Techniki optymalizacji

Wprowadzenie

Maciej Hapke

maciej.hapke at put.poznan.pl

Literatura

- D.E. Goldberg – Algorytmy genetyczne i zastosowania, WNT, 1995
- Z. Michalewicz – Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne, WNT Warszawa, 1996
- E. Aarts, J. Korst – Simulated Annealing and Boltzmann Machines – A stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing, Willey, 1988
- F. Glover, M. Laguna – Tabu search, Kluwer academic publishers, Boston, 1997
- Z. Michalewicz, D.B. Fogel – How to Solve It: Modern Heuristics, Springer, 2000

O czym ma być ten kurs

- O trudnych problemach...
- I o próbach ich rozwiązania...
- Efektywnie i dobrze

Co to znaczy problem

- Problemy mają ci którzy mają cele
- Problem istnieje, gdy zauważono różnicę między zastanym, a pożądanym stanem
- Rozwiązanie problemu polega na przydziale dostępnych zasobów w celu zmniejszenia różnicy między zastanym, a pożądanym stanem

Trzy składowe problemu

- wariant decyzyjny $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots x_n]$
- kryterium oceny wariantu (funkcja celu)
  $z = f(x)$
- ograniczenia

Dlaczego problemy mogą być trudne do rozwiązania

- Duża liczba możliwych rozwiązań
  przeszukanie całej przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych w celu znalezienia najlepszego jest nierealne
- Problem jest b. złożony,
  użycie modeli uproszczonych i rezultaty są bezużyteczne
- Funkcja oceny jest obarczona niepewnością
- Potencjalne rozwiązania mocno ograniczone
  znalezienie jednego dopuszczalnego jest problemem

Dlaczego problemy mogą być trudne do rozwiązania

- Duża liczba możliwych rozwiązań
  przeszukanie całej przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych w celu znalezienia najlepszego jest nierealne
- Problem jest b. złożony,
  użycie modeli uproszczonych i rezultaty są bezużyteczne
- Funkcja oceny jest obarczona niepewnością
- Potencjalne rozwiązania mocno ograniczone
  znalezienie jednego dopuszczalnego jest problemem

Modelowanie problemu

PROBLEM $\leftrightarrow$ MODEL $\leftrightarrow$ ROZWIĄZANIE

- Model - przybliżenie rzeczywistości
- Rozwiązanie $\rightarrow$ problem

- Np. Problem transportowy z nieliniową i nieciągłą funkcją celu
- Dwa sposoby rozwiązania
  - uprościć model, żeby pasował do tradycyjnego modelu i metody rozwiązania
  - wykorzystać nietradycyjne podejście

Dlaczego problemy mogą być trudne do rozwiązania

- Duża liczba możliwych rozwiązań
  przeszukanie całej przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych w celu znalezienia najlepszego jest nierealne
- Problem jest b. złożony,
  użycie modeli uproszczonych i rezultaty są bezużyteczne
- Funkcja oceny jest obarczona niepewnością
- Potencjalne rozwiązania mocno ograniczone
  znalezienie jednego dopuszczalnego jest problemem

Dlaczego problemy mogą być trudne do rozwiązania

- Duża liczba możliwych rozwiązań
  przeszukanie całej przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych w celu znalezienia najlepszego jest nierealne
- Problem jest b. złożony,
  użycie modeli uproszczonych i rezultaty są bezużyteczne
- Funkcja oceny jest obarczona niepewnością
- Potencjalne rozwiązania mocno ograniczone

Dlaczego problemy mogą być trudne do rozwiązania

- Duża liczba możliwych rozwiązań
  przeszukanie całej przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych w celu znalezienia najlepszego jest nierealne
- Problem jest b. złożony,
  użycie modeli uproszczonych i rezultaty są bezużyteczne
- Funkcja oceny jest obarczona niepewnością
- Potencjalne rozwiązania mocno ograniczone
  znalezienie jednego dopuszczalnego jest problemem

Duża liczba rozwiązań

- Problem spełnienia wyrażenia logicznego (SAT)
  np. problem 100 zmiennych

$$F(x) = (x_{13} \vee \overline{x}_{23} \vee x_{34}) \wedge (\overline{x}_{13} \wedge x_{23} \vee \overline{x}_{34}) \wedge \ldots = TRUE$$

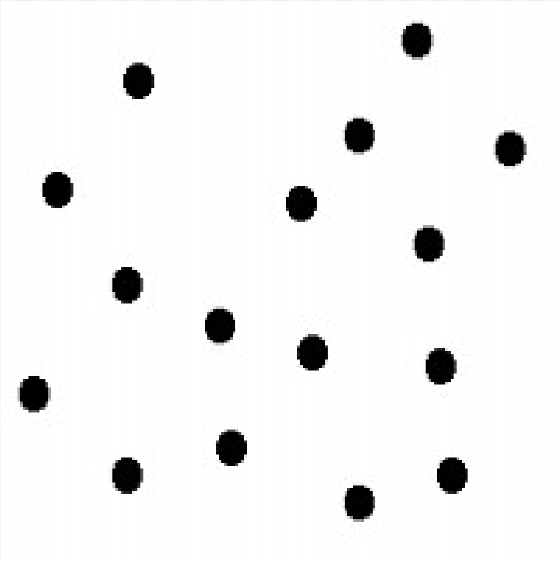
$$|S| = 2^{100} \approx 10^{30}$$

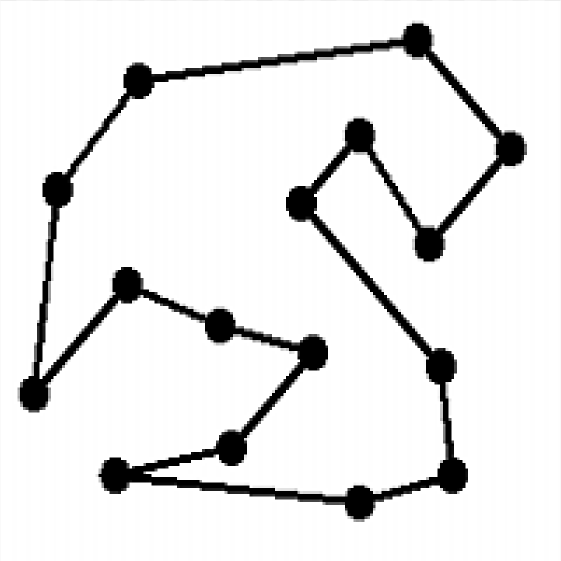
(dwie możliwości dla zmiennej, 100 zmiennych)

Problemy optymalizacji kombinatorycznej
Permutacja jako rozwiązanie

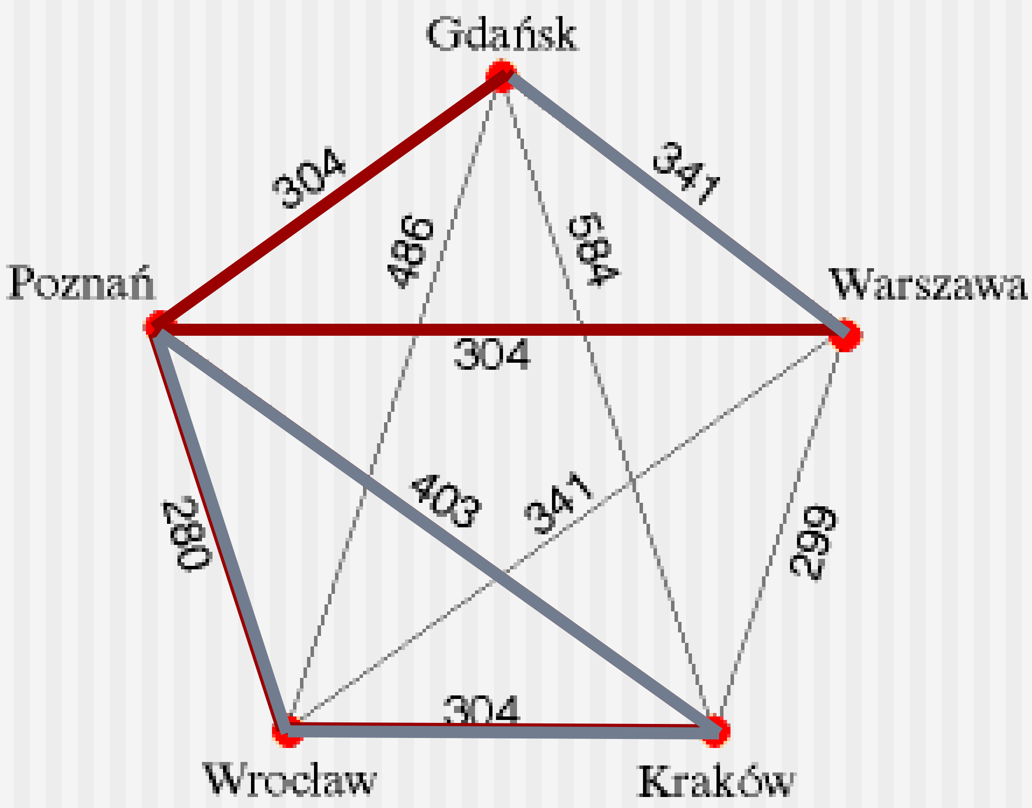
- N – zbiór numerów obiektów
- $\Pi(i)$ – numer obiektu na pozycji i
- $\Pi = \Pi(1), \Pi(2), \ldots , \Pi(n)$
- Cel: znaleźć permutację, która minimalizuje f. celu

Problem komiwojażera (TSP)





Problem komiwojażera (TSP)



Problem komiwojażera (TSP)

Problem komiwojażera (TSP)

$$|S| = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$$

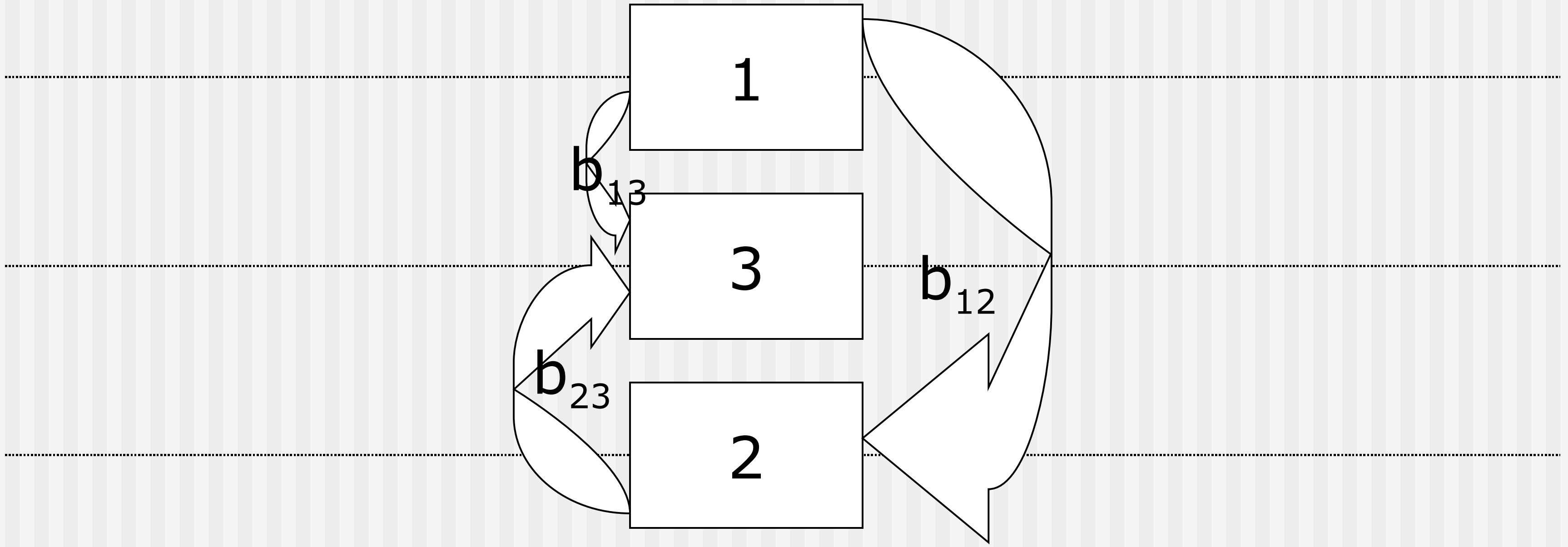
Każda trasa wyrażona na 2n różne sposoby,
n! sposobów permutacji n liczb

10 miast	181 000
20 miast	10 000 000 000 000 000
50 miast	100 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Problem kwadratowego przydziału (QAP)

- Dane
  - Odległości pomiędzy możliwymi lokalizacjami
  - Przepływy pomiędzy czynnościami
- Przykład – lokalizacja personelu medycznego

Problem kwadratowego przydziału (QAP)



Problem podziału grafu (GPP)

- Dane:
  - Graf G(V, E) składający się z n wierzchołków
  - V = { v1, v2, ... vn} oraz zbiór niezorientowanych łuków E łączących pary wierzchołków.

Problem podziału grafu (GPP)

E_{ij} – macierz połączeń

E_{ij} = 1 jeśli v_i jest połączony z v_j
0 w przeciwnym wypadku

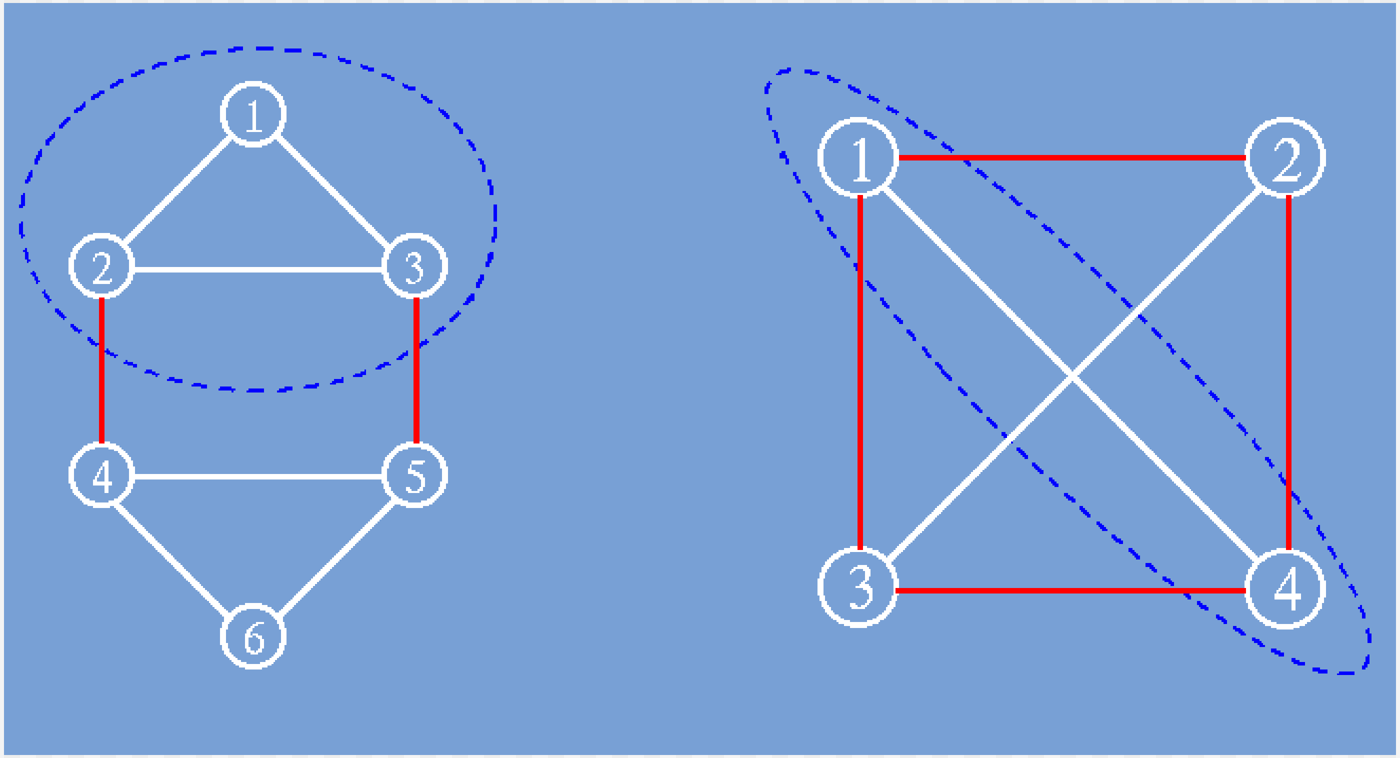
$E_{ij} = E_{ji}$

Problem podziału grafu (GPP)

- Należy dokonać podziału grafu G na dwa rozłączne podzbiory V1 i V2 , takie, że V1 ∪ V2 = V
- Liczba połączeń pomiędzy zbiorami wynosi

$$C[V_1, V_2] = \sum_{i \in V_1,\, j \in V_2} E_{ij}$$

Problem podziału grafu (GPP)



Problem marszrutyzacji pojazdów (VRP)

- Należy odwiedzić wszystkie wierzchołki
- korzystając ze zbioru pojazdów