

Złożenie relacji (ang. composition)

Niech

$$R \subset X \times Y, S \subset Y \times Z.$$

Pytanie:

$$T \subset X \times Z ?$$

Czy można znaleźć taką relację T, która wiąże te same elementy z X, które zawiera R z tymi samymi elementami z Z, które zawiera S? Czyli czy szukamy $T \subset X \times Z$.

Przykład

Podstawowe formy operacji złożenia max-min i max-product (czasem nazywana max-dot):

1. max-min

$$T = R \circ S$$

$$\begin{aligned} \chi_T(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\chi_R(x, y) \wedge \chi_S(y, z)) = \\ &= \max_{y \in Y} (\min(\chi_R(x, y), \chi_S(y, z))) \end{aligned}$$

2. max-product

$$T = R \bullet S$$

$$\begin{aligned} \chi_T(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\chi_R(x, y) \bullet \chi_S(y, z)) = \\ &= \max_{y \in Y} (\chi_R(x, y) \bullet \chi_S(y, z)) \end{aligned}$$

Rozmyte złożenie relacji (ang. fuzzy composition)

Jak w przypadku crisp. Niech \tilde{R} będzie relacją która mapuje elementy z przestrzeni X na Y, a \tilde{S} relacją, która mapuje elementy z Y na Z. Szukamy \tilde{T} z $X \times Z$

1. max-min

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \tilde{R} \circ \tilde{S} \\ \mu_{\tilde{T}}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\mu_{\tilde{R}}(x, y) \wedge \mu_{\tilde{S}}(y, z)) = \\ &= \max_{y \in Y} (\min(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(y, z))) \end{aligned}$$

2. max-product

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \tilde{R} \bullet \tilde{S} \\ \mu_{\tilde{T}}(x, z) &= \bigvee_{y \in Y} (\mu_{\tilde{R}}(x, y) \bullet \mu_{\tilde{S}}(y, z)) = \\ &= \max_{y \in Y} (\min(\mu_{\tilde{R}}(x, y) \bullet \mu_{\tilde{S}}(y, z))) \end{aligned}$$

$R \circ S \neq S \circ R$ (Operacje na macierzach).

Logika klasyczna i rozmyta

Logika klasyczna

Założmy, że mamy dwa twierdzenia

P: prawda, że $x \in A$

Q: prawda, że $x \in B$

Prawdziwość mierzona jest następująco:

Jeżeli $x \in A$, $T(P) = 1$; w przeciwnym wypadku $T(P) = 0$

Jeżeli $x \in B$, $T(Q) = 1$; w przeciwnym wypadku $T(Q) = 0$

Spójniki logiczne (ang. logical connectives)

Dysjunkcja

$$\begin{aligned} P \vee Q: x \in A \text{ lub } x \in B \\ T(P \vee Q) = \max(T(P), T(Q)) \end{aligned}$$

Koniunkcja

$$\begin{aligned} P \wedge Q: x \in A \text{ i } x \in B \\ T(P \wedge Q) = \min(T(P), T(Q)) \end{aligned}$$

Negacja

Jeżeli $T(P) = 1$, to $\bar{T}(P) = 0$

Jeżeli $T(P) = 0$, to $\bar{T}(P) = 1$

Implikacja

$$\begin{aligned} (P \rightarrow Q): x \notin A \text{ lub } x \in B \\ T(P \rightarrow Q) = T(\bar{P} \vee Q) \end{aligned}$$

Równoważność

$$(P \leftrightarrow Q): T(P \leftrightarrow Q) = \begin{cases} 1, & \text{dla } T(P) = T(Q) \\ 0, & \text{dla } T(P) \neq T(Q) \end{cases}$$

Klasyczna implikacja $P \rightarrow Q$ jest prawdziwa we wszystkich przypadkach, oprócz takiego, gdy poprzednik jest prawdą, a następnik fałszem.

Przykład:

1. Jeżeli $1+1=2$ to $4 > 0$

2. Jeżeli $1+1=3$ to $4 > 0$

3. Jeżeli $1+1=3$ to $4 < 0$

4. Jeżeli $1+1=2$ to $4 < 0$

Czyli

$$T(P \rightarrow Q) = T(\bar{P}) \vee T(Q) = \overline{T(P) \wedge \bar{T}(Q)}$$

Wyobraźmy sobie, że implikacja dotyczy dwóch różnych przestrzeni

- P jest twierdzeniem (termem) wyrażonym przez zbiór A określonym na X

- Q jest twierdzeniem (termem) wyrażonym przez zbiór B określonym na Y

Implikacja $P \rightarrow Q$ może być też wyrażona przez relację R:

$$\text{jeżeli } A \text{ to } B \equiv R = A \times B \cup (\bar{A} \times Y)$$

	T	T	T
A		T	
	T	T	T
			B

jeżeli **A** to **B**, w przeciwnym razie **C**
 $\equiv R = A \times B \cup (\bar{A} \times C)$

w logice $(P \rightarrow Q) \vee (\bar{P} \rightarrow S)$
 gdzie $S: y \in C, C \subset Y$

		T
A	T	
		T
	B	C

Przykład

Tautologie

W logice pomocne są związki, które są zawsze prawdziwe (tautologie) w każdej niepustej dziedzinie.

Przykłady tautologii:

- „Każdy pies jest ssakiem” \Rightarrow „Każdy pies jest kręgowcem”
 (w domyśle „Każdy ssak jest kręgowcem”)
 $A \text{ jest } B \wedge B \text{ jest } C \Rightarrow A \text{ jest } C$
- $\sim \bigwedge_x T(x) \Rightarrow \bigvee_x \sim T(x)$
- A jest zbiorem liczb pierwszych, $A_1=1, A_2=2, A_3=3, A_4=5 \dots$, wtedy twierdzenie „ A nie jest podzielne przez 6” jest tautologią.

Dedukcja

wnioskowanie, w którym z przesłanek wynika logicznie wniosek

Dedukcja modus ponens (reguła odrywania)

Z prawdziwości przesłanki i implikacji wynika prawdziwość wniosku.

Przesłanka	A
Implikacja	$A \rightarrow B$
Wniosek	B

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

A – „Jan jest kierowcą”

B – „Jan posiada prawo jazdy”

Dedukcja modus tollens

Przesłanka	\bar{B}
Implikacja	$A \rightarrow B$
Wniosek	\bar{A}

$$(\bar{B} \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \bar{A}$$

\bar{B} – „Jan nie posiada prawa jazdy”

\bar{A} – „Jan nie jest kierowcą”

Wnioskowanie dedukcyjne

Założmy, że mamy regułę $(A \rightarrow B)$

$$\text{JEŻELI } A, \text{ TO } B \equiv R = ((A \times B) \cup (\bar{A} \times Y))$$

gdzie A jest zdefiniowane na X , a B na Y .

? czy znając nowy poprzednik A' możemy wywnioskować nowy następnik B' ?

B' może być znalezione następująco:

$$B' = A' \circ R = A' \circ ((A \times B) \cup (\bar{A} \times Y))$$

Paradoksy logiki dwuwartościowej

- Golibroda z Seville – goli wszystkich i tylko tych mężczyzn, którzy sami się nie golarą, kto goli golibrodę?
- Lubię wszystkich tych i tylko tych którzy sami siebie nie lubią.
- Czy kłamca z Krety kłamie gdy mówi – wszyscy Kreteńczycy są kłamcami.

Niech

S – golibroda sam się goli

\bar{S} – golibroda sam się nie goli

Wtedy

$$S \rightarrow \bar{S} \text{ oraz } \bar{S} \rightarrow S, \text{ tzn. } S \leftrightarrow \bar{S},$$

$$\text{czyli } T(S) = T(\bar{S}) = 1 - T(S)$$

$$T(S) = \frac{1}{2} \text{ (półprawda – pół fałsz)}$$

Logika rozmyta

Założmy, że twierdzenie \tilde{P} jest przypisane do zbioru \tilde{A} , wtedy wartość prawdziwa twierdzenia będzie wyrażona:

$$T(\tilde{P}) = \mu_{\tilde{A}}(x), \text{ gdzie } \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]$$

Stopień prawdziwości $T(\tilde{P})$ jest odpowiada stopniowi przynależności x do \tilde{A} .

Niech \tilde{P} będzie określone na zbiorze \tilde{A} , a \tilde{Q} na zbiorze \tilde{B} . Wtedy

Negacja

$$T(\tilde{\bar{P}}) = 1 - T(\tilde{P})$$

Dysjunkcja

$$\tilde{P} \vee \tilde{Q} : x \text{ jest } \tilde{A} \text{ lub } \tilde{B} \quad T(\tilde{P} \vee \tilde{Q}) = \max(T(\tilde{P}), T(\tilde{Q}))$$

Koniunkcja

$$\tilde{P} \wedge \tilde{Q} : x \text{ jest } \tilde{A} \text{ i } \tilde{B} \quad T(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) = \min(T(\tilde{P}), T(\tilde{Q}))$$

Implikacja [Zadeh, 1973]

$$\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q} : x \text{ jest } \tilde{A}, \text{ to } y \text{ jest } \tilde{B} \quad T(\tilde{P} \rightarrow \tilde{Q}) = \max(T(\tilde{\bar{P}}), T(\tilde{Q}))$$

Jeżeli x jest \tilde{A} to y jest \tilde{B}

$$\tilde{R} = (\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (\tilde{\bar{A}} \times Y)$$

funkcja przynależności

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \max[(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)), (1 - \mu_{\tilde{A}}(x))]$$

Jeżeli x jest \tilde{A} to y jest \tilde{B} , w przeciwnym razie y jest \tilde{C}

$$\tilde{R} = (\tilde{A} \times \tilde{B}) \cup (\tilde{\bar{A}} \times \tilde{C})$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \max[(\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)), ((1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \wedge \mu_{\tilde{C}}(y))]$$

Wnioskowanie przybliżone

(Wnioskowanie z nieprecyzyjnych twierdzeń)

Uogólniona (rozmyta) reguła wnioskowania *modus ponens*.

Przesłanka	x jest \tilde{A}'
Implikacja	Jeżeli x jest \tilde{A} to y jest \tilde{B}
Wniosek	y jest \tilde{B}'

$$\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ \tilde{R}$$

Przykład:

Przesłanka	Prędkość samochodu jest „duża”
Implikacja	Jeżeli prędkość samochodu jest „bardzo duża”, to poziom hałasu jest „wysoki”
Wniosek	Poziom hałasu w samochodzie jest „średniowysoki”

Inne operacje rozmytej implikacji

Implikacja Zadeha (1973)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \max\{\min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)], 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\}$$

Implikacja Mamdani'ego (1976)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}$$

Implikacja Larsena

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{A}}(x) * \mu_{\tilde{B}}(y)$$

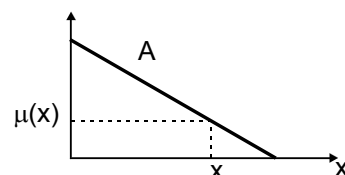
Implikacja Łukasiewicza

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \min\{1, [1 - \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(y)]\}$$

Ocena przesłanki

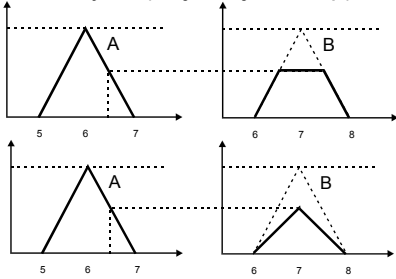
Wnioskowanie rozmyte - ocena stopnia spełnienia przesłanek poszczególnych reguł i przeniesienie go na konkluzje.

Sposób obliczania stopnia spełnienia przesłanki JEŻELI $x=A$

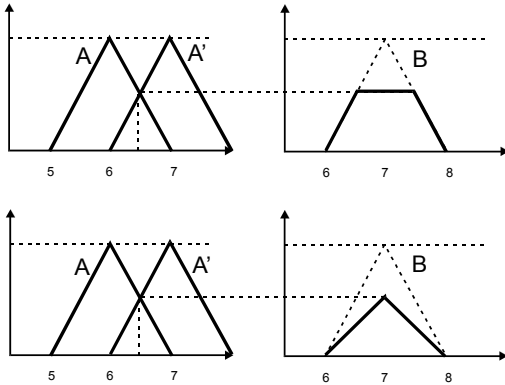


Przykłady graficzne wnioskowania

1. Jeżeli $x=A$ to $y=B$ (wejście jest crisp)



2. Jeżeli $x=A$ to $y=B$ (wejście jest fuzyzy)



Obliczenia dla uproszczonej wersji dyskretnej, tzn.

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0}{5} + \frac{.5}{5.5} + \frac{1}{6} + \frac{.5}{6.5} + \frac{0}{7} \right\} \quad \tilde{B} = \left\{ \frac{0}{6} + \frac{.5}{6.5} + \frac{1}{7} + \frac{.5}{7.5} + \frac{0}{8} \right\}$$

1. $x = 6.5$, tzn. $\tilde{A}' = \left\{ \frac{0}{5} + \frac{0}{5.5} + \frac{0}{6} + \frac{1}{6.5} + \frac{0}{7} \right\}$ (crisp)

2. $\tilde{A}' = \left\{ \frac{0}{5} + \frac{0}{5.5} + \frac{0}{6} + \frac{0.5}{6.5} + \frac{1}{7} \right\}$ (fuzyzy)

Implikacja Mamdaniego i iloczynowa.

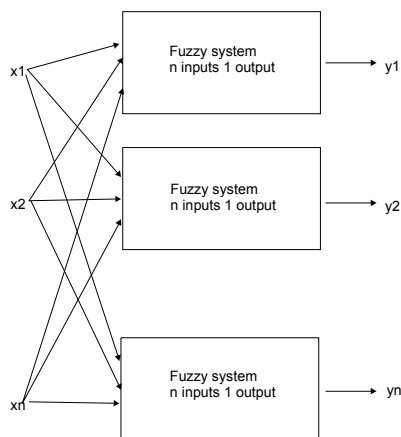
ad.1.

A'	A\B	6	6.5	7	7.5	8	
0	5	0	0	0	0	0	
0	5.5	0	0.5	0.5	0.5	0	
0	6	0	0.5	1	0.5	0	
1	6.5	0	0.5	0.5	0.5	0	[0 0.5 0.5 0.5 0]
0	7	0	0	0	0	0	

ad.2.

A'	A\B	6	6.5	7	7.5	8	
0	5	0	0	0	0	0	
0	5.5	0	0.5	0.5	0.5	0	
0	6	0	0.5	1	0.5	0	
0.5	6.5	0	0.5	0.5	0.5	0	[0 0.5 0.5 0.5 0]
1	7	0	0	0	0	0	

Rozmyte systemy regulowe



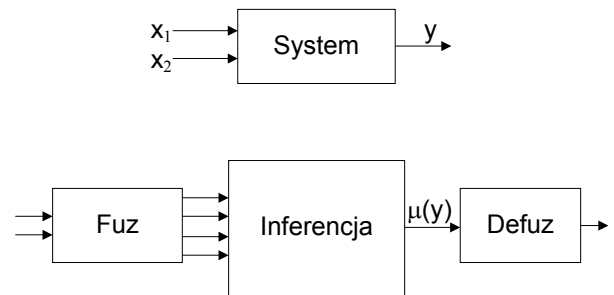
Postać kanoniczna systemu rozmytego

Reguła 1: JEŻELI c_1 , TO r_1

Reguła 2: JEŻELI c_2 , TO r_2

...

Struktura systemu rozmytego



Nazwa oper.	Fuzyfikacja (rozmywanie)	Inferencja (wnioskowanie)	Defuzyfikacja (ostrzenie)
Oper.	<ul style="list-style-type: none"> obliczanie stopnia przynależności wartości wejść modelu do zbiorów rozmytych tych wejść 	<ul style="list-style-type: none"> ocena stopnia spełn. przesłanek reguł określenie f. przyn. konkluzji określenie wynikowej f. przyn. wszystkich reguł 	<ul style="list-style-type: none"> zastąpienie zbioru rozmytego wartością ostrą
Elem.	<ul style="list-style-type: none"> funkcje przynależności wejść 	<ul style="list-style-type: none"> baza reguł mechanizm inferencji funkcje przynależności wyjścia y 	<ul style="list-style-type: none"> mechanizm defuzyfikacji

Dekompozycja reguł złożonych

Wiele koniunkcji poprzedników

JEŻELI x jest \tilde{A}_1 oraz ... x jest \tilde{A}_L TO y jest \tilde{B}_s

$$\tilde{A}_s = \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \dots \cap \tilde{A}_L$$

$$\mu_{\tilde{A}_s}(x) = t[\mu_{\tilde{A}_1}(x), \dots, \mu_{\tilde{A}_L}(x)]$$

JEŻELI x jest \tilde{A}_s TO y jest \tilde{B}_s

Dla dwóch przesłanek prostych:

JEŻELI $(x_1=A_1) \text{ I } (x_2=A_2)$

to dla $x_1=x_1^*$ oraz $x_2=x_2^*$ stopień jej prawdziwości jest obliczany

$$\mu_{\tilde{B}_s}(x_1^*, x_2^*) = \mu_{A_1 \cap A_2}(x_1^*, x_2^*) = t(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*))$$

gdzie t jest jednym z operatorów t -normy.

Operatory t -normy

1. min-operator

$$t(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*)) = \min(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*))$$

2. iloczyn algebraiczny

$$t(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*)) = \mu_{A_1}(x_1^*) * \mu_{A_2}(x_2^*)$$

Wiele dysjunkcji poprzedników

JEŻELI x jest \tilde{A}_1 lub ... x jest \tilde{A}_L TO y jest \tilde{B}_s

$$\tilde{A}_s = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup \dots \cup \tilde{A}_L$$

$$\mu_{\tilde{A}_s}(x) = \max[\mu_{\tilde{A}_1}(x), \dots, \mu_{\tilde{A}_L}(x)]$$

JEŻELI x jest \tilde{A}_s TO y jest \tilde{B}_s

Dla dwóch przesłanek prostych:

JEŻELI $(x_1=A_1) \text{ LUB } (x_2=A_2)$

$$\mu_{\tilde{B}_s}(x_1^*, x_2^*) = \mu_{A_1 \cup A_2}(x_1^*, x_2^*) = s(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*))$$

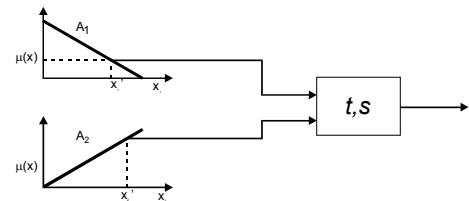
Operatory s -normy:

1. max-operator

$$s(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*)) = \max(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*))$$

2. suma algebraiczna

$$s(\mu_{A_1}(x_1^*), \mu_{A_2}(x_2^*)) = \mu_{A_1}(x_1^*) + \mu_{A_2}(x_2^*)$$



Agregacja zbioru reguł rozmytych

W określaniu strategii agregacji istnieją dwa ekstremalne przypadki:

a. Koniunkcyjny system reguł.

Wszystkie reguły muszą być spełnione, połączenie „and”.

$$y = y^1 \text{ and } y^2 \text{ and } \dots \text{ and } y^r$$

$$y = y^1 \cap y^2 \cap \dots \cap y^r$$

funkcja przynależności

$$\mu_y(y) = \min(\mu_{y^1}(y), \mu_{y^2}(y), \dots, \mu_{y^r}(y)) \text{ dla } y \in Y$$

b. Dysjunkcyjny system reguł.

Tu wymagane jest spełnienie przynajmniej jednej reguły. Łącznik „or”.

$$y = y^1 \text{ or } y^2 \text{ or } \dots \text{ or } y^r$$

$$y = y^1 \cup y^2 \cup \dots \cup y^r$$

funkcja przynależności

$$\mu_y(y) = \max(\mu_{y^1}(y), \mu_{y^2}(y), \dots, \mu_{y^r}(y)) \text{ dla } y \in Y$$

Graficzne techniki wnioskowania (system reguł z wieloma przesłankami)

Załóżmy rozmyty system regułowy, dysjunkcyjny:
2 wejścia i 1 wyjście

4 przypadki:

1. x_1 i x_2 są crisp (funkcjami delta), wtedy

Wg metody wnioskowania Mamdaniego,

$$\mu_{\tilde{B}_k}(y) = \max_k [\min[\mu_{\tilde{A}_1^k}(\text{input}(i)), \mu_{\tilde{A}_2^k}(\text{input}(j))]] \quad k = 1, 2, \dots, r$$

2. x_1 i x_2 są crisp (funkcjami delta), wtedy

Wg metody (max-product inference method)

$$\mu_{\tilde{B}_k}(y) = \max_k [\mu_{\tilde{A}_1^k}(\text{input}(i)) \cdot \mu_{\tilde{A}_2^k}(\text{input}(j))] \quad k = 1, 2, \dots, r$$

3. x_1 i x_2 są rozmyte

Wg metody wnioskowania Mamdaniego

$$\mu_{\tilde{B}_k}(y) = \max_k [\min\{\max[\mu_{\tilde{A}_1^k}(x) \wedge \mu(x_1)], \max[\mu_{\tilde{A}_2^k}(x) \wedge \mu(x_2)]\}] \quad k = 1, 2, \dots, r$$

4. x_1 i x_2 są rozmyte

Wg metody wnioskowania max-product

$$\mu_{\tilde{B}_k}(y) = \max_k [\max[\mu_{\tilde{A}_1^k}(x) \wedge \mu(x_1)], \max[\mu_{\tilde{A}_2^k}(x) \wedge \mu(x_2)]]$$

Algorytm inferencji

Reguła 1: JEŻELI $x_1 = A_{11} \mid \dots \mid x_n = A_{1n}$, TO $y = B_1$

...

Reguła j : JEŻELI $x_1 = A_{j1} \mid \dots \mid x_n = A_{jn}$, TO $y = B_j$

...

Reguła m : JEŻELI $x_1 = A_{m1} \mid \dots \mid x_n = A_{mn}$, TO $y = B_m$

Krok 1.

Określić stopień spełnienia przesłanek poszczególnych reguł (agregacja przesłanek, t-norma)

$$h_1 = t(\mu_{A_{11}}(x_1^*), \dots, \mu_{A_{1n}}(x_n^*))$$

⋮

$$h_j = t(\mu_{A_{j1}}(x_1^*), \dots, \mu_{A_{jn}}(x_n^*))$$

⋮

$$h_m = t(\mu_{A_{m1}}(x_1^*), \dots, \mu_{A_{mn}}(x_n^*))$$

Krok 2.

Określić zmodyfikowane funkcje przynależności $\mu_{B_j}^*(y)$ konkluzji (następników) poszczególnych reguł (inferencja w regułach). Tylko dla reguł, których przesłanki spełnione są w stopniu $h > 0$.

$$\mu_{B_1}^*(y) = t(h_1, \mu_{B_1}(y))$$

⋮

$$\mu_{B_j}^*(y) = t(h_j, \mu_{B_j}(y))$$

⋮

$$\mu_{B_m}^*(y) = t(h_m, \mu_{B_m}(y))$$

Krok 3.

Określić wynikową funkcję przynależności $\mu(y)$ przez akumulację zmodyfikowanych funkcji przynależności $\mu_{B_j}^*(y)$ konkluzji poszczególnych reguł

$$\mu(y) = \mu_{B^*}(y) = s(\mu_{B_1}^*(y), \dots, \mu_{B_m}^*(y))$$