowanie dwukryterialnych problemów optymalizacji:

$$\max/\min \{f_1(x), f_2(x)\}$$

$$G(x) \leq 0$$

$$x \geq 0$$

Możliwe rozwiązania są określone przez ograniczenia (może być ich nieskończenie wiele, co oznacza, że nie można ich wszystkich wymienić).

Mamy więc już dwa kryteria. Czy można iść z powiększeniem ich liczby dalej?

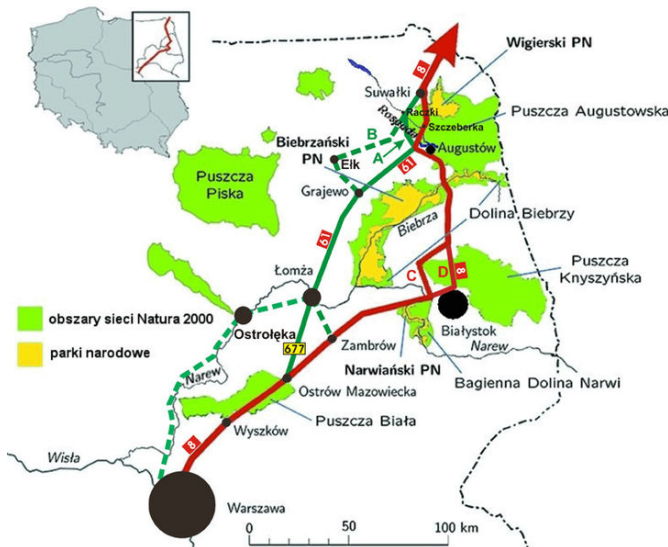
3. Problem decyzyjny

Problem decyzyjny to sytuacja, w której obecny stan systemu nie jest stanem pożądanym i zastanawiamy się co zrobić, aby zmniejszyć tę różnicę. Zwykle istnieje wiele alternatywnych sposobów osiągnięcia celu (stanu pożądanego) i wybór najlepszego z nich najczęściej nie jest prosty.

W ramach problemu decyzyjnego mamy do czynienia ze zbiorem potencjalnych rozwiązań, zwanych **wariantami decyzyjnym** (akcje, alternatywy, rozwiązania). Zbiór wariantów oznaczmy jako A .

Przykład: wybór drogi w północno-zachodniej Polsce

- *obecny stan nie jest pożądanym* - droga biegnie przez ośrodki miejskie, powoduje zanieczyszczenie, itd.
- *zastanawiamy się, co zrobić, aby osiągnąć stan pożądanym* - trzeba zbudować nową drogą (można ją wytyczyć na bardzo różne sposoby)



*szukamy optymalnego przebiegu
nowej trasy szybkiego ruchu*

*wariantami są różne
przebiegi tras (na rysunku od A do D)
rozpatrywane w problemie*

4. Wielokryterialne wspomaganie decyzji - podstawowe pojęcia

Warianty są opisywane na zbiorze cech (atrybutów), na podstawie których można decydować o ich jakości. Cechę taką można nazwać **kryterium**, jeśli na jej podstawie warianty można miarodajnie ze sobą porównywać.

Przykład: kryteria dla wspomnianych wariantów przebiegu trasy to np.: koszt budowy, czas wykonania, stopień zanieczyszczenia środowiska, odległość od ośrodków miejskich, itd.

Kryteria muszą być **monotoniczne** względem preferencji, tzn. im większa wartość wariantu na danym kryterium tym jest on lepszy lub im większa wartość na danym kryterium, tym jest on gorszy (w obydwu przypadkach możliwe są odcinki stałej preferencji, ale istotny jest ogólny trend).

Innymi słowy, jeśli dwa warianty różnią się na danym kryterium g i są takie same na wszystkich innych kryteriach, to wariantem preferowanym będzie ten o większej (mniejszej) wartości na kryterium g .

Przykład: Dobrym kryterium jest koszt budowy trasy lub cena samochodu (im mniejszy koszt, tym lepszy wariant - patrząc tylko na to kryterium).

Złe kryterium to preferowana temperatura dnia – cecha jest niemonotoniczna; jak jest bardzo zimno lub bardzo ciepło, to nie jest przyjemnie (w niektórych sytuacjach można sobie poradzić z takim problemem, definiując kryterium jako odległość od optimum).

Typy kryterium ze względu na to, które oceny są preferowane - kierunki preferencji:

- **zysk** - preferencja rośnie ze wzrostem oceny (im wyższa, tym lepiej; w ogólności dozwolone są też odcinki, w których preferencja pozostaje stała, więc taka funkcją preferencji ma charakter niemalejący);
- **koszt** - preferencja maleje ze wzrostem oceny (im mniejsza, tym lepiej; w ogólności dozwolone są też odcinki, w których preferencja pozostaje stała, więc taką funkcją preferencji ma charakter nierosnący).

Przykład: Dla kupującego samochód, jego cena, koszty użytkowania, utrata wartości auta lub zużycie paliwa to kryteria typu koszt, a liczba koni mechanicznych lub różnego rodzaju osiągi to kryteria typu zysk.

Skale kryterium ze względu na charakterystykę i interpretację ocen:

- **porządkowa** – tylko kolejność ma znaczenie (odległość ani iloraz nie ma znaczenia intensywności, np. oceny szkolne);
- **ilościowe** - odległość ma znacznie intensywności:
 - *przedziałowa* – można porównywać różnice, ale „zero” nie ma znaczenia absolutnego, więc iloraz dwóch wartości nie ma sensu (skala Celsiusa);
 - *ilorazowa* - „zero” ma znaczenie absolutne, więc można porównywać różnice oraz stosunki ocen (waga, skala Kelvina).

Podstawowe relacje dla porównania wariantów decyzyjnych:

- **nierozróżnialność** I - dwa warianty **nierozróżnialne** (aIb ; *indifferent*) uznajemy za równe względem problemu decyzyjnego,
- **preferencja** P - wariant a **preferowany** nad b (aPb ; *preferred*) jest wariantem lepszym od b względem problemu decyzyjnego.

Przy modelowaniu problemu decyzyjnego, wszystkie istotne dla niego kryteria nazywamy rodziną. Musi ona spełniać kilka warunków, aby była dobrze skonstruowana.

Spójna rodzina kryterium:

- **zupełna** – jeśli dwa warianty mają takie same oceny na wszystkich kryteriach, muszą być nierozróżnialne (nie może być więc żadnych innych kryteriów, które wpływają na naszą decyzję, a nie są uwzględnione w utworzonej rodzinie),
- **monotoniczna** – jeśli wariant a jest preferowany nad wariant b , to dla każdego wariantu c , który ma na wszystkich kryteriach oceny niegorsze niż wariant a , wariant c jest preferowany nad wariant b (nasze preferencje muszą być zgodne z ustalonymi kierunkami preferencji);
- **nienadmiarowa** – eliminacja jakiegokolwiek kryterium z rodziny powinna naruszyć co najmniej jedną z wymienionych powyżej własności (nie możemy w rodzinie uwzględniać kryteriów, które nie wpływają na naszą decyzję (nie są dla w ogóle istotne) lub nie pozwalają odróżnić wariantów decyzyjnych (np. wszystkie warianty mają takie same oceny)).

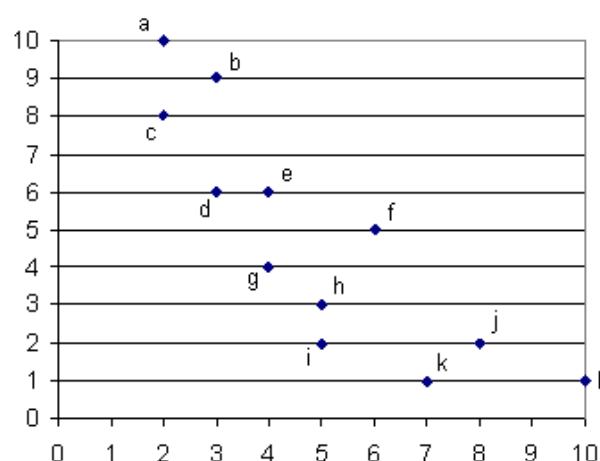
Ocenę wariantu a na kryterium g_j , najczęściej będziemy oznaczać przez $g_j(a)$.

Dominacja oznacza jednomyslność w porównaniu pary wariantów decyzyjnych przez wszystkie kryteria - wariant *a* **dominuje** wariant *b*, jeśli jest niegorszy od *b* (lepszy lub taki sam) na wszystkich kryteriach. Dominacja pozwala na identyfikację wariantów najbardziej interesujących z punktu widzenia problemu decyzyjnego, tj. wariantów niezdominowanych.

Wariant *a* jest **niezdominowany w sensie silnym** (*Pareto-optymalny*) wtw. gdy nie ma innego wariantu *b* takiego, że $g_i(b)$ jest lepsze lub równe jak $g_i(a)$ na każdym kryterium oraz na przynajmniej jednym kryterium *j*, $g_j(b)$ jest ściśle lepsze niż $g_j(a)$ (wariant *a* jest więc **niezdominowany w sensie silnym** jeśli nie ma żadnego innego wariantu, który miałby co najmniej tak dobre oceny na wszystkich kryteriach i ściśle lepsze na co najmniej jednym kryterium).

Wariant *a* jest **niezdominowany w sensie słabym** (*słabo Pareto-optymalny*) wtw. gdy nie ma innego wariantu *b* takiego, że $g_i(b)$ jest ściśle lepsze niż $g_i(a)$ na każdym kryterium (wariant *a* jest więc **niezdominowany w sensie słabym** jeśli nie ma żadnego innego wariantu, który miałby ściśle lepsze od niego oceny na wszystkich kryteriach).

Przykład: dla dwóch minimalizowanych kryteriów (typu koszt) oraz zbioru wariantów $\{a=(2,10); b=(3,9); c=(2,8); d=(3,6); e=(4,6); f=(6,5); g=(4,4); h=(5,3); i=(5,2); j=(8,2); k=(7,1); l=(10,1)\}$, podaj te które są niezdominowane w sensie silnym oraz słabym.



Niezdominowane w sensie silnym: c, d, g, i, k

- dla c nie istnieje inny wariant, który miałby co najwyżej 2 na kryterium 1 i co najwyżej 8 na kryterium 2 i byłby ściśle lepszy na co najmniej jednym z nich;
- dla a istnieje wariant, który miałby co najwyżej 2 na kryterium 1 i co najwyżej 10 na kryterium 2 i byłby ściśle lepszy na co najmniej jednym z nich (jest to c);
- dla f istnieją warianty, który miałyby co najwyżej 6 na kryterium 1 i co najwyżej 5 na kryterium 2 i byłyby ściśle lepszy na co najmniej jednym z nich (są to g, h, i).

Niezdominowane w sensie słabym: c, d, g, i, k oraz a, e, h, l

Jeśli wariant jest niezdominowany w sensie silnym, to jest i niezdominowany w sensie słabym, ale wariantów niezdominowanych w sensie słabym, może być więcej niż tych w sensie silnym (bo wymagania są słabsze).

- dla c nie istnieje inny wariant, który miałby mniej niż 2 na kryterium 1 i mniej niż 8 na kryterium 2;
- dla a nie istnieje wariant, który miałby mniej niż 2 na kryterium 1 i mniej niż 10 na kryterium 2;
- dla f istnieją warianty, który miałyby mniej niż 6 na kryterium 1 i mniej niż 5 na kryterium 2 (są to g, h, i).

5. Podstawowe kategorie problemów decyzyjnych we wspomaganiu decyzji

Wyróżnia się trzy podstawowe kategorie problemów decyzyjnych:

- **porządkowanie** (tworzenie rankingu) – narzucenie na zbiór wariantów porządku (uszeregowanie wariantów od najlepszego do najgorszego). Porządek może być częściowy (dopuszcza, że pary wariantów mogą być nieporównywalne względem siebie) lub *zupełny* (wszystkie pary wariantów muszą być porównywalne).

Przykład: porządkiem zupełnym jest relacja $\geq$ na zbiorze liczb rzeczywistych (jakakolwiek para liczb rzeczywistych jest porównywalna względem tej relacji; sprawdź $(5,0)$, $(5, 2)$, $(2,2)$);

porządkiem częściowym jest relacja zawierania się zbiorów (są takie pary wariantów (tu zbiorów), dla których ta relacja nie zachodzi w żadną ze stron, np. $\{a,b\}$ oraz $\{b,c,d\}$)

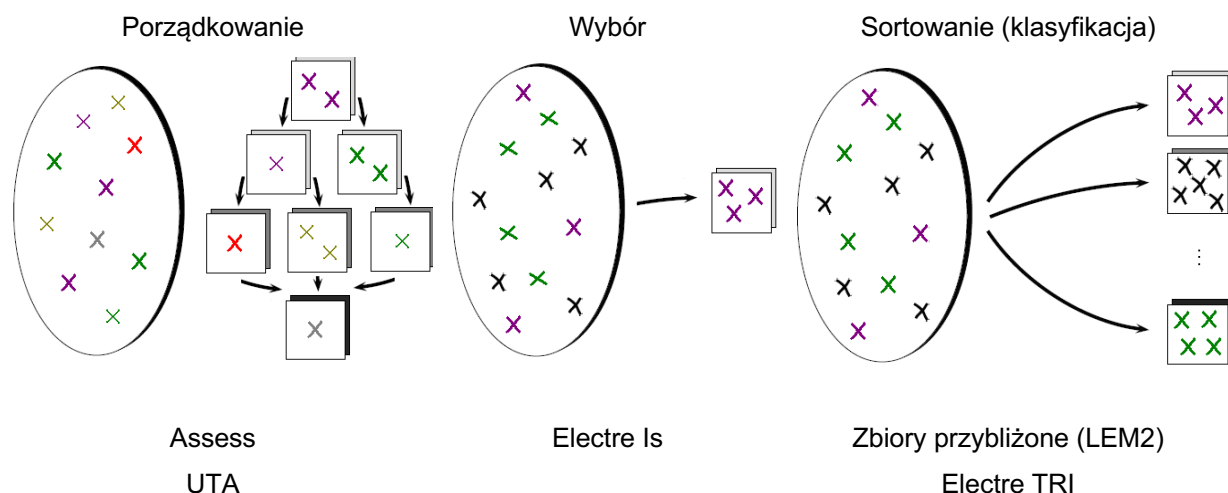
przykładem porządkowania jest tworzenie rankingu uczelni, szkół, szpitali, kierunków studiów, miast, krajów, studentów;

- **wybór** – wybór najlepszych (wyróżniających się) wariantów, czyli wybór podzbioru A' zbioru A .

Przykład: kupno domu lub samochodu; wybór podzbioru studentów, którzy uzyskają stypendium; w wyborze nie zawsze musi chodzić o wskazanie jednego, najlepszego wariantu; czasem trzeba wybrać najlepszy podzbiór wariantów;

- **sortowanie** lub klasyfikacja – podział zbioru wariantów na predefiniowane (określone z góry) klasy (kategorie), które w sortowaniu są uporządkowane pod względem preferencji; sortowanie nazywane jest klasyfikacją porządkową (w ogólności w problemach klasyfikacji - klasy nie muszą być uporządkowane - możemy chcieć rozpoznawać gatunki kwiatów lub autora tekstu i nie da się z góry powiedzieć, że jeden gatunek/autor jest lepszy od innego); w sortowaniu musi być z góry określony porządek narzucony na klasy, tak że warianty, które trafią do klasy lepszej, zostaną uznane za bardziej preferowane od tych, które trafią do klasy gorszej (a nie tylko za warianty jakościowo inne);

Przykład: podział wariantów na dobre, średnie i słabe (warianty z klasy dobrej są preferowane nad te ze średniej, które są z kolei preferowane nad te ze słabej); rozważenie decyzji o przyznaniu kredytu, ocena stopnia rozwoju gospodarki państw, ocena stopnia zadłużenia państw (Moody's, S&P, Fitch); ocena klasy bezpieczeństwa samochodów.



Nazwy znajdujące się pod rysunkami reprezentują metody wspomagania decyzji, które poznamy z biegiem tego semestru.

6. Model preferencji

- Relacja dominacji jest zbyt słaba, by móc porównać ze sobą wszystkie warianty (w praktyce za wysoką jakość płaci się wyższą cenę i rzadko zdarza się jednomyślność wszystkich kryteriów w porównaniu pary wariantów, a jeszcze rzadziej, że jeden z wariantów dominuje wszystkie pozostałe).
- W związku z tym - aby wspomóc rozwiązanie problemu - decydent powinien podać informację preferencyjną (pewne subiektywne elementy dotyczące jego systemu wartości i tego, co jest ważne dla konkretnego problemu decyzyjnego).
- Na bazie informacji preferencyjnej tworzony jest model preferencji, który pozwala na agregację ocen wariantu na wszystkich kryteriach. Dzięki temu warianty można ze sobą "lepiej" porównać.

Istnieją trzy rodziny modeli preferencyjnych:

- **funkcja** - chcemy wypracować dla każdego wariantu jedną liczbę, która będzie stała za jego całkowitą jakością, mówiąc, jak dobry lub zły jest on w przekroju wszystkich kryteriów, np. addytywna funkcja użyteczności (UTA) lub funkcja Keeney'a Raiffy (Assess);
- **system relacyjny** - bazujący na porównaniach wariantów parami, np. relacja przewyższania S o interpretacji „co najmniej tak dobry jak” (rodzina metod ELECTRE); w podejściach tych sprawdza się prawdziwość relacji dla wszystkich par obiektów, a potem eksploatuje tę relację w duchu konkretnego problemu do rozwiązania;
- **zbiór reguł decyzyjnych** - zbiór logicznych warunków determinujących decyzję; wykorzystywany np. dla celów klasyfikacji w ramach teorii zbiorów przybliżonych; model regułowy jest najbardziej ogólny ze wszystkich trzech modeli; zapoznamy się z nim jako pierwszym podczas lab4.

7. Własności relacji oznaczonej symbolem R

Będziemy odwoływać się do tych własności z biegiem semestru, stąd chcę abyście je sobie przypomnieli i ilekroć powiemy, że jakaś relacja jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna, to Wy będziecie wiedzieli, co to oznacza. W szczególności, w drugiej części semestru będziemy określać własności relacji preferencji P i nierozróżnialności I zdefiniowanej za pomocą porównania użyteczności (wartości) wariantów oraz relacji przewyższania S .

- | | |
|---|--|
| ▪ symetryczna: $aRb \Rightarrow bRa$ | ▪ niezwrotna: $\sim aRa$ |
| ▪ antysymetryczna: $aRb \Rightarrow \sim bRa$ | ▪ przechodnia: $aRb \text{ oraz } bRc \Rightarrow aRc$ |
| ▪ zwrotna: aRa | |

☀ **Zrób zadania I-IV z arkusza ćwiczeń. Ich omówienia - o ile jest konieczne - na końcu pliku prowadzącego do zajęć.**

8. Zbiór danych - pierwsze zadanie domowe (ZD)

W drugiej części semestru będziecie analizować swój problem decyzyjny poznanymi metodami wspomagania decyzji; bardzo ważne jest słowo "swój", bo spędzicie z tym problemem trochę czasu i ważne, żeby a) on był dla was istotny, b) dobrze się z nim pracowało (będziecie wybierać najlepsze warianty, porządkować je lub przydzielać do klas, więc wszystko to musi mieć sens w kontekście Waszego problemu).

Wasze zadanie polega na utworzeniu zbioru danych wielokryterialnych (warianty, kryteria + oceny); można utworzyć swój zbiór od samego początku albo zaczerpnąć dane z gazety, raportu, Internetu;

Wymagania:

- Liczba wariantów: idealnie około 15 (może być więcej; nie mniej niż 10); warianty powinny być z podobnej klasy produktów, czyli jeśli kupowalibyście aparat fotograficzny, to nie rozważamy takich, które kosztują 100 zł i 20 tys. zł.);
- Liczba kryteriów: minimum 3, optymalnie 5, nie więcej niż 7; kryteria muszą być monotoniczne i dla każdego z nich musicie wskazać kierunek preferencji (czy wyższe czy niższe oceny są lepsze z punktu widzenia problemu decyzyjnego); niektóre kryteria są obiektywne (np. cena wynajmu mieszkania); inne można stworzyć na potrzeby problemu (np. atrakcyjność kierunku podróży lub ocena lokalizacji mieszkania - dla każdego oznacza to, co innego, ale można taką ocenę wypracować np. biorąc pod uwagę bliskość uczelni, pracy, tramwaju, dyskontu, parku, hasał uliczny, bezpieczeństwo, itd.);
- Wypełnienie macierzy ocen wariantów na poszczególnych kryteriach - dobrze, żeby to nie były kryteria binarne (tak/nie; 1/0), tylko zakres zmienności ocen był większy, a dziedzina ocen bardziej liczna;
- Zakazana tematyka: komputerowa („Komputer Świat” i tym podobne; ja potem muszę wszystkie raporty przeczytać i jak czytam o wyborze laptopa czy drukarki, to jest to przeraźliwie nudne, czyli musicie odkryć w sobie pasję pozakomputerowe); sportowa (bo doprowadza do absurdów - ktoś chce potem wybierać najlepszy zespół ligi NBA na podstawie liczby punktów zdobywanej we własnej hali i liczby zbiórek na wyjeździe, albo najlepszego tenisistę na podstawie szybkości serwisu i liczby niewymuszonych błędów - w tych dziedzinach wybór najlepszego zespołu/sportowca/itd. opiera się na innych, ściśle określonych zasadach); zwróćcie też uwagę, żeby to nie było zbyt śmieszne, bo jak ktoś będzie wybierał najlepszą parówkę, to pośmiejemy się 5 minut, ale potem Wy musicie z tymi parówkami spędzić kilkanaście godzin, oraz żeby nie było absurdalne (jak ktoś wybiera kanapki w McDonaldzie na podstawie zawartości kalorii, węglowodanów, cukrów i białka, to wiadomo, że jest to głęboko bez sensu); fajne problemy z minionych lat, które pamiętam: postaci z gry, na której student rzeczywiście się zna (ale nie FIFA); planszówki, sprzęt wspinaczkowy, utwory do grania na gitarze, zośki do podbijania, itd.; im bardziej oryginalnie i sensownie zarazem, tym lepiej;
- Dobrze żeby nie był do wybór samochodu/motoru/itd., ale żeby pokazać Wam, co mniej więcej ma być wynikiem tego zadania, spójrzcie do pliku **Lab1-ThierrysChoice.xls** (samochody, ale w miarę podobnej klasy; kryteria, ale bardzo specyficzne - dostosowane do tego konkretnego decydenta (student Thierry, który chce dojeżdżać samochodem na uczelnię, a czasem gdzieś się nim pościgać).

Czas realizacji: trzy tygodnie od dziś (można skonsultować się wcześniej), zbiór będzie potrzebny w drugiej części semestru, ale jego poprawność i przydatność musimy ustalić szybciej. Forma sprawdzenia: po zajęciach osobiście lub przesłanie przez eKursy: arkusz o nazwie "Nazwisko-Imię-Indeks-WD-problem" (zastąpić swoimi danymi) z macierzą ocen: wariantami, kryteriami (ich krótkim opisem; nie zapomnieć o uzasadnieniu kierunków preferencji) i ocenami.

1. Wstęp

Programowanie liniowe (ang. *linear programming*, LP) to metoda służąca do **optymalizacji liniowej funkcji celu**, której wartość musi spełniać zbiór ograniczeń w formie liniowych równości i nierówności:

- klasa problemów programowania matematycznego, w której funkcja celu i wszystkie warunki ograniczające mają **postać liniową**;
- sposób osiągnięcia najlepszego wyniku (największy zysk, najniższy koszt), biorąc pod uwagę zbiór wymagań w postaci nierówności liniowych;
- znalezienie punktu w obszarze wynikającym z liniowych ograniczeń, dla którego funkcja celu osiąga optymalną (maksymalną lub minimalną) wartość.

Geneza programowania liniowego:

- George **Dantzig** (metoda *simplex*) i Marshall **Wood** w drugiej połowie lat 40-tych;
- pomoc w rozwiązywaniu pewnych problemów logistycznych **w wojsku**;
- program - definicja „militarna” - proponowany plan dla ćwiczeń wojska, dostaw lub rozmieszczenia oddziałów.
- "*the virtually simultaneous development of linear programming and computers led to an **explosion of applications**, especially in the industrial sector*",
- "*for the first time in history, managers were given a powerful and practical method of formulating and comparing extremely large numbers of alternative courses of action to find one that was optimal*".

Podstawowe zastosowania:

- ekonomia i zarządzanie przedsiębiorstwem (planowanie, produkcja, transport, itd.) – lotnictwo, logistyka, petrochemia, telekomunikacja, reklama, projektowanie obwodów;
- maksymalizacja zysku i minimalizacja kosztów przy ograniczonych zasobach.

2. Postać standardowa

Najbardziej intuicyjna i najczęściej używana forma zapisu problemów programowania liniowego - przypominamy głównie ze względu na nazewnictwo poszczególnych elementów (nie będziemy zapisywać problemów zawsze w postaci normalnej):

- liniowa funkcja, której wartość ma być **maksymalizowana**:

$$C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \dots + C_n \cdot X_n$$

- ograniczenia problemu postaci:

$$a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + \dots + a_{1n} \cdot X_n \leq b_1$$

$$a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + \dots + a_{2n} \cdot X_n \leq b_2$$

...

$$a_{n1} \cdot X_1 + a_{n2} \cdot X_2 + \dots + a_{nn} \cdot X_n \leq b_n$$

- nieujemne zmienne decyzyjne:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

Ze strukturą modelu LP wiążą się pojęcia:

zmienne decyzyjne	- zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$,
decyzja (rozwiązanie)	- wektor wartości zmiennych decyzyjnych $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
funkcja celu	- funkcja, której wartość podlega optymalizacji,
współczynniki funkcji celu	- parametry $c_1, c_2, \dots, c_n$,
warunki ograniczające	- nierówności występujące w zbiorze ograniczeń,
warunki nieujemności	- nierówności dotyczące znaku wartości zmiennych decyzyjnych,
kierunek optymalizacji	- wartość funkcji celu f podlegająca maksymalizacji albo minimalizacji.

Trzeba kojarzyć te powyższe nazwy.

Forma macierzowa:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T \cdot x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Przekształcenie do postaci standardowej:

- zamiany minimalizacji na maksymalizację oraz warunków większe-równe na mniejsze-równe dokonuje się przez zamianę znaków przy współczynnikach;
- warunek równości można przedstawić jako dwa inne: większe-równe i mniejsze-równe;
- jeśli zmienna decyzyjna x_i nie ma ograniczenia, że może przyjmować tylko wartości nieujemne, to wprowadzamy dwie nowe zmienne (x_i' oraz x_i'') i zamieniamy wszystkie wystąpienia zmiennej na $x_i' - x_i''$.

☀ **Zrób zadania V-VIII z arkusza ćwiczeń.**

Na przedmiocie Wspomaganie Decyzji nie będziemy rozwiązywać problemów programowania liniowego ręcznie. Będzie to za nas robił Solver. Aby on zadziałał poprawnie, trzeba jednak potrafić sformułować/zamodelować problem, który ma on rozwiązać.

3. Solver/Excel

- Rozmieszczenie komórek w Excelu (możesz też używać Open Office) - otwórz plik **Lab1-LP-example.xls** (modelowany problem przedstawiono w ramce na pomarańczowym tle, a w górnych wierszach arkusza, przedstawimy go w postaci pozwalającej na wykorzystanie Solvera)
- Uruchomienie Solvera (Narzędzia – Solver, Dane – Solver; jeśli musisz zainstalować - znaczek Office w prawym górnym rogu; Opcje programu Excel; Dodatki; Przejdź; Dodatek Solver)
- Konfiguracja Solvera dla problemu LP:

a) Parametry (gdzie jest funkcja celu i zmienne decyzyjne, kierunek optymalizacji, typ warunków ograniczających)

	A	B	C	D	E	F	G
1	zmienne decyzyjne	0	0	wartość funkcji celu			
2	współczynniki funkcji celu	30	20	0	SUMA.ILOCZYNÓW		
3	ograniczenie 1	2	1	0	1000		
4	ograniczenie 2	3	3	0	2400		
5	ograniczenie 3	1,5	0	0	600		
6		współczynniki lewych	wartości lewych	wartości prawych	SUMA.ILOCZYNÓW		
7		stron ograniczeń	stron ograniczeń	stron ograniczeń			
8							
9							
10							

Komórka celu:

Równa: ☒ Maks ☐ Min ☐ Wartość:

Komórki zmieniane:

Warunki ograniczające:

Rozwiąż

Zamknij

Opcje

Przywróć wszystko

Pomoc

b) Opcje (model liniowy, warunek nieujemności)

Maksymalny czas: sekund(y)

Liczba iteracji:

Dokładność:

Tolerancja: %

Zbieżność:

OK

Anuluj

Załaduj model...

Zapisz model...

Pomoc

☒ Przyjmij model liniowy
 ☐ Automatyczne skalowanie

☒ Przyjmij nieujemne
 ☐ Pokaż wyniki iteracji

Estymaty

☒ Styczna
 ☐ Kwadratowa

Pochodne

☒ W przód
 ☐ Centralne

Szukanie

☒ Newtona
 ☐ Gradient sprzężony

c) Rozwiązanie problemu

Zawsze należy przeczytać pojawiający się komunikat!

	A	B	C	D	E	F	G
1	zmienne decyzyjne	200	600	wartość funkcji celu	SUMA.ILOCZYNÓW		
2	współczynniki funkcji celu	30	20	18000			
3	ograniczenie 1	2	1	1000	1000		
4	ograniczenie 2	3	3	2400	2400		
5	ograniczenie 3	1,5	0	300	600		
6		współczynniki lewych stron ograniczeń		wartości lewych stron ograniczeń		wartości prawych stron ograniczeń	SUMA.ILOCZYNÓW
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							

komórka zmieniana przez Solver; początkowo ustawić na zero

komórka zmieniana przez Solver; początkowo ustawić na zero

Solver - Wyniki

Solver znalazł rozwiązanie. Wszystkie ograniczenia i warunki optymalizacji są spełnione.

Raporty:
 Wyników
 Wrażliwości
 Granic

☒ Przechowaj rozwiązanie
☐ Przywróć wartości początkowe

OK Anuluj Zapisz scenariusz... Pomoc

4. Solver *lpsolve*

W czasie zajęć na różnych przedmiotach będziecie wykorzystywali różne Solvery. Jednym z popularniejszych jest *lpsolve* (wspominamy tylko w ramach ciekawostki): do ściągnięcia: <http://sourceforge.net/projects/lpsolve/>

/ Objective function */*

max: 30 x1 + 20 x2;

/ Variable bounds */*

2 x1 + x2 <= 1000;

3 x1 + 3 x2 <= 2400;

1.5 x1 <= 600;

x1 >= 0;

x2 >= 0;

☠ **Rozwiąż problemy z plików** Lab1-problem1.xls, Lab1-problem2.xls oraz Lab1-problem3.xls.

Chcesz sprawdzić rozwiązanie albo szukasz wskazówki? Zajrzyj do folderu solved.

5. Zadanie domowe

Przeczytać ze zrozumieniem i przyswoić przed następnymi zajęciami zawartość plików p-celowe.pdf oraz p-ilorazowe.pdf (katalog lab1). Będzie łatwiej zrozumieć linearyzację problemów nieliniowych.

Omówienie ćwiczeń i zadań

I. Prawda/fałsz

a) dla pary (2,5) relacja $<$ zachodzi, ale już dla pary (2,2) nie; stąd zostawia pewne pary wariantów (tu liczb naturalnych) nieporównywalnymi, co implikuje porządek częściowy (P);

uwaga: dla rysunków w oraz x strzałki między wariantami oznaczają relację preferencji (bycie lepszym względem problemu decyzyjnego), która jest przechodnia; np. na rysunku w: a jest preferowane nad b, c, d, e, f; z kolei d jest preferowane nad e oraz f; obecność wariantów jednym wierzchołku oznacza nierozróżnialność (bycie takim samym względem problemu decyzyjnego; np. na rysunku w - b oraz c są nierozróżnialne;

b) porządek z rysunku w ma pewne pary wariantów, które są nieporównywalne (np. b oraz d), stąd nie jest zupełny; graficznie porządek częściowy dopuszcza pewne rozgałęzienia (F);

c) porządek z rysunku x jest zupełny; dla wszystkich par wariantów zachodzi preferencja (np. a oraz b) lub nierozróżnialność (np. c oraz d); nie ma żadnej nieporównywalności (P);

d) w klasyfikacji klasy nie muszą być uporządkowane względem preferencji; w sortowania - tak (F);

e) na rysunku y przedstawiono kryterium typu zysk, bo preferencja nie maleje (rośnie lub jest stała) wraz ze wzrostem ocen (P);

f) na rysunku z nie przedstawiono kryterium typu koszt; nie jest to w ogóle kryterium monotoniczne, bo najpierw preferencja rośnie, a potem maleje (F).

II. Warunek monotoniczności dla spójnej rodziny kryteriów typu zysk - poprawna odpowiedź b

- odpowiedź b) jeżeli aPb , to $\forall c: g_j(c) \geq g_j(a), j=1, \dots, k, \Rightarrow cPb$, należy czytać, jeśli a jest preferowane nad b, to dla każdego wariantu c, który ma oceny co najmniej tak dobre jak a, c będzie preferowane nad b - dokładnie o to chodzi w monotoniczności spójnej rodziny kryteriów;
- Zastanów się, jak ten warunek byłby sformułowany dla spójnej rodziny kryteriów typu koszt?
- odp. a - wcale wariant a z co najmniej tak dobrymi ocenami jak wariant b na wszystkich kryteriach nie musi być preferowany; odp. b to przechodniość relacji preferencji (wcale nie musi zachodzić w rzeczywistości), odp. d ma zmienioną prawą stronę implikacji.

III. Warunek zupełności dla spójnej rodziny kryteriów - poprawna odpowiedź d

- odpowiedź d) $\forall a, b: g_j(a) = g_j(b), j=1, \dots, k, \Rightarrow alb$, należy czytać, warianty a oraz b, które mają takie same oceny na wszystkich kryteriach są nierozróżnialne - dokładnie o to chodzi w warunku zupełności;
- odp. a jest bez sensu ze względu na prawą stronę implikacji; odp. b dotyczy przechodniości relacji nierozróżnialności (wcale nie musi zachodzić w rzeczywistości), odp c jest próbą udawania czegoś na wzór warunku monotoniczności tylko w kontekście relacji nierozróżnialności I.

IV. Warianty niezdominowane

- zwróć uwagę, że kryteria są maksymalizowane (typu zysk) - im wyższa ocena tym lepsza;
- wariant a - nie istnieje inny wariant, który miałby co najmniej 1 na kryterium 1 i co najmniej 5 na kryterium 2 i byłby ściśle lepszy na co najmniej jednym z nich - jest więc niezdominowany w sensie silnym; nie istnieje inny wariant, który miałby więcej niż 1 na kryterium 1 i więcej niż 5 na kryterium 2 - jest więc niezdominowany w sensie słabym;
- wariant d - istnieje inny wariant, który miałby co najmniej 2 na kryterium 1 i co najmniej 4 na kryterium 2 i byłby ściśle lepszy na co najmniej jednym z nich (patrz wariant g) - d nie jest więc niezdominowany w sensie silnym; nie istnieje inny wariant, który miałby więcej niż 2 na kryterium 1 i więcej niż 4 na kryterium 2 - d jest więc niezdominowany w sensie słabym;

- wariant j - istnieje inny wariant, który miałby co najmniej 3 na kryterium 1 i co najmniej 1 na kryterium 2 i byłby ściśle lepszy na co najmniej jednym z nich (patrz warianty g, h, i, k, l) - nie jest więc niezdominowany w sensie silnym; istnieje inny wariant, który miałby więcej niż 3 na kryterium 1 i więcej niż 1 na kryterium 2 (patrz wariant k) - nie jest więc niezdominowany w sensie słabym.

V. Przekształcenie do postaci standardowej

- oryginalny kierunek optymalizacji to min, zamieniamy na max, mnożąc funkcję celu przez -1;
- pierwsze ograniczenie ma postać nierówności $\leq$; przepisujemy;
- drugie ograniczenie ma postać nierówności $\geq$; mnożymy dwustronnie przez -1 i zmieniamy na $\leq$;
- trzecie ograniczenie jest równościowe; $x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$ oznacza jednocześnie $x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4$ oraz $x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4$ (temu drugiemu musimy zmienić kierunek);
- warunki nieujemności narzucone są na wszystkie zmienne, więc przepisujemy; jeśli by tak nie było np. dla x_1 , to zastąpilibyśmy x_1 gdziekolwiek by występowało, różnicą dwóch nowych zmiennych (np. $x_1^+ - x_1^-$), na które można narzucić warunek nieujemności $x_1^+, x_1^- \geq 0$.

VII. - VIII. Sformułowanie problemów programowania liniowego.

Dla zadania trzeciego, dostarczono 2 pliki, aby pokazać różnicę w rozwiązaniach uzyskanych dla różnych ustawień solvera (tolerancja 5% - domyślna vs. tolerancja 0% - ustawiona ręcznie). Dla tej drugiej, wartość funkcji celu jest nieznacznie lepsza (3200 > 3188).