J.NAWROCKI, M. ANTCZAK, W. FROHMBERG, K. KOLANOWSKI, J. POCHMARA, S. WĄSIK, T. ŻOK

# SPRZĘT, OPERACJE BITOWE

## 1. PODSTAWOWE FUNKCJE LOGICZNE:

**a) negacja (NOT):**

f(a) = $\bar{a}$

| | | |
|---|---|---|
| a | 0 | 1 |
| nie a | 1 | 0 |

**b) suma (alternatywa, OR):**

f(a,b) = a v b

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 0 | 1 | 1 |
| b | 0 | 1 | 0 | 1 |
| avb | 0 | 1 | 1 | 1 |

**c) iloczyn (koniunkcja, AND):**

f(a,b) = a ^ b = ab

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 0 | 1 |
| b | 0 | 0 | 1 | 1 |
| a^b | 0 | 0 | 0 | 1 |

**d) implikacja (wynikania):**

a => b

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 0 | 1 |
| b | 0 | 0 | 1 | 1 |
| a=>b | 1 | 0 | 1 | 1 |

**e) równoważność:**

a <=> b

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 0 | 1 |
| b | 0 | 0 | 1 | 1 |
| a<=>b | 1 | 0 | 0 | 1 |

**f) EX-OR (różnica symetryczna, suma modulo 2):**

f(a,b) = $a \oplus b = a\bar{b} \vee \bar{a}b$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 0 | 1 | 1 |
| b | 0 | 1 | 0 | 1 |
| a+b | 0 | 1 | 1 | 0 |

## 2. WPROWADZENIE DO ALGEBRY BOOLE'A:

**TWIERDZENIA:**

**a) o podwójnej negacji:**

$\overline{\overline{a}} = a$

**b) o dopełnieniu:**

$a \vee \overline{a} = 1$

$a \wedge \overline{a} = 0$

**c) o alternatywie:**

$a \vee 0 = a$
$a \vee 1 = 1$

**d) o koniunkcji:**

$a \wedge 0 = 0$
$a \wedge 1 = a$

**e) o przemienności:**

$a \vee b = b \vee a$
$a \wedge b = b \wedge a$

**f) o łączności:**

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

**g) o rozdzielności:**

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

**h) o idempotentności:**

$a \vee a = a$
$a \wedge a = a$

**i) o absorpcji:**

$a \vee (a \wedge b) = a$
$a \wedge (a \vee b) = a$

| a | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| b | 0 | 0 | 1 | 1 |
| a(avb) | 0 | 1 | 0 | 1 |

$a(a \vee b) = a$

**j) De Morgana:**

$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$

**Przykład zastosowania:**

$$L = \bar{w} \vee \bar{z} \vee (x \vee wz)(y \vee z) = \bar{w} \vee \bar{z} \vee xy \vee xz \vee wzy \vee wzz = \bar{w} \vee \bar{z} \vee xy \vee xz \vee wzy \vee wz =$$

$$= \bar{w} \vee \bar{z} \vee xy \vee xz \vee wz\overset{\{\ 1\ \}}{(y \vee 1)} = \bar{w} \vee \bar{z} \vee xy \vee xz \vee wz = \bar{w} \vee \bar{z} \vee xy \vee xz \vee z = 1$$

$\{a \vee (b \wedge c) = (a \vee b)(a \vee c)\}$

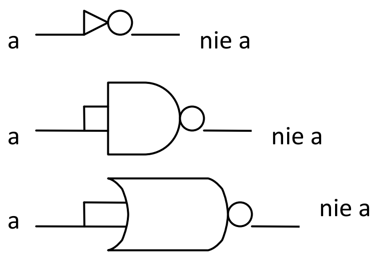
$\{a \vee (b \wedge \bar{a}) = (a \vee b)(a \vee \bar{a}) = a \vee b\}$

$\{\bar{w} \vee (zw) = \bar{w} \vee z\}$

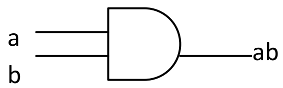
## 3. PODSTAWOWE UKŁADY I FUNKTORY LOGICZNE:

### 1. FUNKTORY:

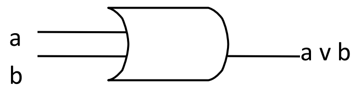
**a) negacja NOT:**



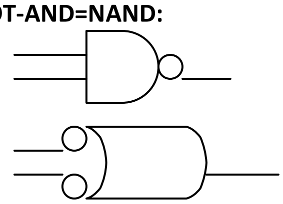

**b) iloczyn AND:**



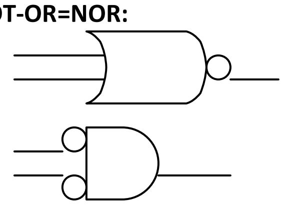

**c) suma OR:**



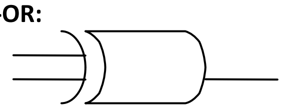

**d) NOT-AND=NAND:**



**e) NOT-OR=NOR:**



**f) EX-OR:**



## 2. UKŁADY:

a) kombinacyjne – każda kombinacja sygnału wejściowego określa jednoznacznie kombinację sygnałów wyjściowych,
b) sekwencyjne – kombinacja sygnału wejściowego jest nazywana stanem wejść układu, natomiast kombinacja sygnałów wyjściowych jest nazywana stanem wyjść układu.

## 3. POSTAĆ KANONICZNA FUNKCJI - TWIERDZENIE O ROZKŁADZIE:

Dowolną funkcję przełączającą można rozłożyć na dwa składniki.

$f(x_1,x_2,...,x_n) = x_1 f(1,x_2,...,x_n) \vee \overline{x_1} f(0,x_2,...,x_n)$

## 4. TABLICE (TABELE, SIATKI):

a) prawdy – stanowi pierwszy zapis rozwiązywanego problemu konstrukcyjnego, jest daną wejściową dla tablicy Karnaugh,
b) Karnaugh – stanowi daną wejściową dla określania postaci funkcji, jej wiersze i kolumny określają zmienne, a ich przecięcia – wyniki operacji na tych zmiennych.

Zasady zakreślania grup:

- liczba pól elementarnych łączonych za sobą musi być potęgą liczby 2,
- łączone pola muszą być polami sąsiadującymi ze sobą, tzn. oddzielone od siebie linią prostą lub poprzeczną lub krawędzią tablicy,
- połączone pola muszą mieć kształt symetryczny względem swych osi (prostokąty lub kwadraty). 7. Multipleksery / demultipleksery:

# 4. WYJAŚNIENIA

## 1. TWORZENIE TABLICY KARNAUGH

- pierwszą połowę zmiennych przypisujemy do wierszy,
- drugą połowę zmiennych przypisujemy do kolumn,
- liczba zmiennych przypisanych do wierszy i kolumn powinna różnić się maksymalnie o 1,
- indeksy tablicy (wiersze i kolumny) numerowane są przy pomocy binarnego kodu Graya.

## 1.2. BINARNY KOD GRAYA:

- stworzenie odbicia lustrzanego do istniejących (początkowych) słów kodowych (przepisanie w odwrotnej kolejności),
- dopisanie do początkowych słów kodowych bitu o wartości **0**, a do dopisanych słów kodowych bitu o wartości **1**.

**Przykłady:**

| kod 1-bitowy | odbicie lustrzane | dopisanie **0** i **1** |
|---|---|---|
| 0 | 0 | **0**0 |
| 1 | 1 | **0**1 |
| | 1 | **1**1 |
| | 0 | **1**0 |

| kod 2-bitowy | odbicie lustrzane | dopisanie **0** i **1** |
|---|---|---|
| 00 | 00 | **0**00 |
| 01 | 01 | **0**01 |
| 11 | 11 | **0**11 |
| 10 | 10 | **0**10 |
| | 10 | **1**10 |
| | 11 | **1**11 |
| | 01 | **1**01 |
| | 00 | **1**00 |

Przykładowa tablica Karnaugh dla 5 zmiennych:

| abc\de | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 000 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 001 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 011 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 010 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 110 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 111 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 101 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 100 | 0 | 1 | 1 | 0 |

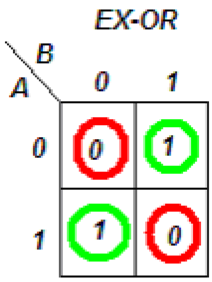
## 2. WYZNACZANIE FUNKCJI NA PODSTAWIE TABLICY KARNAUGH

EX-OR (różnica symetryczna, suma modulo 2):

$$f(a,b) = a \oplus b = a\bar{b} \vee \bar{a}b$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 0 | 1 | 1 |
| b | 0 | 1 | 0 | 1 |
| a+b | 0 | 1 | 1 | 0 |

Na podstawie powyższej tablicy prawdy tworzymy odpowiadającą jej tablicę Karnaugh, której postać znajduje się poniżej.




Spróbujmy w tym momencie wyznaczyć funkcję na podstawie powyższego schematu. Zakreślamy odpowiednio kółkami maksymalną ilość zer lub jedynek. Najpierw przeprowadzimy rozumowanie dla jedynek, a następnie dla zer.

**Dla jedynek:**

Założyliśmy, że jeżeli wartość wejściowa np.: dla A (będąca w naszym przypadku etykietą kolumny) reprezentuje 1, to tworząc funkcję wyjściową przepisujemy A. W przeciwnym razie przepisujemy $\bar{A}$. **W przypadku jedynek naszą funkcje tworzymy poprzez sumę wszystkich iloczynów zmiennych, dla których wyjście w tablicy Karnaugh jest równe 1.** Mamy dwie jedynki w zielonych kółeczkach, a więc mamy w funkcji sumę dwóch iloczynów. W takim razie nasza funkcja wyjściowa wygląda następująco:

$f_{a,b(1)} = A\bar{B} + \bar{A}B$

**Dla zer:**

Założyliśmy, że jeżeli wartość wejściowa np.: dla A (będąca w naszym przypadku etykietą kolumny) reprezentuje 0 to tworząc funkcję wyjściową przepisujemy A. W przeciwnym razie przepisujemy $\bar{A}$. **W przypadku zer naszą funkcje tworzymy poprzez iloczyn wszystkich sum zmiennych, dla których wyjście w tablicy Karnaugh jest równe 0.** Mamy dwa zera w czerwonych kółeczkach, a więc mamy w funkcji iloczyn dwóch sum. W takim razie nasza funkcja wyjściowa wygląda następująco:

$$f_{a,b(0)} = (\bar{B} + \bar{A})*(A + B) = \bar{B}A + \bar{B}B + \bar{A}A + \bar{A}B = \bar{B}A + \bar{A}B$$

**Wniosek!!!**

Wyznaczone funkcje za pomocą zer i jedynek muszą być sobie równe, a więc $\mathbf{f_{a,b(1)} = f_{a,b(0)}}$

**Wniosek!!!**

Powyższe zależności dotyczące sposobu wyznaczania funkcji biorące pod uwagę zera lub jedynki wynikają z **praw de Morgana**, które zostały zdefiniowane powyżej.

3. **Dyskryminator** jest to układ, który ma na wejściu liczbę 4-bitową (4 wejścia) i jedno wyjście. Wartość na wyjściu jest równa 1, jeżeli na wejściu są liczby z zakresu od 9-12. W przeciwnym razie na wyjściu dyskryminatora jest liczba 0.