

Opis obrazu: cechy obiektów, ich pomiar i analiza

Rozpoznawanie obrazów

Slajd podsumowania

Analiza kształtu

- Sygnatura
- Szkielet
 - Definicja odległości
- Przetwarzanie wstępne
- Shape number
- Przybliżenia wielokątami
- Powłoka wypukła
 - Niedobór wypukłości
- Opis krawędzi w dziedzinie częstotliwości
- Transformacje FD
- Proste cechy geometryczne
- Momenty (geometryczne)
- Współczynniki kształtu
- Wymiar fraktalny
- Rzuty

Analiza tekstury

- Gęstość krawędzi
- Metody widmowe
- Opis tekstury - Metody statystyczne
- Opis tekstury przez histogram
- Macierz współwystąpień
- Cechy obrazu z macierzy współwystąpień

Inne zagadnienia:

- Transformacja Hough'a
- Diagram Voronoï'a

2



Cechy obiektów

Cel: uzyskanie opisu obrazu/obiektu o następujących właściwościach:

- wysokiej zawartości informacyjnej,
- zwężłości,
- niezmienniczości ze względu na różne transformacje obrazu,
 - najczęściej przesunięcie (T), skalowanie (S), obrót (R),
 - rzadziej: niezależność od innych zniekształceń (np. wynikających z transformacji 3D).

3



Cechy geometryczne i niegeometryczne

- Cechy geometryczne: dotyczą kształtu obwiedni obiektu (np. pole powierzchni, obwód, etc.).
- Cechy niegeometryczne: zależące od wartości funkcji charakterystycznej (jasności w obrazach z gradacją stopni szarości), np. intensywność, kolor, tekstura.

4



Cechy obiektów

Analiza:

- kształtu
 - na podstawie konturu,
 - na podstawie wnętrza figury,
- tekstury

5

Analiza kształtu

Sygnatura

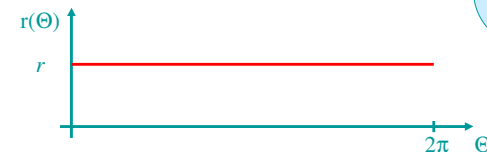
- Jednowymiarowa (1D) reprezentacja brzegu (konturu) obiektu.
- Może być uzyskana w różny sposób, zazwyczaj jako zależność *pewnej* miary odległości od *pewnego* punktu jako funkcja *pewnej* zmiennej niezależnej, np.
 - odległość euklidesowa od centroidu jako funkcja kąta: $r(\theta)$,
 - odległość euklidesowa od centroidu jako funkcja zmiennej kroczącej krawędzi (np. numeru punktu brzegowego),

Własności: Niezmienniczość T, ale nie R i S.

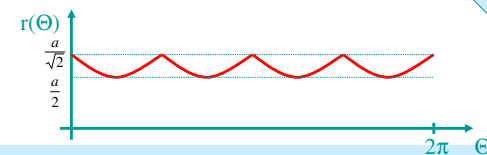
7

Sygnatury - przykłady

Okrąg o promieniu r



Kwadrat (romb) o boku a



8

Sygnatury

Zapewnienie niezmienniczości R: standaryzacja wyboru punktu startowego, np.

- punkt najbardziej odległy od centroidu
- punkt na osi głównej składowej (*principal axis*) najbardziej odległy od centroidu (lepsze, bo oparte na wszystkich punktach konturu).
- kody łańcuchowe

Zapewnienie niezmienniczości S: normalizacja $r(\theta)$

- do przedziału $[0, 1]$; może być zawodne, bo max i min mogą wynikać z szumów
- poprzez dzielenie przez wariancję $r(\theta)$ (przy założeniu że niezerowa i wystarczająco duża, żeby nie doprowadzić do kłopotów zmiennoprzecinkowych).

9



Szkielet

Szkielet

– *Skeleton (thinning, skeletonizing)*

- Cel: redukcja kształtu obiektu do grafu.
- Definicja: *Punkt szkieletowy (oś środkowa, ang. skeleton, medial axis)* zbioru (obszaru) R to punkt, który ma więcej niż jednego najbliższego sąsiada na brzegu B zbioru R. *Szkielet* R to zbiór wszystkich punktów szkieletowych R.
- Inaczej: punkty szkieletowe to punkty o tej własności, że są środkami okręgów całkowicie zawartych w R, przy czym nie ma innego okręgu o tym samym środku i większym promieniu zawartego całkowicie w R.

11



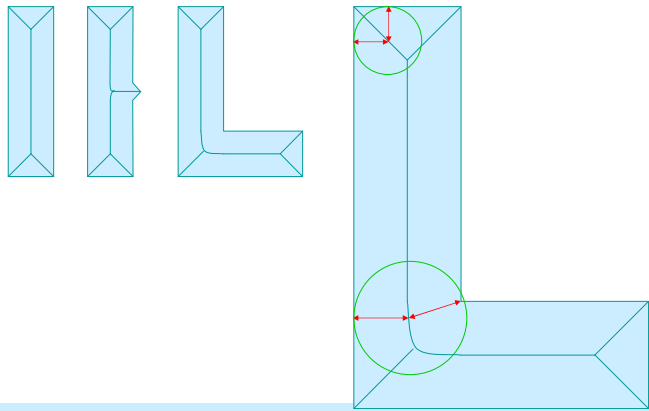
Szkielet

- Źródło: MAT (Medial Axis Transform) (Blum 67).
- Nadaje się głównie do analizy cienkich obiektów.
- Podatność na drobne zniekształcenia brzegów.

12

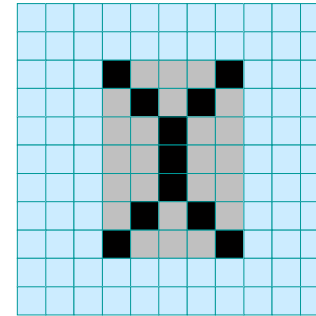


Szkielet - przykłady ciągłe



13

Szkielet - przykład dyskretny



14

Szkielet

Twierdzenie:

Jeżeli punkt P jest środkiem krzywizny punktu należącego do brzegu B zbioru R , gdzie krzywizna brzegu ma lokalne maksimum, to istnieje gałąź szkieletu kończąca się w punkcie P .

(Krzywizna to odwrotność promienia okręgu stycznego do brzegu).

15

Definicja odległości

Definicja odległości

Wymagana:

- nieujemność,
- zwrotność,
- symetryczność,
- spełnienie nierówności trójkąta.

17

Definicja odległości

- Euklidesowa D_2

$$D_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- blokowa (city block, Manhattan) D_4

$$D_4((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

- "szachownicowa" (chessboard distance, norma Czebyszewa) D_8

$$D_8((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

Własności:

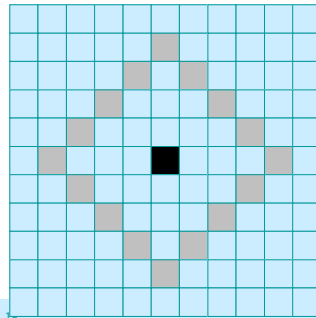
- D_8 to liczba punktów w najkrótszej N_8 ścieżce,
- D_4 to suma wartości bezwzględnych sum przyrostów dx i dy (pomiędzy kolejnymi punktami) w dowolnej ścieżce
- wszystkie mają są dyskretny zbiór wartości; ponadto D_4 i D_8 dają wartości całkowite.

18

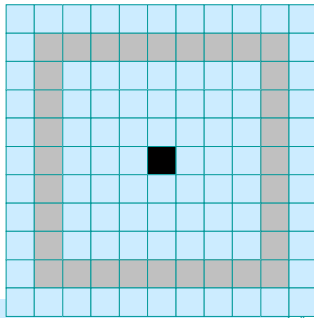
Definicja odległości - przykład

Okrąg o promieniu 4

D_4

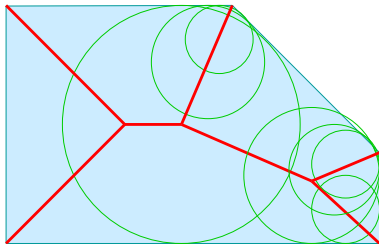


D_8



Szkielet przy różnych definicjach odległości

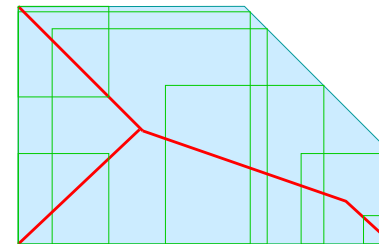
Szkielet dla odległości D_2



21



Szkielet dla odległości D_8

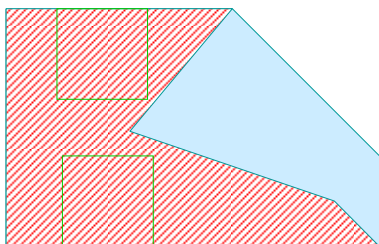


Tak to wygląda przy wymaganiu, aby kwadrat był styczny do krawędzi obiektu dwoma różnymi bokami.

22



Szkielet dla odległości D_8



Tak natomiast gdy stosujemy definicję szkieletu dosłownie.

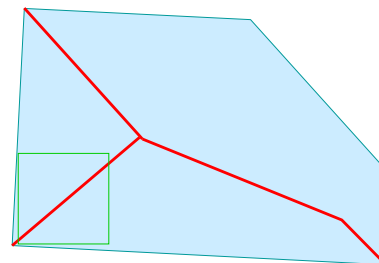
Takie podejście daje szkielet

- składający się z dużej liczby punktów,
- bardzo wrażliwy na obroty obiektu

23



Po (nieznacznym nawet) obrocie



Skokowa zmiana kształtu szkieletu
=> konieczność uprzedniej standaryzacji ze względu na obrót.

24



Algorytmy wyznaczania szkieletu

- wg definicji: poszukiwanie "okręgów";
 - nieefektywne;
- algorytmy wykorzystujące operacje morfologiczne,
 - nieefektywne,
- algorytmy dedykowane
 - np. pocienianie,
- algorytmy szybkie, ale przybliżone, np. oparte na grafie przyległości linii (GPL),

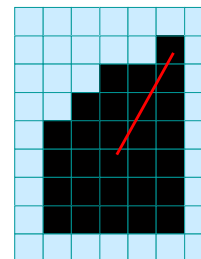
25



Algorytmy wyznaczania szkieletu

Problem w geometrii dyskretnej:

- trudność ze zdefiniowaniem **równości** odległości



26



Algorytmy pocieniania

Generalna filozofia: iteracyjnie usuwanie punktów w taki sposób, by:

- nie usuwać punktów końcowych,
- nie naruszać spójności szkieletu,
- nie powodować nadmiernej erozji regionu.

Generalna przesłanka: jeżeli dokonujemy w miarę jednorodnej erozji obszaru z wyjątkiem punktów końcowych szkieletu, to dostajemy szkielet „przybliżony” (dokładniej: pewien podzbiór punktów należących do szkieletu).

Pocienianie $\neq$ szkielet

27



Pocienianie - algorytm dedykowany

Funkcja pomocnicza: oblicza liczbę przejść 0-1 w sąsiedztwie N8 bieżącego punktu, przeglądając sąsiadów w porządku zgodnym z numeracją (kierunek przeciwny od ruchu wskazówek zegara).

```
Function N8Trans(p)
n=0
for i=0 to 7 do
    if N8(p,i)=0 and N8(p,(i+1)mod 8)=1 then
        n++
    endif
endfor
N8Trans=n
EndFunction
```

Przykłady:



N8Trans=1



N8Trans=2

28



Pocienianie - algorytm dedykowany

```

procedure Szkielet(R)
// R - zbiór punktów obszaru (zapalone, 1)
// D - zbiór punktów do usunięcia (w każdej iteracji alg.)

```

```

do    // pętla po iteracjach algorytmu
  D = ∅
  foreach p in R // pętla po punktach obszaru

```

```

    if |N8(p)| in <2,6> and N8Trans(p)=1 then

```

```

        if (N8(p,2)*N8(p,4)*N8(p,6)=0 and
            N8(p,4)*N8(p,6)*N8(p,8)=0) or
            (N8(p,2)*N8(p,4)*N8(p,8)=0 and
            N8(p,2)*N8(p,6)*N8(p,8)=0) then

```

ilość punktów w N8-
sąsiedztwie p
należących do R

} warunek A

} warunek B

```

            D = D ∪ {p}

```

```

        endif

```

```

    endif

```

```

  endfor

```

```

  R = R \ D // usuń zaznaczone punkty z obszaru

```

```

while D ≠ ∅

```

9	2	3
8	1	4
7	6	5

29

Interpretacja

(warunek A)

...
(N8(p,2)*N8(p,4)*N8(p,6)=0 and



N8(p,4)*N8(p,6)*N8(p,8)=0)



Przynajmniej jeden z N₈-sąsiadów 2,4,6 nie należy do R (tj. nie należał do obszaru lub został usunięty w jednej z poprzednich iteracji)

i przynajmniej jeden z N₈-sąsiadów 4,6,8 nie należy do R.

9	2	3
8	1	4
7	6	5

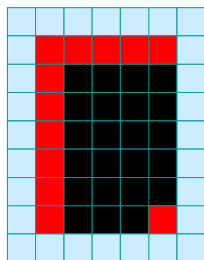
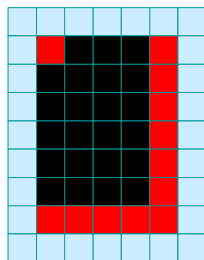
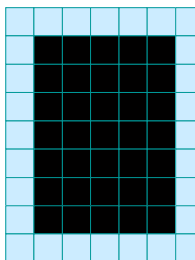
30

Przykład

Obszar

Warunek A

Warunek B



31



Szkielet - algorytm dedykowany

Możliwość usprawnienia:

- szybkie ustalanie zbioru punktów konturu, które można usunąć w kolejnej iteracji, zamiast przeglądania wszystkich punktów w R, który może być duży.

Obserwacja:

- punkty rozważane w bieżącej iteracji muszą leżeć w sumie sąsiedztw N8 punktów rozważanych w poprzedniej iteracji.

32



Szkielet - algorytm morfologiczny

Polega na iteracyjnym usuwaniu punktów konturowych, które nie są jednocześnie punktami szkieletowymi. Iteracje powtarza się do momentu, gdy kolejny krok nie wprowadza zmian (wszystkie punkty są jednocześnie konturowe i szkieletowe).

33



Opis krawędzi

Opis krawędzi

Cel: uproszczenie złożoności krawędzi.

Często sprowadza się do pewnej segmentacji krawędzi, polegającej na:

- podziale krawędzi na fragmenty,
- zastąpieniu krawędzi łamaną, krzywą, etc.

35



Przetwarzanie wstępne

Zazwyczaj dążymy do otrzymania uproszczonego opisu krawędzi.

Należy zastosować wstępne wygładzanie krawędzi, aby zapobiec powstaniu wielu drobnych segmentów wynikających z dyskretnej natury obrazu i niedoskonałości procesu jego akwizycji.

- Na przykład: poprzez wędrówkę po brzegu i zastępowanie współrzędnych punktu wypadkową (np. średnią) współrzędnych m sąsiadów.

36



Shape number

(shape#, liczba/numer kształtu)

- Kod łańcuchowy -> względny kod łańcuchowy (różnicowy) -> "normalizacja" poprzez takie obrócenie, aby kod potraktowany jako liczba miał jak najmniejszą wartość.
- Czyli: pierwsza różnica (pochodna) o najmniejszej magnitudzie.
- Rząd liczby kształtu: liczba cyfr (długość kodu)

Problem: niezmienniczość R; zapewnienie:

- wyznaczyć major i minor axis
- obrócić (nowy układ współrzędnych)

37



Przykłady



Kod łańc.:	0321	003221
Diff:	3333	303303
Shape#:	3333	033033

38



Przybliżenia wielokątami

ang. *polygonal approximation*

Cel: wyznaczenie „zgrubnego” kształtu obiektu.

Algorytmy:

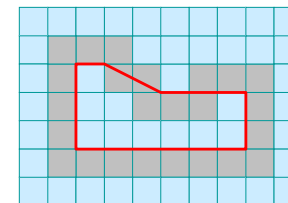
- „gumka-recepturka”,
- procedury łączenia,
- procedury podziału.

39



Algorytm „gumka-recepturka”

Wyobraź sobie, że zbiór punktów brzegu figury to „kanał” wryty w bloku jakiegoś materiału. Weź gumkę recepturkę i włoż ją do tego kanału; otrzymasz (pewne) przybliżenie kształtu wielokątem.



40



Algorytm „gumka-recepturka”

Własności:

- błąd rozumiany jako różnica pomiędzy długością gumki a rzeczywistym obwodem figury dla każdego punktu wynosi nie więcej niż $\sqrt{2} \cdot d$, gdzie d -skok kraty.
- czułe na szumy/zakłócenia,
- współrzędne punktów opisujących łamaną nie odpowiadają węzłom kraty (rozumianym jako środki punktów).

41



Procedura łączenia

ang. *merging*

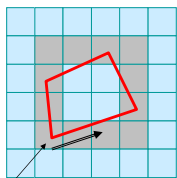
1. Idź wzdłuż krawędzi tak długo, aż błąd średniokwadratowy przybliżenia punktów prostą¹ nie przekroczy pewnego progu.
2. Dodaj otrzymaną prostą do łamanej.
3. Jeżeli nie został osiągnięty punkt wyjścia, idź do 1.
4. Przeanalizuj pary kolejnych prostych, znajdując ich punkty przecięcia. Otrzymane w ten sposób odcinki stanowią wielokąt przybliżający.

¹ np. regresja liniowa

42



Procedura łączenia - przykład



Start

Problem: „bezwładność”

43



Procedura podziału

```
p - lista punktów tworzących wielokąt
p=()
znajdź „ekstremalny” punkt brzegu1 i wstaw go do p
do
    przejdź wszystkie odcinki łamanej i znajdź punkt
    brzegowy figury q najbardziej odległy od
    odpowiadającego mu odcinka (p[i],p[i+1])

    wstaw punkt q na listę p pomiędzy punkty p[i] i p[i+1]

while warunki stopu2
```

44



Procedura podziału

¹Znajdowanie punktu początkowego:

- np. jeden z punktów przecięcia osi głównej z brzegiem.

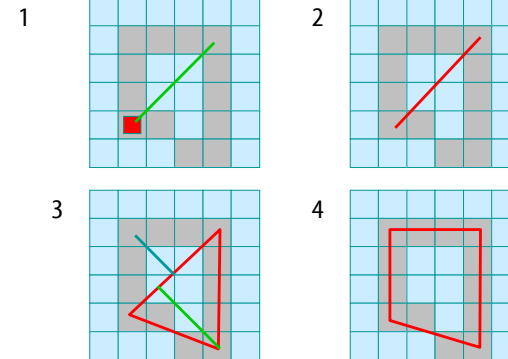
²Warunki stopu:

- przypadek trywialny: wszystkie punkty brzegu leżą już na otrzymanych odcinkach,
- odległość najbardziej odległego punktu q od odpowiadającego mu odcinka jest mniejsza niż zadany próg,
- liczba wierzchołków łamanej osiągnęła zadaną wartość maksymalną.

45



Procedura podziału - przykład



46



Procedura podziału

Zalety:

- lepszy od algorytmu łączenia.

Wady:

- nieco większa złożoność (łączenie wymagało tylko jednokrotnego przeglądania brzegu).

Możliwości usprawnienia:

- znalezienie maksymalnie odległego punktu dla danego odcinka nie zmienia maksymalnie odległych punktów w innych odcinkach.

47



Powłoka wypukła

Powłoka wypukła (*convex hull*) H zbioru punktów S : najmniejszy wypukły zbiór punktów zawierający w sobie S .

$H-S$: niedobór wypukłości (*convex deficiency*).

Możliwość wykorzystania do segmentacji krawędzi:

- Punkty segmentacji krawędzi: tam, gdzie granica S z otoczeniem przestaje/zaczyna się pokrywać z granicą H z otoczeniem.

48



Powłoka wypukła – pozyskiwane cechy

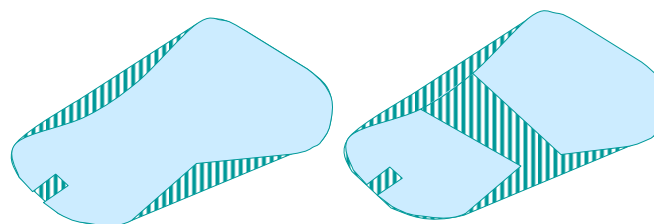
- Pola powierzchni
 - H
 - H-S (niedobór wypukłości)
- liczba spójnych obszarów w H-S
- względne rozmieszczenie spójnych obszarów w H-S

49



Niedobór wypukłości

Zaleta: niezmienniczość TSR



Różne figury mogą dać tę samą powłokę wypukłą.

50



Opis krawędzi w dziedzinie częstotliwości

Idea: traktowanie listy (ciągu) punktów brzegu jako sygnału zespolonego.

$$((x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{N-1}, y_{N-1}))$$

Inaczej:

$$x(k) = x_k, \quad y(k) = y_k$$

Niech:

$$s(k) = x(k) + jy(k)$$

ang. *Fourier Descriptors (FD)*

51



Opis krawędzi w dziedzinie częstotliwości

Dyskretna transformata Fouriera (widmo)

$$a(u) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp\left(-\frac{j2\pi uk}{N}\right) \quad u = 0, \dots, N-1$$

Odwrotna dyskretna transformata Fouriera

$$s(k) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u) \exp\left(\frac{j2\pi uk}{N}\right) \quad k = 0, \dots, N-1$$

Realizacja:

- szybka transformata Fouriera (FFT, DFFT, DFFT⁻¹)

52



Opis krawędzi w dziedzinie częstotliwości

Interpretacja współczynników $a(u)$:

- zespolone !,
- odzwierciedlają m.in. nasilenie występowania poszczególnych częstotliwości w konturze.

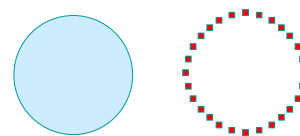
Możliwe zastosowania:

- wykorzystanie (wybranych) współczynników $a(u)$ jako cechy charakteryzującej kontur obiektu,
- przetwarzanie konturu (DFFT + DFFT⁻¹).

53

Przykład 1: widmo konturu jako cecha

Obraz (kontur)



FD:



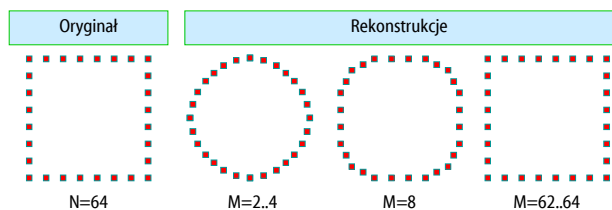
54

Przykład 2: przetwarzanie widma konturu

Idea: rekonstrukcja konturu na podstawie mniejszej liczby współczynników M (zazwyczaj $M=2^c$, dla wygody DFFT).

Im większe M , tym większa precyzja rekonstrukcji.

Przykład:



55

Transformacje FD

FD nie są niezmiennicze ze względu na TSR, ale przekształcenia te prowadzą do stosunkowo prostych zmian FD

Transformacja	Kontur	FD
Identyczność		
Obrót o Θ		$s(k)$ $a(u)$
Przesunięcie o Δ_{xy}		$s(k)e^{j\Theta}$ $a(u)e^{j\Theta}$
Skalowanie		$s(k) + \Delta_{xy}$ $a(u) + \Delta_{xy}\delta(u)$
Zmiana punktu początkowego		$\alpha s(k)$ $\alpha a(u)$
	$s(k - k_0)$	$a(u)e^{-\frac{j2\pi k_0 u}{N}}$

56

Proste cechy geometryczne

Obwód

$$L = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

gdzie:

- t – zmienna "krocząca" (run length);
- dt – odległość kolejnych elementów,
Na kracie kwadratowej, w zależności od wzajemnej orientacji sąsiadów:

$$dt = 1 \text{ lub } dt = \sqrt{2}$$

58

Pole powierzchni

Definicja:

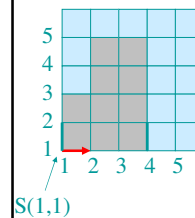
$$A = \iint_S dx dy$$

Obliczanie na podstawie brzegu:

$$A = \frac{1}{2} \left(\int_t y(t) \frac{dx(t)}{dt} dt - \int_t x(t) \frac{dy(t)}{dt} dt \right)$$

(+ wartość bezwzględna)

Przykład



t	x	y	dx	dy	$ydx - xdy$
1(S)	1	1			
2	2	1	1	0	1
3	3	1	1	0	1
4	4	1	1	0	1
5	4	2	0	1	-4
6	4	3	0	1	-4
7	4	4	0	1	-4
8	4	5	0	1	-4
9	3	5	-1	0	-5
10	2	5	-1	0	-5
11	2	4	0	-1	2
12	2	3	0	-1	2
13	1	3	-1	0	-3
14	1	2	0	-1	1
15(S)	1	1	0	-1	1
					-20

obliczenie długości
„słupka”
wyróżnionego
na rysunku

59

60

Krzywizna

$$|\kappa(t)|^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2$$

Narożniki to lokalne maksima krzywizn

Bending energy (energia krzywizny ?)

$$\frac{1}{L} \int_1^L |\kappa(t)|^2 dt$$

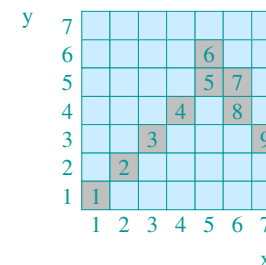
61

Przykład

t	x	y	dx	dy	d ² x	d ² y	κ(t) ²
1							
2	1	1	1	1	0	0	0
3	2	2	1	1	0	0	0
4	3	3	1	1	0	0	0
5	4	4	1	1	0	0	0
6	5	5	0	-1	-1	-2	5
7	5	6	-1	1	0	1	1
8	6	5	0	-1	-1	0	1
9	7	3	1	-1			

t – kolejność odwiedzania punktów

W jakiej sytuacji (dyskretnej)
krzywizna jest maksymalna?



62

Zastosowania

- poszukiwanie narożników,
- testowanie symetrii obiektu,
- na konturze, ale nie tylko, np.
 - przybliżeniu wielokątami,
 - przybliżeniu funkcjami sklejanymi.

63

Momenty (geometryczne)

Momenty

- Moment jednowymiarowy rzędu p (zał.: f ciągła)

$$m_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) dx$$

- Moment dwuwymiarowy rzędu p+q

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy$$

- Dyskretny moment dwuwymiarowy rzędu p+q

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x, y)$$

65



Twierdzenie o unikalności

(Uniqueness theorem, Papoulis 1965)

Dla funkcji $f(x, y)$ ciągłej i przyjmującej wartości niezerowe tylko w skończonej części płaszczyzny XY,

- istnieją wszystkie momenty (dla dowolnych $p, q \geq 0$),
- szereg momentów m_{pq} jest jednoznacznie determinowany przez $f(x, y)$,
- i vice versa: $f(x, y)$ jest jednoznacznie zdeterminowana przez szereg momentów m_{pq} .

66



Uwagi

- nie zakłada się żadnych szczególnych własności funkcji f (w szczególności to nie musi być funkcja o wartościach nieujemnych),

67



Momenty centralne

- Centralny moment dwuwymiarowy rzędu p+q

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) dx dy$$

- gdzie współrzędne środka ciężkości:

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

- Interpretacja m_{00} ?

68



Zależności pomiędzy momentami

Momenty centralne można dogodnie wyznaczyć na podstawie momentów zwykłych:

$$\begin{aligned}\mu_{10} &= m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}} m_{00} = 0 \\ \mu_{11} &= m_{11} - \frac{m_{10} m_{01}}{m_{00}} \\ \mu_{20} &= m_{20} - \frac{m_{10}^2}{m_{00}} \quad \mu_{02} = m_{02} - \frac{m_{01}^2}{m_{00}} \\ \mu_{12} &= m_{12} - 2 \bar{x} m_{11} - \bar{y} m_{02} + 2 \bar{y}^2 m_{10} \\ \mu_{30} &= m_{30} - 3 \bar{x} m_{20} + 2 \bar{x}^2 m_{10}\end{aligned}$$

69

Momenty centralne znormalizowane

– Centralny znormalizowany moment dwuwymiarowy rzędu $p+q$

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{(m_{00})^{\frac{p+q}{2}+1}}$$

dla $p+q = 2, 3, \dots$

70

Niezmienniki momentowe

Znormalizowane momenty centralne nie zapewniają niezmienniczości ze względu na obrót.

Dlatego wprowadzono niezmienniki momentowe, które mają tę własność:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \eta_{20} + \eta_{02} \\ \phi_2 &= (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2 \\ \phi_3 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2 \\ \phi_4 &= (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2 \\ \phi_5 &= \dots \\ \phi_6 &= \dots \\ \phi_7 &= \dots\end{aligned}$$

71

Momenty – demonstracja (MS Excel)

		p	q	p	q	p	q
		0	2	1	0	0	1
				1.2			3.1
x	y	106	126	9	9	28	
12	2	1	4	4	12	1	1
13	2	1	4	4	13	1	1
14	2	1	4	4	14	1	1
15	2	1	4	4	15	1	1
16	2	1	4	4	16	1	1
14	3	1	9	9	14	1	1
14	4	1	#	16	14	1	1
14	5	1	#	25	14	1	1
14	6	1	#	36	14	1	1

Centralny
Centralny znormalizowany

3 2
3 3

72

Zastosowania

Opis wielkościami skalarnymi dowolnych wielkości

- wektorowych,
- macierzowych,
- etc.

Powiązania z wielkościami statystycznymi:

- mediana,
- wariancja,
- kurtoza,
- kowariancja

73



Współczynniki kształtu

Współczynniki kształtu

Wyspecjalizowane dla odzwierciedlania wybranej cechy obiektu.

Oznaczenia stosowane na kolejnych slajdach:

- L obwód,
- S pole powierzchni,
- n liczba punktów konturu,
- r_{min} minimalna odległość konturu od jego środka ciężkości
- R_{max} maksymalna odległość konturu od jego środka ciężkości
- L_{max} maksymalny gabaryt obiektu (major axis)
 - minor axis: prostopadła do major axis i taka, że otrzymany prostokąt obejmuje kształt

75



Współczynniki kształtu

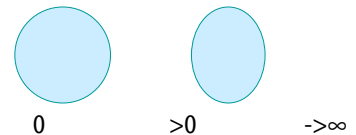
- Malinowskiej

$$\frac{L}{2\sqrt{\pi S}} - 1$$

Mierzy stopień „okrągłości” obiektu.

Własności:

- Nie zależy od wielkości obiektu.
- Nieunormowany



76



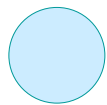
Współczynniki kształtu

- Blaira-Blissa

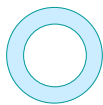
Mierzy stopień „wydrążenia” obiektu

Własności:

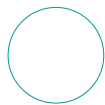
- Nie zależy od wielkości obiektu.
- Unormowany



0^+



$\in [0,1]$ 1



$$\frac{S}{\sqrt{2\pi \iint_S r^2 ds}}$$

77



Współczynniki kształtu

- Danielsona

$$\frac{S^3}{\left(\iint_S ds\right)^2}$$

- Haralicka:

$$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n \sum d^2 - 1}}$$

- Lp1:

$$\frac{r_{\min}}{R_{\max}}$$

- Lp2:

$$\frac{L_{\max}}{L}$$

78



Współczynniki kształtu

Uwagi:

- podobnie jak inne cechy, współczynniki kształtu mogą dać takie same wartości dla różnych figur.
- Uwaga: podatne na błędy dyskretyzacji przestrzennej, zwłaszcza dla małych figur (-> vide Tadeusiewicz).

79



Wymiar fraktalny

Definicje fraktala

Definicja intuicyjna:

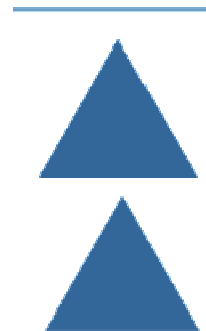
Figura geometryczna lub obiekt naturalny o następujących właściwościach:

- *samopodobieństwo*: jej części mają taki sam kształt jak całość:
 - z dokładnością do pewnych transformacji (afinicznych),
 - w *nietrywialny* sposób (trywialnie: np. prosta),
- inaczej: zachowuje kształt niezależnie od skali, z jaką się jej przyglądamy.

81



Przykłady

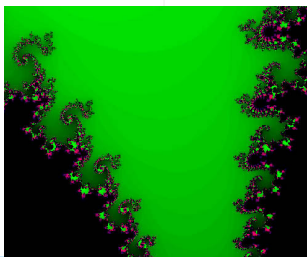
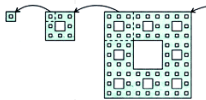


(za: M. A. Sierra)

82



Przykłady



83



Definicje fraktala

- Definicja oparta o *rozbieżność (niezbieżność) miary*:
Dowolny kształt taki, iż przy pomiarze takich jego właściwości jak długość, pole powierzchni, objętość z użyciem dyskretnych i skończonych jednostek mierzona wielkość (liczba jednostek) dąży do nieskończoności gdy wielkość jednostki zmierza do zera.
- *Definicję Hausdorffa (formalna)*:
Dowolna figura geometryczna z niewymiernym wymiarem Hausdorffa

(za: Robert P. Munafo)

84



Przykład

Jak długa jest linia brzegowa Wielkiej Brytanii?

- mierzona „linijką” o długości jednego kilometra: 5000 km,
- mierzona „linijką” o długości jednego metra: 12000 km,

Nie ma jednej odpowiedzi.

Popularyzacja: B. Mandelbrot 1975

85

Wymiar Hausdorffa

Zdefiniujmy dla figury F w D -wymiarowej przestrzeni Euklidesowej S_D miarę M_e w następujący sposób:

$$M_e = e^D N_e$$

gdzie:

- e – dowolnie mała wielkość,
- N_e – minimalna liczba punktów w przestrzeni S_D takich że każdy punkt F leży wewnątrz sąsiedztwa o promieniu e przynajmniej jednego takiego punktu.

Wówczas wymiar Hausdorffa figury F to

$$= \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\ln(N_e)}{\ln(e)}$$

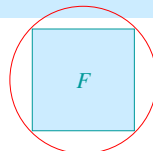
- Właściwość: wymiar Hausdorffa jest zawsze większy lub równy od wymiaru topologicznego.

(za: R. Munafo)

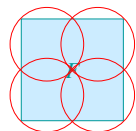
86

Wymiar Hausdorffa

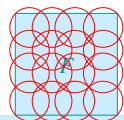
$e=1, N_e=1, \log_2$
($D=2$)



$e=1/2, N_e=4$ ($2/-1$)



$e=1/4, N_e=16$ ($4/-2$)



...

87

Wymiar fraktalny

W praktyce: przybliżanie wymiaru Hausdorffa.

Metody wyznaczania:

- „powierzchniowa” (*box-counting*),
- „krawędziowa”/„linijkowa” (*rulers*),

Idea:

- wielokrotny pomiar pewnej cechy obiektu (obwodu, pola powierzchni), za każdym razem wzorcem („linijką”) o innej wielkości (długości),
- wykorzystując charakterystykę zmian pewnych wartości opisujących obiekty w funkcji „powiększenia”,
- wybór metody zależy głównie od reprezentacji figury.

88

Metoda „powierzchniowa”

ang. *box-counting*: Pomiar pola powierzchni „elementem” o zmieniających się rozmiarach.

Obliczamy przy różnych „skalach”:

- wielkość (pole powierzchni) jednostki pomiarowej - np. kwadratu - G ,
- liczbę jednostek pomiarowych, które mają niepustą część wspólną z figurą - C ,

89



Metoda „powierzchniowa”

Odstępstwa od definicji rozmiaru Hausdorffa:

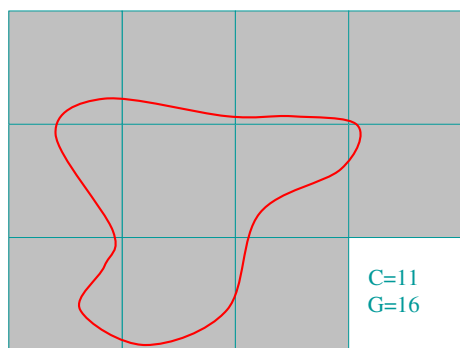
- skończona liczba „eksperymentów” pomiarowych,
- nie wyznaczamy minimalnej liczby jednostek/punktów (zazwyczaj stosujemy się do kraty wyznaczonej dyskretnymi współrzędnymi punktów)
- nie używamy otoczenia epsilonowego, lecz konkretnej figury (tu: kwadratu) jako jednostki pomiarowej,
- operujemy polem powierzchni jednostki pomiarowej (G) w miejsce promienia ϵ ,

=> otrzymujemy wartość przybliżoną

90



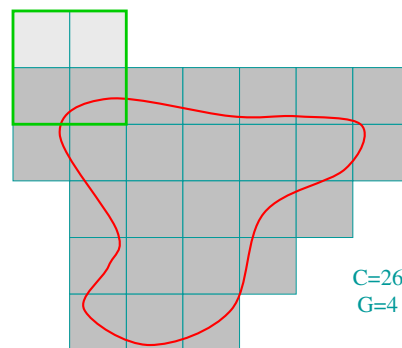
Metoda „powierzchniowa” - przykład



91



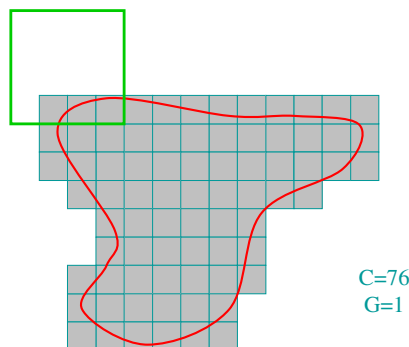
Metoda „powierzchniowa” - przykład



92



Metoda „powierzchniowa” - przykład



C=76
G=1

93

Metoda „powierzchniowa” - przykład

G C
1 76
4 26
16 11

1	0.01	76	-4.60517	4.330733	-0.94041
4	0.04	26	-3.21888	3.258097	-1.01218
16	0.16	11	-1.83258	2.397895	-1.30848

Np. przybliżone obliczenie tylko dla dwóch rozmiarów jednostek (1 i 4):

$$D = -\frac{\log \frac{C_2}{C_1}}{\log \frac{G_2}{G_1}} = -\frac{\log \frac{26}{76}}{\log \frac{4}{1}} = -\frac{\log 2.92}{\log 4} = -\frac{0.466}{-0.301} \approx 1.548$$

(uwaga na pierwiastek w mianowniku)

94

Metoda „linijkowa”

ang. *rulers*: Pomiar długości „linijką” o zmieniających się rozmiarach.

Obliczamy przy różnych „skalach”:

- wielkość jednostki pomiarowej - długość linijki (kroku),
- liczbę jednostek pomiarowych - długość obiektu zmierzoną linijką (poprzez jej odkładanie),

Zastosowanie: gdy badany obiekt jest dany w postaci ciągu punktów brzegowych.

95

Metoda „linijkowa”

Wejście: krawędź (łamana, lista punktów) $p=(c_1, \dots, c_n)$
 $d(c_1, c_2)$ - odległość Euklidesowa punktów c_1 i c_2

```
// funkcja pomocnicza LengthRuler: oblicza długość łamanej p
// linijką o długości l
Function LengthRuler(p,l)
  len=0, j=1
  do
    d=0, i=j
    while ll<l do
      ll=d(p[i],p[j])
      j=(j+1)mod |p| // gwarantuje zamknięcie figury
    endwhile // ale wprowadza też niedokładność
    len+=ll
    while j>i
      return len
    endwhile
  endFunction
```

96

Metoda „linijkowa”

```
Function FractalDimension(p)
// p - krzywa (łamana), której wymiar fraktalny chcemy policzyć
// l - tablica długości linijek
// t - tablica estymat długości otrzymanych przy poszczególnych
//     długościach linijki
//  $\alpha$  - współczynnik zmniejszenia długości linijki,  $0 < \alpha < 1$ 

i=1
l[i]=|p| // wyznacz początkową długość linijki
// (można rozważać różne sposoby)
while l[i]>=1 do // wymaganie dot. minimalnej długości linijki
    t[i]=LengthRuler(p,l[i]) // zmierz długość bieżącej linijki
    l[i+1]= $\alpha$ *l[i] // zmniejsz długość linijki
    i++
endWhile
(a,b) = LogLogRegression(t,l) // (a,b) - parametry równania
return 1-a // prostej regresji (a-nachylenie)
endFunction
```

97

Metoda „linijkowa”

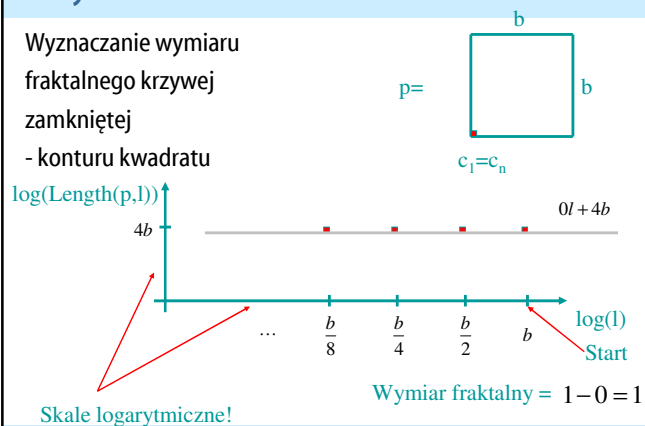
Sposoby inicjalizacji długości linijki:

- liczba punktów krzywej ($|p|$),
- dla krzywych otwartych: odległość pomiędzy punktem początkowym a końcowym krzywej,
- maksymalny gabaryt obiektu.

98

Przykład 1

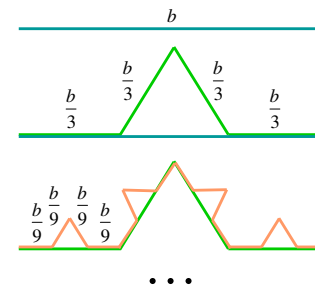
Wyznaczanie wymiaru
fraktalnego krzywej
zamkniętej
- konturu kwadratu



99

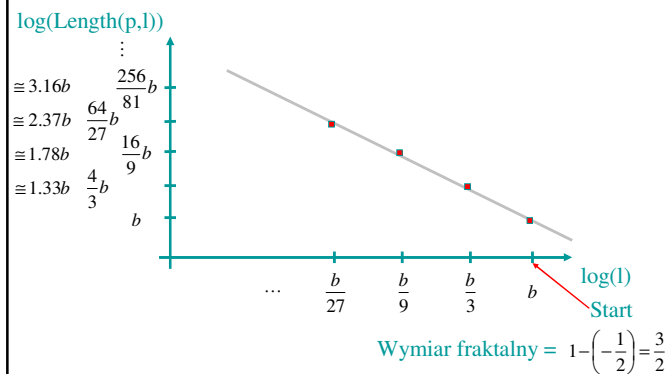
Przykład 2

Wyznaczanie wymiaru fraktalnego fraktala
- płotka śniegu Kocha



100

Przykład 2



101

Wymiar fraktalny - uwagi

- Trochę wyidealizowane, bo dobraliśmy tak ładnie długości linijki znając figurę.
- Na siatce dyskretnej oczywiście fraktale „idealne” nie istnieją.
- Dodatkowo można mierzyć błąd średniokwadratowy regresji, który daje informacje o „fraktalności krzywej”; gdy bardzo duży, krzywa prawdopodobnie nie jest fraktalem (nie jest samopodobna).
 - Można zatem mówić o figurach które są mniej lub bardziej fraktalne.

102

Wybrane zastosowania

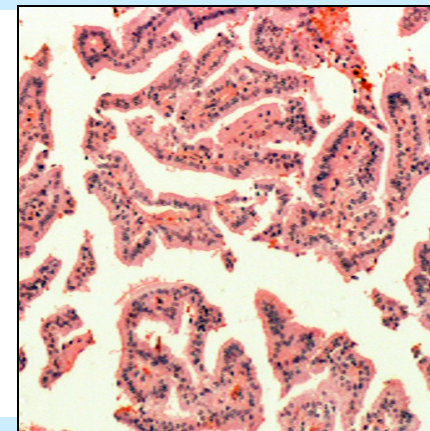
Głównie: opis struktur naturalnych.

- analiza/rozpoznawanie skupisk drzew/zieleni,
- opis zjawisk atmosferycznych,
- analiza zmienności gatunkowej roślin,
- struktury tkankowe, np.
 - analiza obrazów mikroskopowych nowotworów tkanki nabłonkowej,
 - analiza izokwant gęstości jąder komórkowych w preparatach histopatologicznych,

103

Analiza izokwant gęstości jąder kom.

Obraz oryginalny

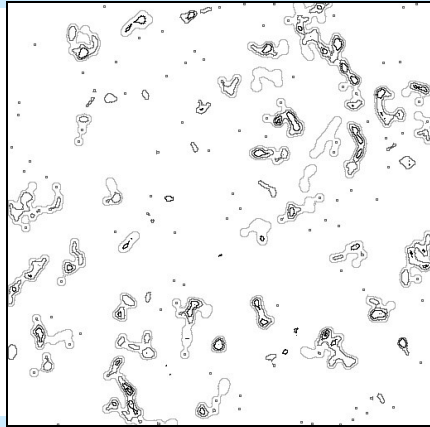


104

Analiza izokwant gęstości jąder kom.

Izokwanty
(poziomice)
gęstości
jąder
komórkowych

(obliczanie
wymiaru
fraktalnego
poszczególnych
„poziomic”)



105



Inne metody opisu kształtu

Rzuty

- Powstają przez prostą agregację wartości funkcji charakterystycznej obrazu (np. jasności)
 - zazwyczaj wzdłuż kierunku wyznaczonego jedną z osi układu współrzędnych obrazu,
- Prosta interpretacja fizyczna: cień.
- Mimo prostoty rzuty mogą być bardzo dobrym deskryptorem (cechą), tj. zapewniać dobrą zdolność dyskryminacyjną.
 - np. w rozpoznawaniu znaków pisanych maszynowo (OCR),
 - a zwłaszcza wtedy, gdy mamy wpływ na formę rozpoznawanych obiektów -> vide [MICR](#)

107



Krzywe sklejane

Umożliwiają generowanie przybliżonego (domniemanego) kształtu obiektu na podstawie:

- położenia punktów węzłowych,
- warunków dot. „gładkości” krzywej (zgodność pochodnych cząstkowych w punktach węzłowych),

Zastosowania:

- rekonstrukcja kształtu obiektu,
- opis kształtu: współczynniki wielomianów są pewną cechą.

108



Analiza tekstury

Rozpoznawanie Obrazów

Tekstura

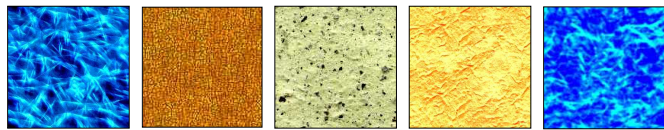
Tekstura/faktura:

- brak formalnej definicji,
- może być utożsamiana z cyklicznym (w sensie przestrzennym) powtarzaniem podobnych elementów zwanych teksemami (ang. *texems*),
- inna próba definicji:
kombinacja stosunkowo dużej liczby obiektów, gdzie charakterystyki poszczególnych obiektów nie są istotne, natomiast istotne są strukturalne właściwości zbioru obiektów (Santini, s. 185)

110



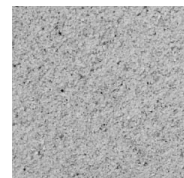
Przykłady – tekstury sztuczne



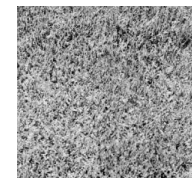
111



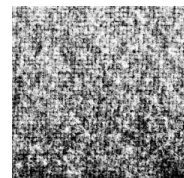
Przykłady – tekstury naturalne



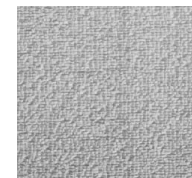
Piasek



Trawa



Wełna

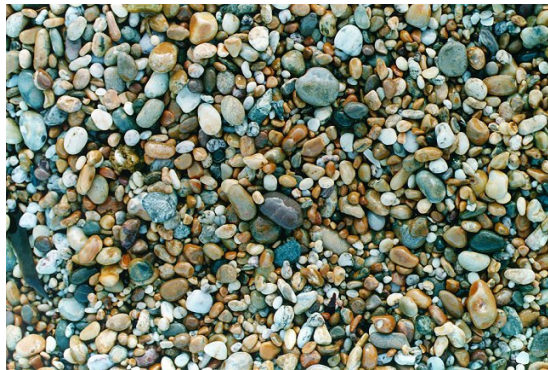


Raffia

112



Przykłady – tekstury naturalne

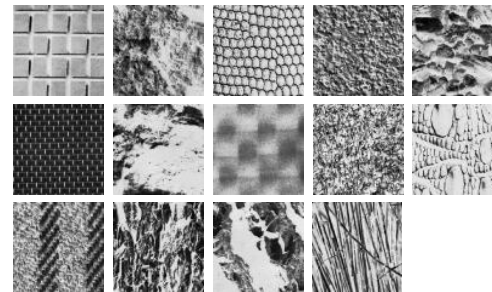


113



Brodatz Textures

Np. <http://www.ux.his.no/~tranden/brodatz.html>



114



Tekstura

– w aspekcie percepcji: może być powiązana z pewnymi cechami fizycznymi:

- gładkość - szorstkość,
- regularność,
- kierunkowość,
- ...

115



Problem obecności tekstury

Pytanie: jak stwierdzić czy w danym punkcie obrazu (i jego otoczeniu) mamy do czynienia z teksturą, a nie na przykład z:

- jednolitym obszarem,
- lokalną fluktuacją intensywności, np. krawędzią

Definiuje się biegunowość (*polarity*) $p_\sigma \in <0,1>$: wielkość opartą na gradientach która mówi w jakim stopniu wszystkie gradienty (wektory zmian natężenia jasności) w otoczeniu punktu są tak samo skierowane. W konsekwencji p_σ :

- dla krawędzi jest bliskie 1 dla dowolnej skali σ ,
- dla obszaru jednolitego zmienia się losowo wraz ze zmianą skali σ ,
- dla tekstury zmniejsza się wraz ze wzrostem skali σ (otoczenie obejmuje coraz więcej punktów z różnymi orientacjami gradientów)

(Santini s. 187)

116



Problem skali

Obecność tekstury objawia się tylko przy pewnej skali.

- większa skala („zbliżenie”) daje wgląd w szczegóły, ale prowadzi do utraty powtarzalnego charakteru,
- mniejsza skala („oddalenie”) daje w efekcie obszar jednolity.

Większość metod operuje na pewnym zakresie skal.

117



Analiza tekstury – metody

- metody strukturalne, w tym syntaktyczne,
- metody statystyczne:
 - autokorelacja,
 - analiza histogramów,
 - macierz współwystąpień
- inne:
 - metody widmowe,
 - bank filtrów (*filter bank*),
 - gęstość krawędzi (*edge density*),

118



Strukturalna analiza tekstur

Idea:

- próba rekonstrukcji tekstury poprzez jej generowanie przy użyciu pewnego
 - algorytmu, lub
 - gramatyki.
- teksemy odpowiadają symbolom terminalnym gramatyki.
- zalety:
 - silny i elegancki formalizm,
- wady:
 - problemy z opisem tekstur rzeczywistych (brak ścisłej powtarzalności)

119



Gęstość krawędzi

„Krawędzistość” - *Edge density*, “*edgeness*”

- idea: ekstrakcja krawędzi + pomiar gęstości punktów krawędzi na jednostkę powierzchni.
- zaleta:
 - prosta implementacja,
 - dobrze nadaje się do tekstur losowych,
- wada: mierzy właściwie tylko “energię” tekstury, ignorując relację sąsiedztwa i orientację.
- Przykład: [Rosenfeld&Troy, za Pratt]. Mając (nawet binarny) detektor krawędzi E (W -szerokość okna) teksturę można charakteryzować przez następującą cechę T :

$$T(x, y) = \frac{1}{W^2} \sum_{i=-W}^W \sum_{j=-W}^W E(x+i, y+j), \quad W = 2w+1$$

- Inne podejście: podstawić gradient pod E

120



Bank filtrów

Bardziej wyrafinowane: *filter bank*

- w miejsce pojedynczego filtru – stosowanie wielu masek „wychwytyjących” różne aspekty charakterystyki teksturalnej.

121



Metody widmowe

Opis tekstury w dziedzinie częstotliwości

- Na przykład: obliczenie 2D transformaty Fouriera dla lokalnych fragmentów obrazu.
- „Gruboziarniste” tekstury powinny dawać koncentrację energii widma w niskich częstotliwościach.
- W praktyce jednak często tekstury o znacząco różnej charakterystyce mają bardzo podobne widma
- Przykład [Pratt]: bardzo zbliżone charakterystyki częstotliwościowe obszarów wiejskich i miejskich w zdjęciach lotniczych.

122



Opis tekstury - Metody statystyczne

Przesłanka: percepcja wzrokowa człowieka:

- badania psychofizjologiczne wykazały, iż w percepcji (i rozróżnianiu) tekstur decydujący jest [dwuwymiarowy] rozkład prawdopodobieństwa;
- trudno podać przykłady tekstur, które miałyby bardzo zbliżone rozkłady [dwuwymiarowe], a byłyby rozróżniane przez człowieka.

123



Autokorelacja

$$C_{ff}(p, q) = \frac{MN}{(M-p)(N-q)} \frac{\sum_{i=1}^{M-p} \sum_{j=1}^{N-q} f(i, j) f(i+p, j+q)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f^2(i, j)}$$

gdzie:

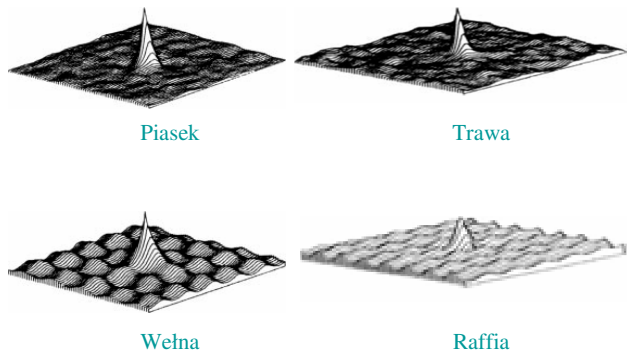
- M, N – wielkość okna (szerokość, wysokość),
- p, q – rozważany „okres” powtarzalności tekstury w poszczególnych wymiarach
- Czyli: $C_{ff}(p, q)$ podaje intensywność występowania w obrazie (obszarze) tekstury o okresie $\sqrt{p^2 + q^2}$ i orientacji wyznaczonej przez p i q
- Zależna od orientacji tekstury

124



Przykład: wartości autokorelacji

Osie: p i q



125

Autokorelacja

Autokorelacja w wersji zależnej od odległości

$$C_{ff}(r)$$

- Rozważa się jedynie pary punktów leżące w odległości $r = \sqrt{p^2 + q^2}$
- Czyli: uśrednienie „zwykłej” autokorelacji po kącie
- Niezależna od orientacji tekstury

126

Opis tekstury przez histogram

Histogram: $a_i = |\{p : f(p) = i\}|$

Idea: ekstrakcja prostych miar statystyki opisowej z histogramów, np:

- średniej,
- odchylenia standardowego σ ,
- momentów, etc.
- ewentualnie konstrukcja cech na podstawie tych miar, np.

$$1 - \frac{1}{1 + \sigma^2}$$

- będzie przyjmować wartość 0 dla obszarów o stałej jasności, a dla obszarów o dużej zmienności jasności będzie zmierzać do 1.

Wada: nieuwzględnianie informacji przestrzennej.

127

Macierz współwystąpień

- Zwana także *macierzą zdarzeń*
- Niech P będzie operatorem pozycji (relacją, w jakiej mogą znaleźć się dwa punkty obrazu).
- Zdefiniujmy macierz A jako macierz o rozmiarach $k \times k$ (k -liczba poziomów jasności), której wartości elementów dla obrazu f zdefiniowane są następująco:

$$a_{ij} = |\{p : f(p) = i \wedge P(p, r) \wedge f(r) = j\}|$$

gdzie

- p i r to punkty obrazu.
- zapis $P(p, r)$ oznacza, że punkty p i r są w relacji przestrzennej P

128

Przykład

Definicja relacji P (sąsiad nr 7 w N_8):

Formalnie: $P(p, r) \Leftrightarrow x_r = x_p + 1 \wedge y_r = y_p + 1$

Obraz:

0	0	0	1	2
1	1	0	1	1
2	2	1	0	0
1	1	0	2	0
0	0	1	0	1

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

0	0
1	1

0	0	0	1	2
1	1	0	1	1

0	0	0	1	2
1	1	0	1	1

0	0	0	1	2
1	1	0	1	1

129

Macierz współwystąpień

Macierz współwystąpień C (ang. *cooccurrence matrix*) to macierz A znormalizowana wielkością obrazu (ściślej mówiąc, liczbą przemieszczeń maski p - r , w poprzednim przykładzie $(5-1)(5-1)=16$):

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{|D(f)|}$$

Jest to zatem estymata łącznego rozkładu prawdopodobieństwa napotkania w obrazie pary punktów o określonych jasnościach, pozostających w relacji P .

Dla wcześniejszego przykładu:

$$C = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.125 & 0.0625 \\ 0.125 & 0.1875 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0 \end{bmatrix}$$

130

Spostrzeżenia

- znając macierz współwystąpień, znamy histogram,
- uproszczenia:
 - dyskretyzacja poziomów jasności; zazwyczaj niezbędne dla:
 - zwięzłości (pamięć),
 - reprezentatywności.
- typy relacji P :
 - niezmiennicze ze względu na obrót (np. sąsiad w odległości r),
 - pozbawione tej własności (np. sąsiad nr 7 w N_8)

131

Cechy obrazu z macierzy współwystąpień

Często wykorzystywane cechy tekstury obliczane na podstawie macierzy współwystąpień:

- maksimum,
- moment różnicowy elementu (element difference moment) rzędu k (duży dla elementów macierzy skupiających się w pobliżu przekątnej)
- odwrotny moment różnicowy elementu (inverse element difference moment) rzędu k ,
- entropia (miara losowości tekstury),
- jednolitość,
- ...

$$\max_{i,j} (c_{ij})$$

$$\sum_i \sum_j (i-j)^k c_{ij}$$

$$\sum_i \sum_j \frac{c_{ij}}{(i-j)^k}, \quad i \neq j$$

$$-\sum_i \sum_j c_{ij} \log c_{ij}$$

$$\sum_i \sum_j c_{ij}^2$$

132

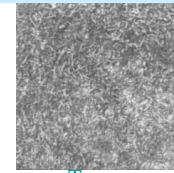
Macierz współwystąpień – rozszerzenia

- wykorzystanie reprezentacji wieloskalowej (*multiscale representation*),
 - przesłanka: przy badaniu punktów położonych blisko wymagana jest duża rozdzielczość przestrzenna, natomiast przy znacznej odległości możemy pozwolić sobie na degradację rozdzielczości,
 - np. logarytmiczna,
- bardziej wyrafinowane relacje P ,
 - uogólnienie ze względu na
 - odległość dzielącą badane punkty (r),
 - orientację prostej łączącej badane punkty (θ),
 - uszczegółowienia: relacje z większą liczbą argumentów,

133



Przykłady

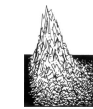


Trawa



Macierz

Bluszcz/wino



Macierz

134

Macierze współwystąpień dla $\theta=0$ i $r=4$



Analiza tekstur – inne podejścia

- cechy Julesz'a (ujęcie tekstury jako procesu Markowa)
- mikrostruktury [Laws]
- filtry Gabora: filtry w postaci dwuwymiarowej/zespolonej sinusoidy modulowanej dwuwymiarowym rozkładem Gaussa
- falki (wavelets)
- dekompozycja na wartości osobliwe (SVD)

135



Analiza tekstur – uogólnienia

- obrazy kolorowe i wielomodalne,
- obrazy 3D

136



Zastosowania

- opis (obszarów i obiektów),
- opis całego obrazu (lub znacznych jego części)
 - np. gdy rozdzielczość/jakość obrazu nie pozwala nam na bardziej wnikliwą analizę; *vide* obrazy mikroskopowe OUN,
- rozpoznawanie,
- segmentacja obrazu,

137



Tekstury a obrazy 3D

W analizie scen 3D tekstury ulegają podobnym zniekształceniom co same obiekty (projekcja, perspektywa, etc.).

- W pewnych zastosowaniach może to utrudniać analizę tekstury;
- jednak z drugiej strony zniekształcenia te niosą ze sobą dodatkowe informacje o scenie; stąd w widzeniu komputerowym (*computer vision*) obecne są nurty badań:
 - *shape from texture*,
 - *depth from texture*.

138



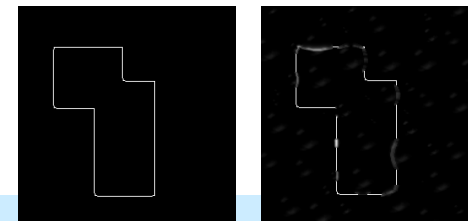
Transformacja Hough'a

Transformata Hough'a

Ang. *Hough Transform*

Metoda poszukiwania prostych w obrazie poprzez stopniowe kumulowanie wiarygodności.

- Wejście: Obraz ze wstępnie wykrytymi punktami konturów (np. przepuszczony przez filtr gradientowy).
- Wyjście: Równania 'dominujących' prostych (odcinków w obrazie)



140



Transformata Hough'a - Idea

Idea:

- równanie prostej:

$$y = ax + b$$

- proste przechodzące przez punkt (x,y) muszą spełniać równanie:

$$b = y - xa$$

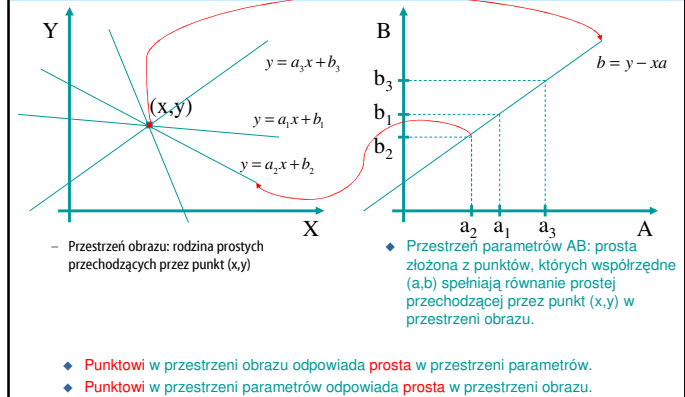
- zatem: obecność w obrazie zapalnego punktu o współrzędnych (x,y) zwiększa prawdopodobieństwo występowania w nim prostych o parametrach (a,b) spełniających równanie:

$$b = y - xa$$

141



Przestrzeń obrazu a przestrzeń param.



142



Realizacja praktyczna

Dyskretyzacja przestrzeni parametrów AB:

- Zbudujemy tablicę częstości występowania punktów spełniających poszczególne równania prostych.
- Dla każdego zapalnego punktu wygenerujemy pewną skończoną próbę tej rodziny prostych.

```
acc[-4..4,-10..10] // tablica akumulatorów
wyzej acc
for x=1 to xMax // pętle po punktach obrazu
  for y=1 to yMax
    if f(x,y)>0 then // jeżeli punkt zapalony
      for a=-4 to 4 do
        b=y-xa
        acc[a,b]++
      endFor
    endIf
  endFor
endFor
```

143



Wynik

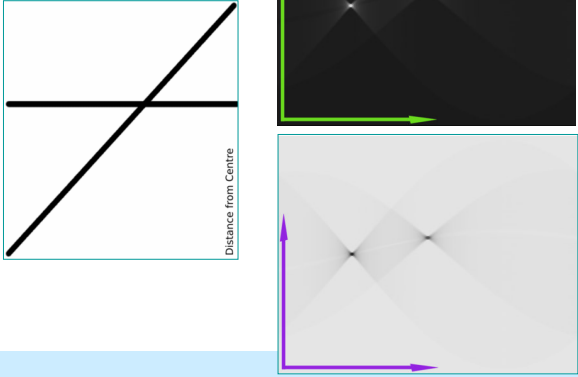
Tablica akumulatorów:

- akumulatory (liczniki) o dużych wartościach odpowiadają najbardziej 'wyraźnym' prostym w obrazie.

144



Przykład



145

Uwagi

W praktyce:

- konieczność kontroli otrzymywanych wartości b – ryzyko przekroczenia zakresu,
- stały krok a jest niedogodny – faworyzuje 'strome' proste
 - lepiej bazować na zmiennej niezależnej w postaci kąta ϕ zmieniającego się ze stałym krokiem $\Delta\phi$, np. 15° ; wówczas $a = \tan(\phi)$,
 - lub: przejść na biegunowy układ współrzędnych, w którym równanie prostej to

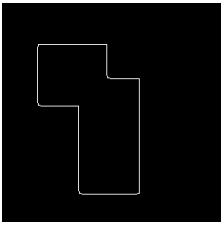
$$y = x \cos(\theta) + r \sin(\theta)$$
 gdzie: r – długość wektora normalnego, θ – kąt wektora normalnego względem dodatniego kierunku osi X
- możliwość zastąpienia prostej inkrementacji akumulatora
 - zwiększeniem o wartość zależną od jasności punktu, np.

$$acc[a, b] += f(x, y) / 255.0$$
 - częściową inkrementacją sąsiednich akumulatorów (kompensacja negatywnego wpływu dyskretyzacji).

146

Przykład

Obraz oryginalny

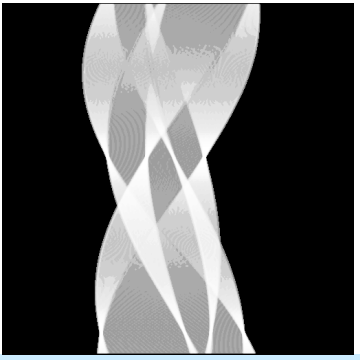


Transformata Hougha
(macierz akumulatorów)



147

Przykład



148

Uwagi

Zalety:

- rekonstrukcja prostych na podstawie odseparowanych punktów – odporność na szumy,

Wady:

- za sprawą zbiegu okoliczności mogą pojawić się proste 'iluzoryczne',
 - usprawnienie: druga faza głosowania w której każdy punkt bada głosy które oddał w tablicy akumulatorów i wybiera spośród nich tylko ten dla którego wartość akumulatora jest maksymalna
- dla pewnych zastosowań – lepiej byłoby mieć odcinek, a nie równanie prostej (istnieje odpowiednia odmiana TH, np. zaimplementowana w OpenCV)

149



Działanie TH na rzeczywistym obrazie



Historyczne pierwsze zastosowania: analiza torów cząstek w komorze pęcherzykowej.

150



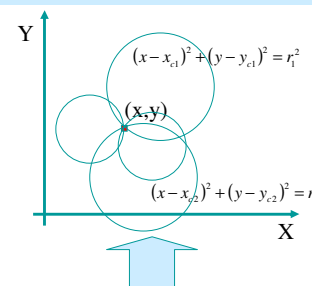
Uogólnienia

- TH umożliwia wykrywanie dowolnych krzywych danych w postaci analitycznej, chociaż:
 - im więcej parametrów, tym więcej wymiarów tablicy akumulatorów => złożoność pamięciowa i obliczeniowa,
 - dlatego w praktyce TH poszukuje się raczej nieskomplikowanych krzywych.
- uogólniona TH (ang. *Generalized HT*): wektory przemieszczeń pamiętane w tablicy

151



Transformata Hough'a dla okręgów



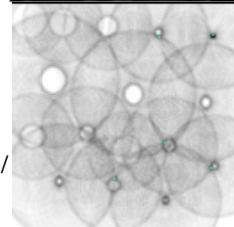
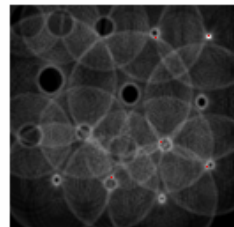
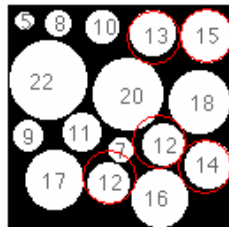
- ◆ Przestrzeń parametrów $X_c \times Y_c \times R$: płaszczyzna złożona z punktów, których współrzędne (x_c, y_c, r) spełniają równanie okręgu przechodzącego przez punkt (x, y) w przestrzeni obrazu.

- Przestrzeń obrazu: rodzina okręgów o różnych promieniach r , przechodzących przez punkt (x, y)

152



Przykład



– Demonstracja:
<http://www.markschulze.net/java/hough/>

153



Diagram Voronoi'a

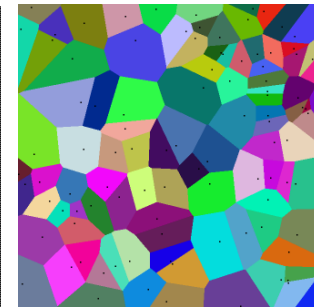
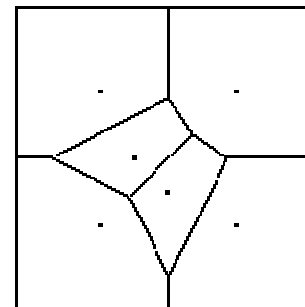
Definicja

- Diagram Voronoia (DV, ang. *Voronoi diagram*) to dekompozycja przestrzeni metrycznej określona zadaniem zbioru obiektów (najczęściej punktów) S .
- Każdy punkt p z S jednoznacznie wyznacza wielościan wypukły składający się z takich punktów x , że, spośród wszystkich punktów w S , p jest najbliższy x .
- Zbiór wszystkich takich $|S|$ wielościanów to diagram Voronoia.

155



Diagram Voronoia - przykłady



156



Uwagi

- Znana także jako:
 - dekompozycja Voronoi'a,
 - *Voronoi tessellation*,
 - *Dirichlet tessellation*
- 'Najbliższy' w sensie 'ślabym', tj. najbliższy lub równo odległy.
- 'Brzegowe' punkty generują otwarte wielościany,
- Może być tworzony dla przestrzeni (obrazów) wielowymiarowych,
- Uczenie maszynowe: DV wizualizuje działanie algorytmu k najbliższych sąsiadów (kNN) dla $k=1$

157



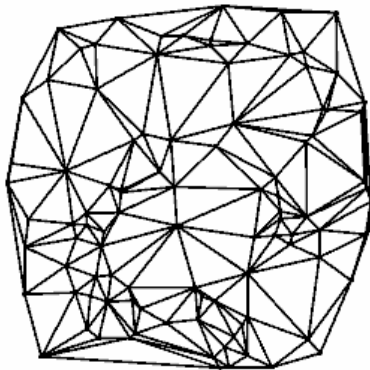
Graf dualny względem DV

- Triangulacja Delaunay (TD): podział przestrzeni/płaszczyzny na trójkąty rozpięte na punktach z S , taki że:
 - Każda para trójkątów ma zero lub jeden wspólny bok (krawędzie nie przecinają się) [triangulacja]
 - Żaden punkt z S nie zawiera się w żadnym z okręgów opisanych na ww trójkątach [TD]
- Symetralne krawędzi TD są ścianami wieloboków DV

158



Triangulacja Delaunay



159



Algorytmy wyznaczania DT

Typy:

- Inkrementacyjne: Dodawaj wierzchołek po wierzchołku,
 - Usuwać trójkąty których okręgi opisane zawierają nowy wierzchołek,
 - Wprowadzając nowe trójkąty,
 - $O(n^2)$
- Dziel i rządź (dla przypadku dwuwymiarowego)
 - Rekurencyjny podział zbioru S na dwa rozłączne podzbiory,
 - Generowanie i łączenie wynikowych triangulacji
 - $O(n \log(n))$

160



Algorytm wyznaczania DT

```
DT(S)
{
  if |S|=3 then
    Zwróć DT skonstruowany jako trójkąt rozpięty na punktach z S
  endif

  Przy pomocy prostej podziel S na dwa rozłączne podzbiory  $S_1$  i  $S_2$  tak,
  aby liczności  $S_1$  i  $S_2$  były możliwie równe.

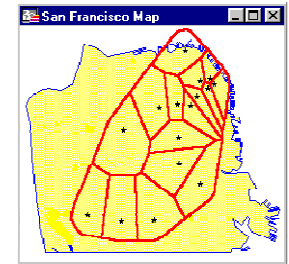
   $D_1 = DT(S_1)$ 
   $D_2 = DT(S_2)$ 
  Połącz  $D_1$  i  $D_2$  i zwróć otrzymany graf
}
```

161



Przykłady zastosowań

- Wizualizacja danych.
- Modelowanie struktur komórkowych.
 - Estymacja położenia ścian komórkowych i innych parametrów.
- Modelowanie mikrostruktur w stopach metalicznych.
- Fizyka polimerów
- Modelowanie 'naturalnego sąsiedztwa' punktów usługowych, np. restauracji McDonald's w San Francisco.



(za: Tetrad Computer Applications)

162



Rozszerzenia/uogólnienia

Rozszerzenia:

- inne definicji odległości,
- odmiany przybliżone,
- www.voronoi.com

163



Modele aktywnych konturów

snakes

Idea

Funkcja sklejana (*spline*) minimalizująca energię. Energia węża (aktywnego konturu) zależy od jego kształtu i położenia w obrazie.

Zastosowania:

- segmentacja,
- interpretacja,
- analiza sekwencji wideo i obrazów 3D,

Wymaganie: stan początkowy (kształt i położenie) aktywnego konturu musi być ustalony jakąś niezależną metodą.

165



Model

Energia aktywnego konturu jest wynikiem ścierania się 'sił':

- wewnętrznych, wynikających z kształtu konturu,
- zewnętrznych, wynikających z zawartości obrazu i/lub wyników otrzymanych z wyższego etapu przetwarzania.

Reprezentacja parametryczna:

$$\mathbf{v}(s) = (x(s), y(s)) \quad s \in [0,1]$$

gdzie x i y to współrzędne kolejnych punktów konturu, a s to zmienna niezależna (parametr).

Zazwyczaj implementuje się $\mathbf{v}$ jako funkcję sklejaną (*spline*).

166



Minimalizacja energii

Minimalizowany funkcjonal energetyczny:

$$\begin{aligned} E_{snake}^* &= \int_0^1 E_{snake}(\mathbf{v}(s)) ds \\ &= \int_0^1 E_{int}(\mathbf{v}(s)) + E_{image}(\mathbf{v}(s)) + E_{con}(\mathbf{v}(s)) ds \end{aligned}$$

gdzie:

- E_{int} – wewnętrzna energia konturu wynikająca ze zginania,
- E_{image} – odpowiada za siły obrazu,
- E_{con} – implementuje siły ograniczeń,

167



Wewnętrzna energia konturu

$$E_{int} = \alpha(s) \left| \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{d^2\mathbf{v}}{ds^2} \right|^2$$

gdzie

- α - elastyczność (*elasticity*),
- β - sztywność (*stiffness*).

W szczególności:

- Jeżeli dla danego punktu s_k ustalimy $\beta(s_k)=0$ pozwalamy drugiej pochodnej na nieciągłość i w konsekwencji na wykształcenie narożnika.

168



Siły obrazu

Implementacja E_{image} zależy od zadania.

Rozważmy implementację, w której wąż przyciągany jest do linii, krawędzi i zakończeń (linii).

$$E_{image} = w_{line} E_{line} + w_{edge} E_{edge} + w_{term} E_{term}$$

$$E_{line} = f(x, y)$$

Znak wagi w_{line} determinuje, czy wąż ma być przyciągany do jasnych czy ciemnych linii.

169



Siły obrazu

$$E_{edge} = -|\text{grad } f(x, y)|^2$$

Analogicznie: E_{term} , odpowiadający za zakończenia linii (wymaga rozważania gradientu wzdłuż funkcji sklepanej).

170



Siły ograniczeń

E_{con} implementuje zewnętrzne ograniczenia sformułowane przez:

- użytkownika/projektanta systemu,
- wynik(i) przetwarzania na wyższych etapach.

Na przykład: jeżeli wąż znajduje się blisko jakiejś 'cechy' (obiektu), który przez wyższy etap wnioskowania zostaje rozpoznany jako nieodpowiedni, to odpowiednio niska wartość E_{con} może go odwieść od tego obiektu, nawet jeżeli dobrze się do niego dopasowuje.

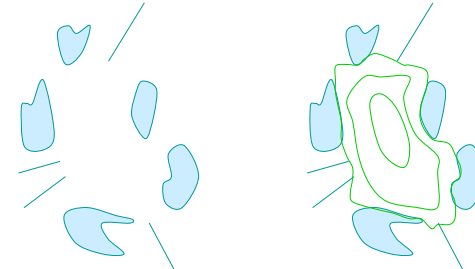
171



Przykład

Kontur iluzoryczny

Działanie węży



172



Poszukiwanie minimum

Z rachunku wariacyjnego: warunek Eulera-Lagrangea: funkcja $\mathbf{v}(s)$ minimalizująca E musi spełniać warunek:

$$\frac{d}{ds} E_{v_s} - E_{v_t} = 0$$

gdzie

- E_{v_s} – pochodna cząstkowa z E względem dv/ds
- E_v – pochodna cząstkowa E względem v .

Zakładając $E_{image} = E_{con} = 0$ dostajemy:

$$-\frac{d}{ds} \left(\alpha(s) \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right) + \frac{d^2}{ds^2} \left(\beta(s) \frac{d^2 \mathbf{v}}{ds^2} \right) = 0$$

173



Poszukiwanie minimum

Założmy, że dysponujemy estymatą początkową rozwiązania. Wówczas możemy poszukiwać rozwiązania iteracyjnie, zgodnie z formułą (*evolution equation*):

$$\frac{\partial \mathbf{v}(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha(s) \frac{\partial \mathbf{v}(s,t)}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\beta(s) \frac{\partial^2 \mathbf{v}(s,t)}{\partial s^2} \right) = 0$$

Rozwiązanie jest znalezione gdy:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(s,t)}{\partial t} = 0$$

174



Problemy

- ustalanie parametrów,
- wymaganie początkowego stanu,
- rozwiązanie równania Eulera-Lagrangea jest numerycznie niestabilne.

175



Uwagi

Rozszerzenia:

- modele z węzłem podlegającym podziałowi,
- balony – model z dodaną dodatkową siłą rozpychającą krzywą tak, jak by była nadmuchiwana (lepsze rezultaty, lepsza stabilność numeryczna),
- modele 3D,
- szybkie algorytmy.

Zastosowania:

- głównie medycyna i biologia – częste występowanie naturalnych obiektów deformalnych.

176



Cechy charakterystyczne

Modele węży i balonów to jeden z najnowszych nurtów w analizie obrazów.

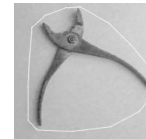
Cechy:

- aktywny kontur startuje od pewnej konfiguracji wynikającej zazwyczaj z wiedzy dziedzinowej lub wyników przetwarzania obrazu na dalszych etapach (odmiennie niż w metodach tradycyjnych, gdzie fragmenty obrazu próbuje się scalić w kontur i dopasować go do modelu).
- jednocześnie uwzględnianie obrazu, punktu startowego, pożądanych właściwości konturu i ograniczeń (wiedzy dziedzinowej).

177



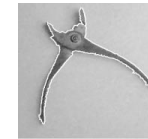
Przykład



Stan początkowy



Algorytm zachłanny



Algorytm unikający pętli

178

