Matematyka Dyskretna
Relacje, funkcje i asymptotyka - ćwiczenia

Kaja Gutowska

Politechnika Poznańska

Rok akademicki 2022/2023

Funkcje - zad. 1

Zad. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{jeśli } x \geqslant 1 \\ x & \text{jeśli } 0 \leqslant x < 1 \\ -x^3 & \text{jeśli } x < 0 \end{cases}$$

a. oblicz $f(3)$, $f(\frac{1}{3})$, $f(-\frac{1}{3})$ oraz $f(-3)$
b. naszkicuj wykres funkcji f
c. znajdź przeciwdziedzinę funkcji f

Funkcje - zad. 2

Zad. Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a $T = \{a, b, c, d\}$. Dla każdego z poniższych pytań podaj przykład, jeśli odpowiedź brzmi TAK; podaj krótkie wyjaśnienie, jeśli odpowiedź brzmi NIE.

a. czy istnieją funkcje różnowartościowe z S w T?
b. czy istnieją funkcje różnowartościowe z T w S?
c. czy istnieją funkcje przekształcające S na T?
d. czy istnieją funkcje przekształcające T na S?
e. czy istnieją przekształcenia wzajemnie jednoznaczne z S na T?

Funkcje - zad. 3

Zad. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i weźmy następujące funkcje ze zbioru S w zbiór S: $1_s(n) = n$, $f(n) = 6 - n$, $g(n) = max\{3, n\}$, $h(n) = max\{1, n - 1\}$

a. zapisz każdą z tych funkcji jako zbiór par uporządkowanych, tzn. wypisz elementy ich wykresów
b. naszkicuj wykres każdej z tych funkcji
c. które z tych funkcji są jednocześnie różnowartościowe i "na"

Funkcje - zad. 4

Zad. Weźmy następujące funkcje ze zbioru $\mathbb{N}$ w zbiór $\mathbb{N}$: $1_{\mathbb{N}}(n) = n$, $f(n) = 3n$, $g(n) = n + (-1)^n$, $h(n) = min\{n, 100\}$, $k(n) = max\{0, n - 5\}$.

a. Które z tych funkcji są różnowartościowe?
b. Które z tych funkcji przekształcają zbiór $\mathbb{N}$ na zbiór $\mathbb{N}$.

Funkcje - zad. 5

Zad. Niech $\sum = \{a, b, c\}$ i niech $\sum^*$ będzie zbiorem wszystkich słów w utworzonych za pomocą liter ze zbioru $\sum$. Określamy $L(w) = \textit{długość}(w)$ dla wszystkich $w \in \sum^*$.

a. Oblicz $L(w)$ dla słów $w_1 = cab$, $w_2 = ababac$, $w_3 = \lambda$.
b. Czy L jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.
c. Funkcja L przekształca $\sum^*$ w zbiór $\mathbb{N}$. Czy L przekształca $\sum^*$ na zbiór $\mathbb{N}$? Odpowiedź uzasadnij.
d. Znajdź wszystkie słowa w takie, że $L(w) = 2$.

Funkcje - zad. 6

Zad. Znajdź funkcje odwrotne do następujących funkcji przekształcających $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$:

a. $f(x) = 2x + 3$
b. $g(x) = x^3 - 2$
c. $h(x) = (x - 2)^3$
d. $k(x) = \sqrt[3]{x} + 7$

Funkcje - zad. 7

Zad. Niech będą dane funkcje $f(x) = \log x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$, $k(x) = \frac{1}{x}$.

a. Dla których par tych funkcji operacja złożenia jest przemienna?
b. Które z tych funkcji są funkcjami wzajemnie odwrotnymi?

Zad. Definiujemy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oraz $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ w następujący sposób: $f(n) = 2n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = \frac{n}{2}$, jeśli liczba n jest parzysta oraz $g(n) = \frac{n-1}{2}$, jeśli liczba n jest nieparzysta.

a. Oblicz $g(n)$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ i 73.
b. Pokaż, że $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$, ale $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$.

Relacje - zad. 1

Zad. Dla następujących relacji w zbiorze $S = \{0, 1, 2, 3\}$ określ, które z własności (Z, PZ, S, AS, P) spełniają te relacje:

a. $(m, n) \in R_1$, jeśli $m + n = 3$
b. $(m, n) \in R_2$, jeśli $m - n$ jest liczbą parzystą
c. $(m, n) \in R_3$, jeśli $m \leqslant n$
d. $(m, n) \in R_4$, jeśli $m + n \leqslant 4$
e. $(m, n) \in R_5$, jeśli $max\{m, n\} = 3$

Relacje - zad. 2

Zad. Niech $A = \{0, 1, 2\}$. Każde z poniższych stwierdzeń określa relację g w zbiorze A w ten sposób, że $(m, n) \in g$, jeśli to stwierdzenie jest prawdziwe dla m i n. Zapisz każdą relcję jako zbiór par uporządkowanych.

a. $m \leqslant n$
b. $m < n$
c. $m = n$
d. $mn = 0$
e. $mn = m$
f. $m + n \in A$
g. $m^2 + n^2 = 2$
h. $m^2 + n^2 = 3$
i. $m = max\{n, 1\}$

Relacje - zad. 3

Zad. Które z relacji z zadania powyżej są zwrotne, a które symetryczne?

a. $m \leqslant n$
b. $m < n$
c. $m = n$
d. $mn = 0$
e. $mn = m$
f. $m + n \in A$
g. $m^2 + n^2 = 2$
h. $m^2 + n^2 = 3$
i. $m = max\{n, 1\}$

Zad. W zbiorze $\mathbb{N}$ określone są następujące relacje dwuargumentowe.

a. Zapisz relację dwuargumentową R_1 określoną wzorem $m + n = 5$ jako zbiór par uporządkowanych.
b. Zrób to samo dla relacji R_2 określonej wzorem $max\{m, n\} = 2$.
c. Relacja dwuargumentowa R_3 określona wzorem $min\{m, n\} = 2$ zawiera nieskończenie wiele par uporządkowanych. Wypisz pięć z nich.

Relacje - zad. 5

Zad. Dla każdej relacji z zadania powyższego określ, które z własności (Z), (PZ), (S), (AS) i (P) spełnia ta relacja.

a. R_1 określona wzorem $m + n = 5$
b. R_2 określona wzorem $max\{m, n\} = 2$
c. R_3 określona wzorem $min\{m, n\} = 2$

Asymptotyka - zad. 1

Zad. Dla każdej z poniższych funkcji znajdź najmniejszą liczbę k taką, że $f(n) = \mathcal{O}(n^k)$

a. $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$
b. $f(n) = (n^2 + 1)(2n^4 + 3n - 8)$
c. $f(n) = (n^3 + 3n - 1)^4$
d. $f(n) = \sqrt{n+1}$
e. $f(n) = \sqrt{n^3 + 2n^2 + n}$

Asymptotyka - zad. 2

Zad. Sprawdź, czy każda z poniższych równości jest prawdziwa czy fałszywa. W każdym z przypadków odpowiedź uzasadnij.

a. $2^{n+1} = \mathcal{O}(2^n)$
b. $(n+1)^2 = \mathcal{O}(n^2)$
c. $2^{2n} = \mathcal{O}(2^n)$
d. $(200n)^2 = \mathcal{O}(n^2)$