Regresja liniowa – przypadek jednowymiarowy $p = 1$

$\mathbf{X}$ jest wektorem kolumnowym typu n, w jest pojedynczą liczbą

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - wX_i)^2$$

$$MSE \text{ jest najmniejsze} \iff \nabla MSE = 0$$

Policzmy!

$$\nabla MSE = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - wX_i)^2\right)' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[2(y_i - wX_i)(-X_i)] =$$

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i^2 w - X_i y_i\right] = \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 w - \sum_{i=1}^{n}X_i y_i\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i^2 w - \sum_{i=1}^{n}X_i y_i = 0$$

$$w\sum_{i=1}^{n}X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}X_i y_i w = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

Przykład

Przewidzieć koszt paszy y w zależności od liczby prosiaków X

X	4	7	9	w	MSE
$y^{(1)}$	340	595	765	?	?

- $y^{(1)}$: $w = 85$, $mse = 0$
- $y^{(2)}$: niektóre prosiaki jedzą więcej niż inne
- $y^{(3)}$: perfekcyjne prosiaki, ale dochodzą koszty wysyłki $w = 91.85$ $MSE = 4{,}34$

Regresja liniowa – przypadek jednowymiarowy $p = 1$ z wyrazem wolnym

$\mathbf{X}$ jest wektorem kolumnowym typu n, w jest pojedynczą liczbą

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - wX_i - b)^2$$

$$MSE \text{ jest najmniejsze } \iff \nabla MSE = 0$$

Ze wzgl. na w:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[X_i^2 - X_i(y - b)\right] = 0$$

Ze wzgl. na b:

$$\sum_{i=1}^{n}[b - (y_i - X_i w)] = 0$$

Wyznaczamy b:

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i w)$$

Podstawiamy do pochodznej ze wzgl. na w:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 w - X_i y_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i w)$$

Systemy agentowe

2017-11-18

└Regresja liniowa – przypadek jednowymiarowy $p = 1$ z wyrazem wolnym

Regresja liniowa – przypadek jednowymiarowy $p = 1$ z wyrazem wolnym

$\mathbf{X}$ jest wektorem kolumnowym typu n, w jest pojedynczą liczbą

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - wX_i - b)^2$$

$$MSE \text{ jest najmniejsze } \iff \nabla MSE = 0$$

Po przekształceniu:

$$w = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(y_i - \overline{\mathbf{y}})}{\sum_{i=1}^{n} X_i(X_i - \overline{\mathbf{X}})}$$

gdzie $\overline{\mathbf{y}}$ to średnia arytmetyczna $\mathbf{y}$

Prosiaki

Przewidzieć koszt paszy y w zależności od liczby prosiaków X

X	4	7	9	w	b	MSE
$y^{(3)}$	390	645	815	?	?	?

- $y^{(3)}$: perfekcyjne prosiaki, ale dochodzą koszty wysyłki $w = 85$, $b = 50$, $MSE = 0$

Regresja liniowa – wariant macierzowy

$$MSE = \frac{1}{n}\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|_2^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w})^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w})$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} MSE = 0$$

Policzmy!

$$\nabla MSE \sim \nabla\left(\mathbf{y}^T - \mathbf{w}^T\mathbf{X}^T\right)(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}) =$$

$$\nabla\left(\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{X}\mathbf{w} - \mathbf{w}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y} + \mathbf{w}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{w}\right) =$$

drugi i trzeci składnik to liczby, a do tego$(\mathbf{y}^T\mathbf{X}\mathbf{w})^T = \mathbf{w}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y}$

$$\nabla\left(\mathbf{y}^T\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T\mathbf{X}\mathbf{w} + \mathbf{w}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{w}\right) = 2\mathbf{y}^T\mathbf{X} - 2\mathbf{w}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X} = 0$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{X} = \mathbf{w}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}$$

$$\mathbf{w}^T = \mathbf{y}^T\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

Prosiaki

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 390 \\ 645 \\ 815 \end{bmatrix}$$

Policzmy!

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 146 & 20 \\ 20 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 146 & 20 \\ 20 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązujemy układ czterech równań ze względu na zmienne a, b, c, d

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ -20 & 146 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 13410 \\ 1850 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ -20 & 146 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13410 \\ 1850 \end{bmatrix} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 3230 \\ 1900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 50 \end{bmatrix}$$