

Matematyka Dyskretna

Liczby szczególne - ćwiczenia

Kaja Gutowska

Politechnika Poznańska

Rok akademicki 2022/2023

Zad. Ile istnieje możliwych podziałów 4-elementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ na 2 nie-puste podzbiory? Oblicz wykorzystując wzór rekurencyjny oraz wypisz wszystkie możliwości.

Zad. Ile istnieje możliwych podziałów 8-elementowego zbioru na 3 niepuste podzbiory?

Zad. Na ile sposobów można wyrazić liczbę 2310 jako iloczyn trzech liczb całkowitych z których każda jest większa od 1?

Zad. Na ile sposobów można utworzyć 4 zespoły z 8 osób (każda drużyna może mieć dowolną liczbę członków od 1 do 5)?

Zad. Grupa 14 osób wędruje po pustyni. Po pewnym czasie gubią się i losowo dzielą na 5 mniejszych grup. Na ile sposobów może się to zdarzyć, jeśli jako możliwą grupę uznamy także osobę izolowaną?

Zad. Na ile sposobów szef może przydzielić 8 różnych zadań do 5 pracowników, tak aby każdy pracownik miał przypisane co najmniej 1 z tych zadań, a żadne nie jest współdzielone pomiędzy pracowników?

Zad. Ile istnieje możliwych rozmieszczeń 4 elementów $\{1, 2, 3, 4\}$ w 2 cyklach? Wyznacz ze wzoru rekurencyjnego oraz wypisz wszystkie możliwości.

Zad. Ile istnieje możliwych rozwiązań 7-elementowego zbioru w 3 cyklach?

Zad. Wykaż, że dla zbioru 2-elementowego liczby Bella wynoszą 2 ($B_2 = 2$), gdzie $B_n = \sum_{k=0}^n S_2(n, k)$

Zad. Na ile sposobów możemy podzielić 4 osoby na grupy?

Zad. Udowodnij następujące własności liczb Lucasa:

$$\textcircled{a} \quad \forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=0}^n L_i = L_{n+2} - 1$$

$$\textcircled{b} \quad \forall n \in \mathbb{P} \sum_{i=1}^n L_i^2 = L_n \cdot L_{n+1} - 2$$

(Definicja rekurencyjna liczb Lucasa: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ dla $n \geq 2$)

Zad. Możemy wyrazić n -tą liczbę Catalana jako ilość wszystkich łamanych dróg zaczynających się w początku układu współrzędnych, a kończących się w punkcie $(0, 2n)$. Policz liczbę wszystkich możliwych dróg od początku układu współrzędnych $(0, 0)$ do punktu $(0, 6)$ (Liczby Catalana: $C_n = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$, dla $n \geq 0$).