

Matematyka Dyskretna

Logika i teoria mnogości - ćwiczenia

Kaja Gutowska

Politechnika Poznańska

Rok akademicki 2022/2023

Zad. Które z poniższych wyrażen są zdaniami? Podaj wartości logiczne tych zdań.

- a $x^2 = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- b $x^2 = x$, dla pewnego $x \in \mathbb{R}$
- c $x^2 = x$
- d $x^2 = x$, dla dokładnie jednego $x \in \mathbb{R}$
- e $xy = xz$, implikuje $y = z$
- f $xy = xz$, implikuje $y = z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- g $w_1 w_2 = w_1 w_3$ implikuje $w_2 = w_3$ dla wszystkich słów $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$

Zad. Podaj zdanie odwrotne do następujących zdań:

- a $q \rightarrow r$
- b jeśli jestem bystry, to jestem bogaty
- c jeśli $x^2 = x$, to $x = 0$ lub $x = 1$
- d jeśli $2 + 2 = 4$, to $2 + 4 = 8$

Zad. Napisz kontrapozycję dla zdań z poprzedniego ćwiczenia.

- a $q \rightarrow r$
- b jeśli jestem bystry, to jestem bogaty
- c jeśli $x^2 = x$, to $x = 0$ lub $x = 1$
- d jeśli $2 + 2 = 4$, to $2 + 4 = 8$

Zad. Znajdź kontraprzykłady dla następujących stwierdzeń.

- a $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą dla każdego $n \geq 2$
- b $2^n + 3^n$ jest liczbą pierwszą dla $\forall n \in \mathbb{N}$
- c $2^n + n$ jest liczbą pierwszą dla każdej nieparzystej liczby dodatniej n

Zad. Załóżmy, że wiadomo, iż zdanie $p \rightarrow q$ jest fałszywe. Podaj wartości logiczne zdań:

- a $p \wedge q$
- b $p \vee q$
- c $q \rightarrow p$

Zad. Utwórz macrycę logiczną dla zdania $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)]$.

Zad. Utwórz macierz logiczną dla zdania $[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow (p \wedge \neg q)$.

Zad. Wykaż za pomocą matrycy logicznej (tablicy prawdy), że zdanie $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ jest implikacją logiczną (jest zawsze prawdziwe).

Zad. Podaj zdania odwrotne do następujących zdań:

- a) $p \rightarrow q$
- b) jeśli pada deszcz to na niebie są chmury
- c) jeśli $x^2 = 4$, to $x = 2$ lub $x = -2$
- d) jeśli $3 + 3 = 6$, to $4 + 4 = 10$
- e) jeśli $2 + 5 = 7$, to $3 + 3 = 8$

Zad. Podaj kontrapozycje do zdań z poprzedniego zadania:

- a $p \rightarrow q$
- b jeśli pada deszcz to na niebie są chmury
- c jeśli $x^2 = 4$, to $x = 2$ lub $x = -2$
- d jeśli $3 + 3 = 6$, to $4 + 4 = 10$
- e jeśli $2 + 5 = 7$, to $3 + 3 = 8$

Zad. Niech $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$, $D = \{2, 4, 8\}$, wyznacz następujące zbiory:

- a $A \cup B$
- b $A \cap B$
- c $(A \cup B) \cap \bar{C}$
- d $A \setminus B$
- e $C \setminus D$
- f $B \oplus D$
- g ile podzbiorów ma zbiór C ?

Zad. Niech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{n \in \mathbb{P} : \text{liczba } n \text{ jest parzysta}\}$ oraz $C = \{n \in \mathbb{P} : \text{liczba } n \text{ jest nieparzysta}\}$:

- a) wyznacz następujące zbiory: $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \oplus C$
- b) wypisz wszystkie podzbiory zbioru A
- c) które z następujących zbiorów: $A \oplus B$, $A \oplus C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$ są nieskończone?

Zad. Udowodnij następujące równości za pomocą diagramów Venna:

a $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

b $A \oplus B \subseteq (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$

Zad. Niech zbiór \mathbb{R} będzie przestrzenią. Wyznacz następujące zbiory:

- a $[0, 3] \cap [2, 6]$
- b $[0, 3] \cup [2, 6]$
- c $[0, 3] \setminus [2, 6]$
- d $[0, 3] \oplus [2, 6]$
- e $\overline{[0, 3]}$
- f $[0, 3] \cap \emptyset$

Zad. Niech U będzie zbiorem skończonych elementów, niech A i B będą niepustymi zbiorami takimi, że: $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ i $A \cap B \neq \emptyset$. Uporządkuj poniższe listy w kolejności niemalejącej.

- a $|A \cup B|, |B|, |\emptyset|, |A \cap B|, |U|$
- b $|A \setminus B|, |A| + |B|, |\emptyset|, |A \oplus B|, |A \cup B|, |U|$
- c $|A \setminus B|, |\emptyset|, |A|, |A| + |B|, |A \cup B|, |U|$

Zad.

- a Jakim zbiorem jest $A \oplus A$ dla dowolnego zbioru A ?
- b Jakim zbiorem jest $A \oplus \emptyset$?

Zad. Niech alfabet $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$, $B = \{w \in \Sigma^* : \text{dł.}(w) \geq 2\}$, $C = \{w \in \Sigma^* : \text{dł.}(w) \leq 2\}$:

- a wyznacz zbiory: $A \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $A \oplus C$
- b wyznacz zbiory: $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \setminus A$
- c wyznacz zbiory: $\Sigma^* \setminus B$, $\Sigma \setminus B$, $\Sigma \setminus C$
- d wyznacz wszystkie podzbiory Σ
- e ile zbiorów należy do zbioru $P(\Sigma)$