Wspomaganie Decyzji

IV

Roman Słowiński

Zakład Inteligentnych Systemów Wspomagania Decyzji

Instytut Informatyki

Politechniki Poznańskiej

Wieloatrybutowa teoria użyteczności (J.von Neumann, O.Morgenstern 1954)

- Założenie 1: preferencje decydenta są spójne z pewną nieznaną funkcją, która nadaje każdemu wariantowi $a \in A$ wartość zwaną użytecznością: $U[g_1(a),\ldots,g_n(a)] = U(a)$

- Założenie 2: na każdym kryterium g_i typu „zysk", dla dowolnej pary wariantów $a,b \in A$ zachodzi jedna z dwóch relacji $(i=1,\ldots,n)$

$$g_i(a) > g_i(b) \Leftrightarrow a \succ_i b \quad \text{(preferencja)}$$

$$g_i(a) = g_i(b) \Leftrightarrow a \sim_i b \quad \text{(nierozróżnialność)}$$

- Założenie 3: dla dowolnej pary wariantów $a,b \in A$, zależnie od wartości $U(a)$ i $U(b)$, zachodzi jedna z dwóch relacji globalnych:

$$U(a) > U(b) \Leftrightarrow a \succ b \quad \text{(preferencja)}$$

$$U(a) = U(b) \Leftrightarrow a \sim b \quad \text{(nierozróżnialność)}$$

- Relacja $\succ$ jest asymetryczna i przechodnia, a relacja $\sim$ jest symetryczna, zwrotna i przechodnia

Wieloatrybutowa teoria użyteczności – formy funkcji użyteczności

- Postać addytywna: $U[g_1(a),\ldots,g_n(a)] = \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)]$
- Postać multiplikatywna: $U[g_1(a),\ldots,g_n(a)] = \prod_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)]$

  gdzie $u_i[g_i(a)]$ nazywa się użytecznością cząstkową
- Postać Keeneya-Raiffy: $\boxed{K\,U(a)+1 = \prod_{i=1}^{n}\left(K\,k_i\,u_i[g_i(a)]+1\right)}$

  gdzie K jest współczynnikiem skalującym, normującym U do [0,1],

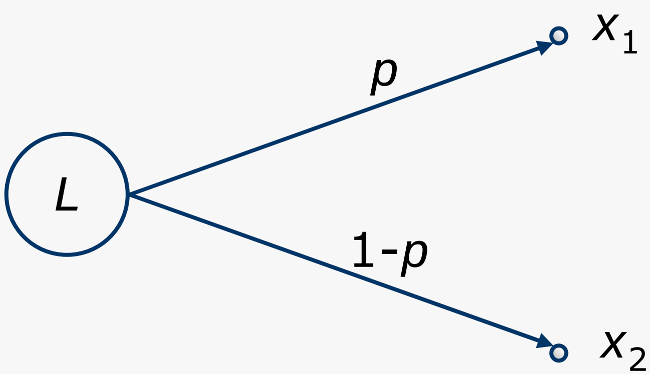
  k_i jest wagą kryterium g_i zawartą w [0,1]
- Założenie 4: $u_i[g_{i*}] = 0$, $u_i[g_i^*] = 1$,

  gdzie g_{i*} jest najmniej pożądaną wartością,

  a g_i^* najbardziej pożądaną wartością na skali g_i

Wieloatrybutowa teoria użyteczności – spodziewana użyteczność

- Loteria = rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze zdarzeń x (możliwych ocen wariantu) – odpowiada mu rozkład użyteczności
- W przypadku deterministycznym, rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze zdarzeń x redukuje się do zdarzenia x' z użytecznośćą $U(x')$
- W praktyce, loteria = zdarzenie losowe, którego konsekwencją jest zdarzenie x_1 z prawdopodobieństwem p lub zdarzenie x_2 z prawdopodobieństwem (1-p). Oznaczamy ją $L(x_1,p,x_2)$



np. p=0.8
x_1= 4.000$
x_2 = 0

Wieloatrybutowa teoria użyteczności – spodziewana użyteczność

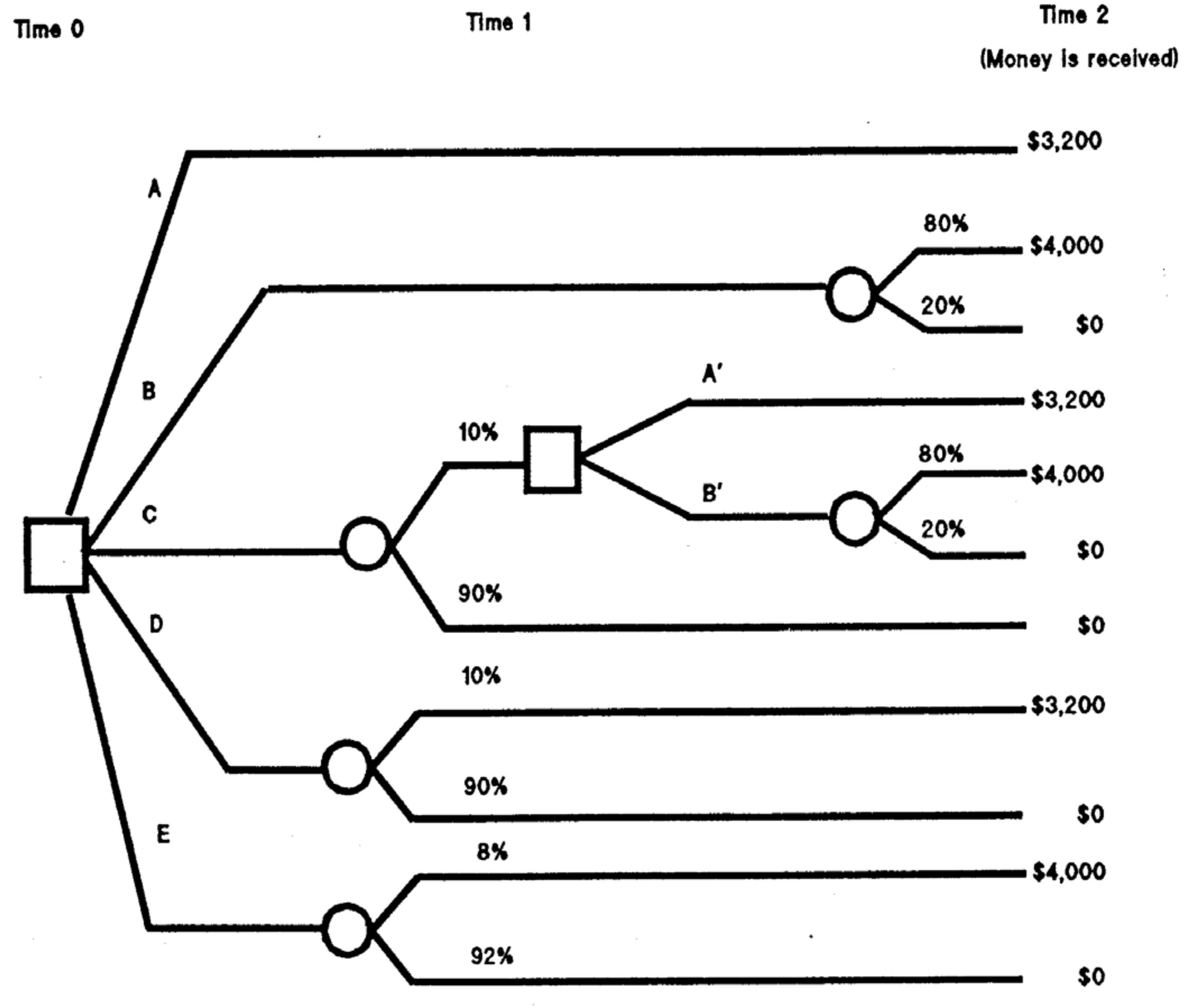


Figure 1–1. Decision tree.

Wieloatrybutowa teoria użyteczności – spodziewana użyteczność

- Własność substytucji (*substitution property or common ratio*)

  Jeśli loteria $L_A \succeq L_B$, to jeśli dołączyć do nich dowolną loterię L_Z,

  $p\ L_A + (1\text{-}p)\ L_Z \succeq p\ L_B + (1\text{-}p)\ L_Z$ dla każdego $p \in [0,1]$

- Własność rzeczy pewnych (*sure thing principle*)

  Jeśli $L_D = p\ L_A + (1\text{-}p)\ L_Z \succ L_E = p\ L_B + (1\text{-}p)\ L_Z$

  to $L_{D'} = p\ L_A + (1\text{-}p)\ L_{Z'} \succ L_E = p\ L_B + (1\text{-}p)\ L_{Z'}$

- Własność iniowości prawdopodobieństw (*linear expected utility*)

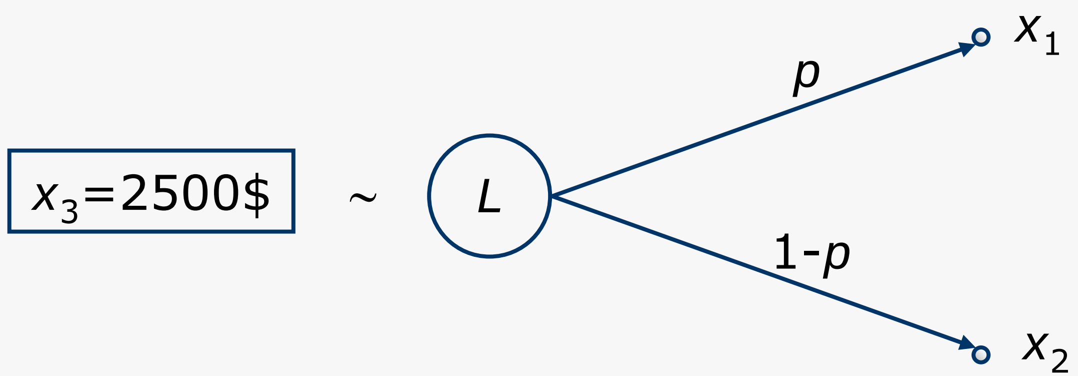
  Spodziewana użyteczność loterii jest zależna liniowo od prawdopodobieństwa :

  $$U[p\ L_A + (1\text{-}p)\ L_B] = p\ U(L_A) + (1\text{-}p)\ U(L_B)$$

- Równoważnik pewności = zdarzenie pewne x_3, które jest uznawane przez decydenta za równoważne loterii $L(x_1,p,x_2)$, co zapisujemy $x_3 \sim L(x_1,p,x_2)$

- Stąd na mocy własności liniowości : $U(x_3) = p\ U(x_1) + (1\text{-}p)\ U(x_2)$

Wieloatrybutowa teoria użyteczności – spodziewana użyteczność



np. p=0.8
x_1= 4000$
x_2 = 0

- Własność ciągłości (*continuity property*)

  Dla dowolnego kryterium g_i i dowolnych zdarzeń (ocen wariantów) $x_1 = g_i(a)$, $x_2 = g_i(b)$, $x_3 = g_i(c)$ $(a,b,c \in A)$ takich, że $x_1 > x_3 > x_2$, istnieje takie prawdopodobieństwo p, dla którego $x_3 \sim L(x_1, p, x_2)$

- $g_{i*} = x_*$ jest najmniej pożądaną wartością,

  $g_i^* = x^*$ jest najbardziej pożądaną wartością na skali g_i ,

  $u_i[x_*] = 0$, $u_i[x^*] = 1$

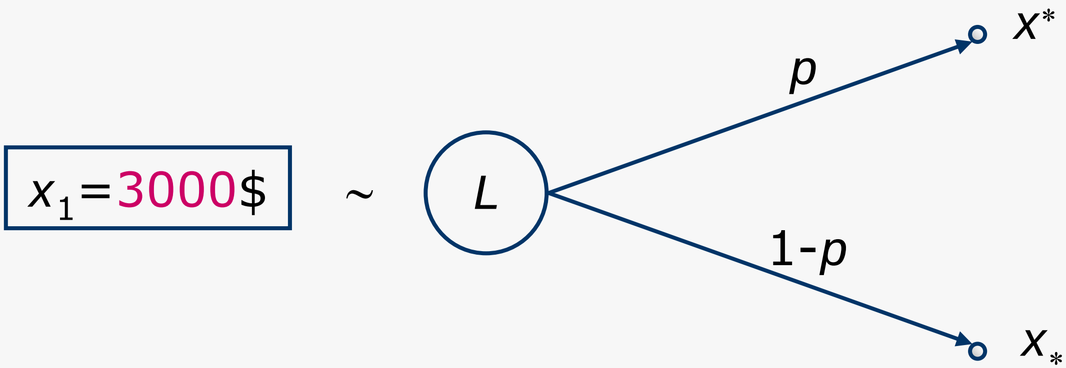
Metoda ASSESS

- Konstrukcja funkcji użyteczności $K\,U(x_1,\ldots x_n)+1=\prod_{i=1}^{n}(K\,k_i\;u_i(x_i)+1)$
- Etap 1: Konstrukcja cząstkowych funkcji użyteczności $u_i(x_i)$ dla każdego kryterium g_i, i ocen $g_i(a)= x_i$, i=1,…,n, gdzie $a\in A$
- Etap 2: Wyznaczanie wag kryteriów k_i i współczynnika skalującego K
- W systemie ASSESS zaimplementowano cztery sposoby konstrukcji cząstkowych funkcji użyteczności :
    a) poszukiwanie równoważnika pewności ze stałym prawdopodobieństwem
    b) poszukiwanie równoważnika pewności ze zmiennym prawdopodobieństwem
    c) porównywanie loterii
    d) porównywanie prawdopodobieństw

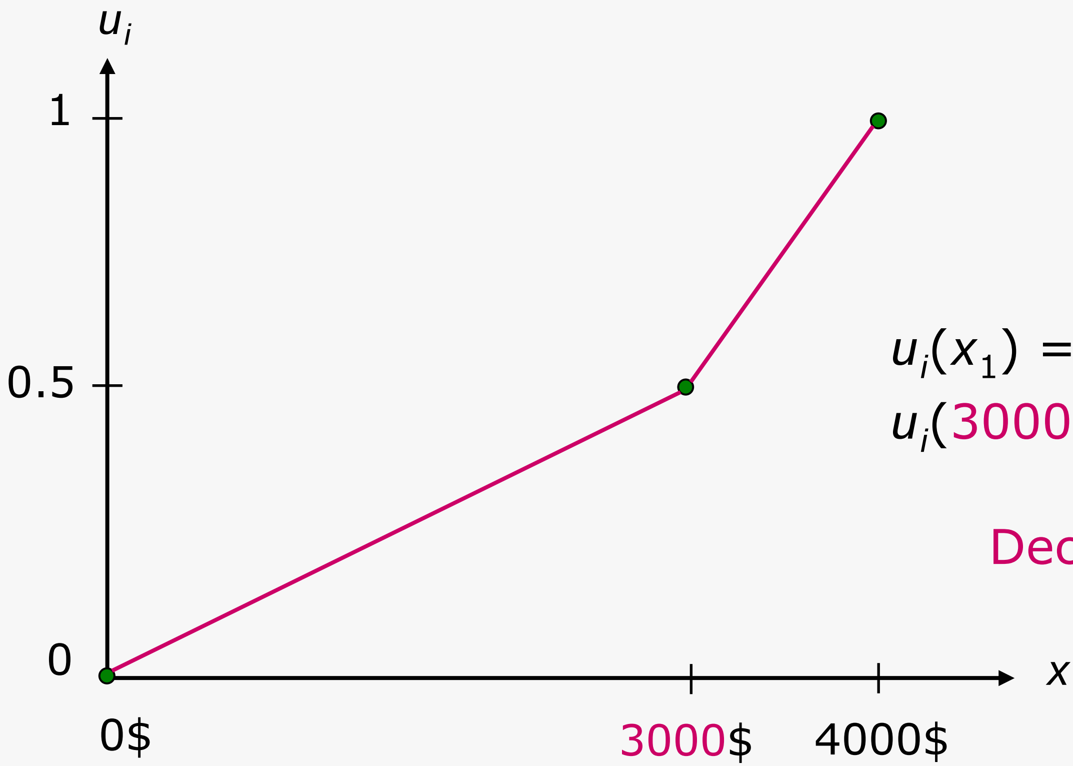
Metoda ASSESS

- Podstawą wszystkich sposobów, z wyjątkiem porównywania loterii, jest dialog, w którym decydent porównuje sytuację pewnego otrzymania określonej wartości kryterium z loterią, w której może otrzymać korzystniejszą wartość danego kryterium z prawdopodobieństwem p bądź mniej korzystną z prawdopodobieństwem $(1-p)$
- Dialog prowadzi do określenia przez decydenta równoważnika pewności dla danej loterii, tj. takiej wartości kryterium, dla której jest mu obojętne czy ją otrzyma na pewno, czy też będzie brał udział w loterii
- Wartości równoważnika pewności dla danej loterii poszukuje się iteracyjnie zmieniając propozycje x_1, x_2, x_3 i p stosownie do udzielanych odpowiedzi
- Zmiany te są analogiczne do poszukiwania miejsc zerowych funkcji metodą połowienia przedziału
- Cały taki dialog powtarza się kilka razy w celu znalezienia większej liczby punktów cząstkowej funkcji użyteczności

Poszukiwanie równoważnika pewności ze stałym prawdopodobieństwem



p=0.5
x^*= 4000$
x_*= 0

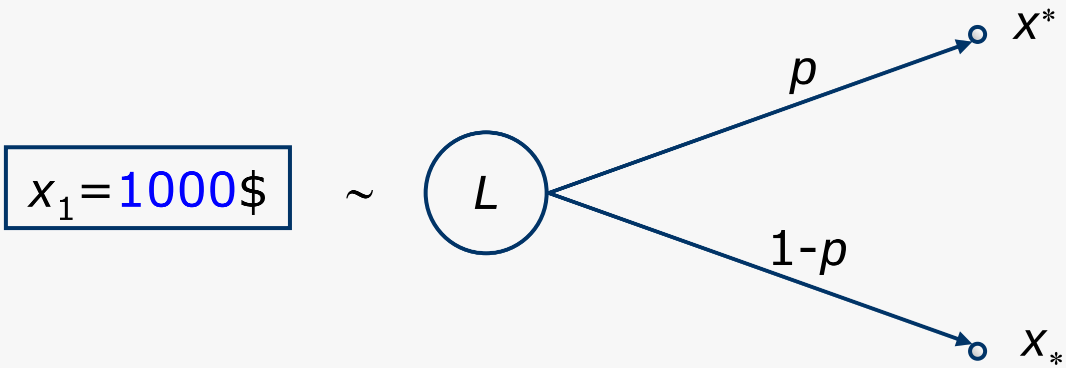


$u_i(x_1) = p\ u_i(x^*) + (1\text{-}p)\ u_i(x_*)$

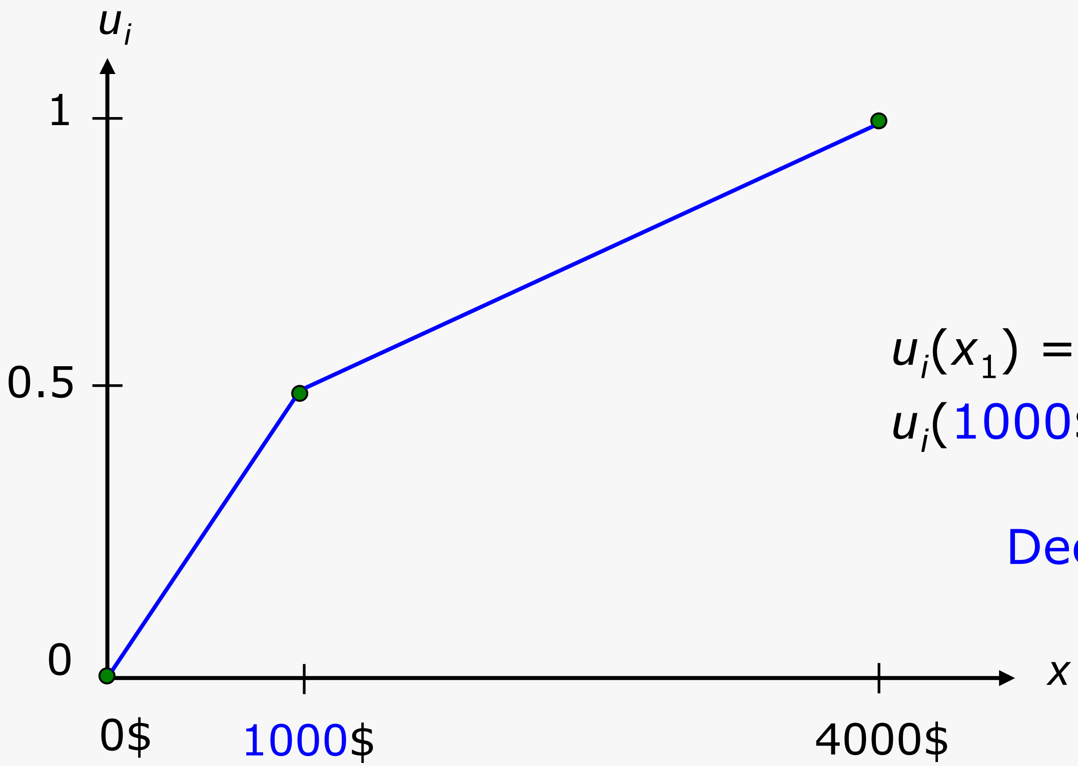
$u_i(3000\$) = 0.5 \times 1 + 0.5 \times 0 = 0.5$

Decydent skłonny do ryzyka

Poszukiwanie równoważnika pewności ze stałym prawdopodobieństwem



p=0.5
x^*= 4000$
x_*= 0

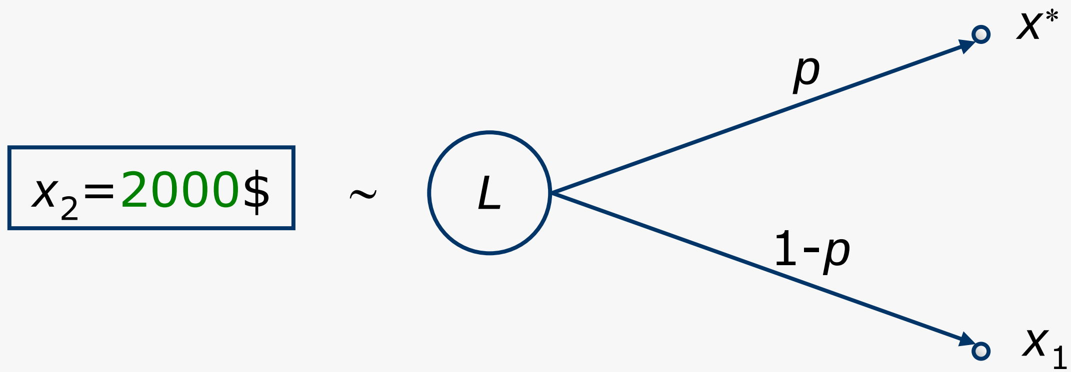


$u_i(x_1) = p\ u_i(x^*) + (1-p)\ u_i(x_*)$

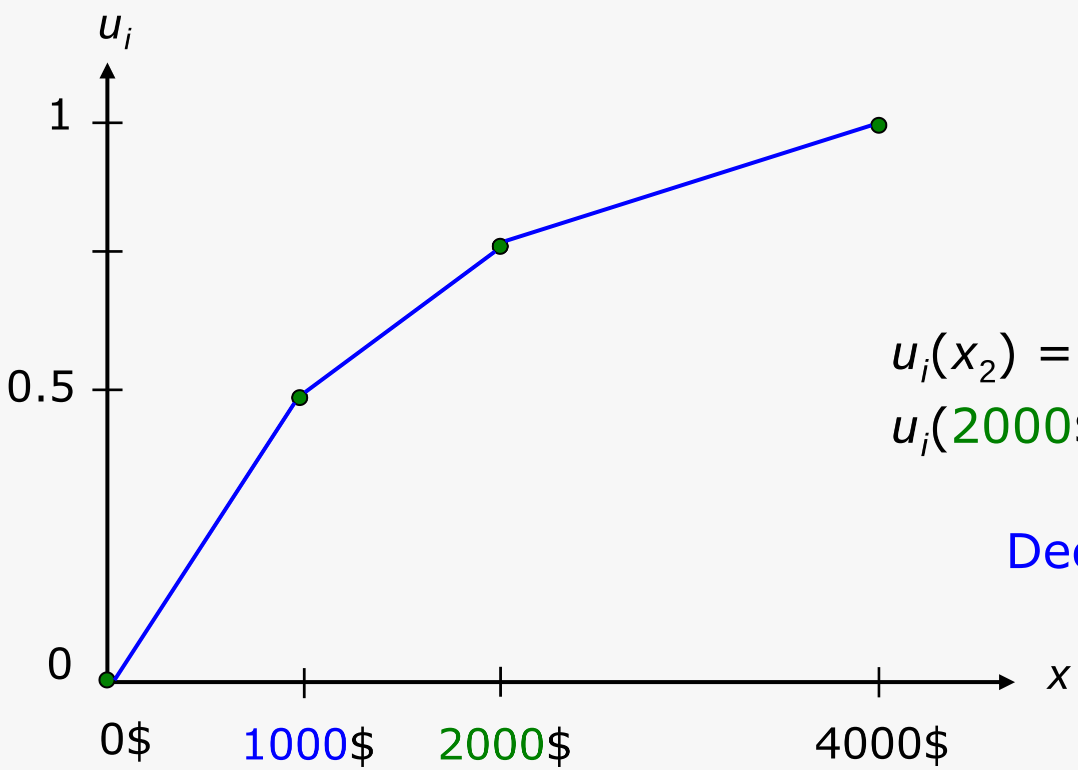
$u_i(1000\$) = 0.5 \times 1 + 0.5 \times 0 = 0.5$

Decydent unikający ryzyka

Poszukiwanie równoważnika pewności ze stałym prawdopodobieństwem



p=0.5
x^*= 4000$
x_1= 1000$



$u_i(x_2) = p\ u_i(x^*) + (1\text{-}p)\ u_i(x_1)$

$u_i(2000\$) = 0.5\times 1 + 0.5\times 0.5 = 0.75$

Decydent unikający ryzyka

Poszukiwanie równoważnika pewności ze zmiennym prawdopodobieństwem

- Prawdopodobieństwo p jest zadane ale zmieniane w każdej iteracji, szukany jest równoważnik pewności x, a zdarzenia x^*, x_* są stałe
- $L(x^*, p_1, x_*) \sim x_1 \rightarrow u_i(x_1) = p_1\, u_i(x^*) + (1\text{-}p_1)\, u_i(x_*)$

  (np. p_1=0.5) $\quad u_i(x_1) = 0.5\times 1 + 0.5\times 0 = 0.5$
- $L(x^*, p_2, x_*) \sim x_2 \rightarrow u_i(x_2) = p_2\, u_i(x^*) + (1\text{-}p_2)\, u_i(x_*)$

  (np. p_2=0.75) $\quad u_i(x_2) = 0.75\times 1 + 0.25\times 0 = 0.75$
- $L(x^*, p_3, x_*) \sim x_3 \rightarrow u_i(x_3) = p_3\, u_i(x^*) + (1\text{-}p_3)\, u_i(x_*)$

  (np. p_3=0.25) $\quad u_i(x_3) = 0.25\times 1 + 0.75\times 0 = 0.25$

Porównywanie loterii

- Decydent porównuje dwie loterie $L(x_1,p,x_*)$ i $L(x^*,p',x_*)$,

  gdzie na początku $x_1 = (x^* + x_*)/2$, p jest zadane, a p' jest szukane

- $p'\, u_i(x^*) + (1-p')\, u_i(x_*) = p\, u_i(x_1) + (1-p)\, u_i(x_*)$

  $p' \times 1 + 0 = p\, u_i(x_1) + 0$

  $u_i(x_1) = p'/p$, czyli $p' < p$

- W następnych krokach powtarza się tę procedurę

  dla punktów środkowych kolejno otrzymanych przedziałów

  $x_2 = (x_1 + x_*)/2 \;\rightarrow L(x_2,p,x_*)$ i $L(x^*,p',x_*)$

  $x_3 = (x^* + x_1)/2 \;\rightarrow L(x_3,p,x_*)$ i $L(x^*,p',x_*)$

  ....

Porównywanie prawdopodobieństw

- Procedura jest podobna jak przy poszukiwaniu równoważnika pewności ze stałym prawdopodobieństwem
- Różnica polega na tym, że dla zadanego równoważnika pewności x danej loterii poszukuje się równoważącej wartości prawdopodobieństwa p
- $L(x^*, p_1, x_*) \sim x_1 \;\; \rightarrow \;\; u_i(x_1) = p_1\, u_i(x^*) + (1\text{-}p_1)\, u_i(x_*)$

  (np. $x_1 = (x^* + x_*)/2$, p_1=0.4) $\quad u_i(x_1) = 0.4\times1 + 0.6\times0 = 0.4$
- $L(x_1, p_2, x_*) \sim x_2 \;\; \rightarrow \;\; u_i(x_2) = p_2\, u_i(x_1) + (1\text{-}p_2)\, u_i(x_*)$

  (np. $x_2 = (x_1 + x_*)/2$, p_2=0.3) $\quad u_i(x_2) = 0.3\times0.4 + 0.7\times0 = 0.12$
- $L(x^*, p_3, x_1) \sim x_3 \;\; \rightarrow \;\; u_i(x_3) = p_3\, u_i(x^*) + (1\text{-}p_3)\, u_i(x_1)$

  (np. $x_3 = (x^* + x_1)/2$, p_3=0.45) $\quad u_i(x_3) = 0.45\times1 + 0.55\times0.4 = 0.67$

Wyznaczanie wag kryteriów

- Dla każdego kryterium g_i z osobna, przedstawia się decydentowi loterię, w której zdarzenie najbardziej korzystne x^* składa się z najlepszych wartości na wszystkich kryteriach, a zdarzenie najmniej korzystne x_* składa się z najgorszych wartości na wszystkich kryteriach
- Równoważnik pewności x składa się z najlepszej wartości na kryterium $g_i=x_i^*$ i z najgorszych wartości na kryteriach $g_j=x_{j*}$, $j \neq i$
- Szuka się wartości prawdopodobieństwa p równoważącego x i loterię
- W wyniku:

$$k_i = p$$

Wyznaczanie wag kryteriów

- $$K\,U(x_1,\ldots x_n)+1=\prod_{i=1}^{n}\left(K\,k_i\,u_i(x_i)+1\right)$$
- Po stronie równoważnika pewności:

  $u_j(x_{j*}) = 0$ dla każdego $j \neq i$

  stąd

  $K\,U(x_1,\ldots,x_n) + 1 = K\,k_i\,u_i(x_i^*) + 1$

  $U(x_1,\ldots,x_n) = k_i\,\cancelto{1}{u_i(x_i^*)} = k_i$

- Po stronie loterii:

  $U(x_1,\ldots,x_n) = p\,U(\cancelto{1}{x_1^*,\ldots,x_n^*}) + (1\text{-}p)\,U(\cancelto{0}{x_{1*},\ldots,x_{n*}}) = p$

- Ponieważ równoważnik pewności jest nierozróżnialny z loterią, ich użyteczności są równe, zatem : $k_i = p$

Wyznaczanie współczynnika skalującego

- Współczynnik *K* oblicza się po podstawieniu do wzoru na użyteczność najbardziej korzystnych wartości na wszystkich kryteriach

$$K\,\cancelto{1}{U\left(x_1^*,\ldots x_n^*\right)}+1=\prod_{i=1}^{n}\left(K\,k_i\,\cancelto{1}{u_i\left(x_i^*\right)}+1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$K+1=\prod_{i=1}^{n}\left(K\,k_i+1\right)$$

$$\Downarrow$$

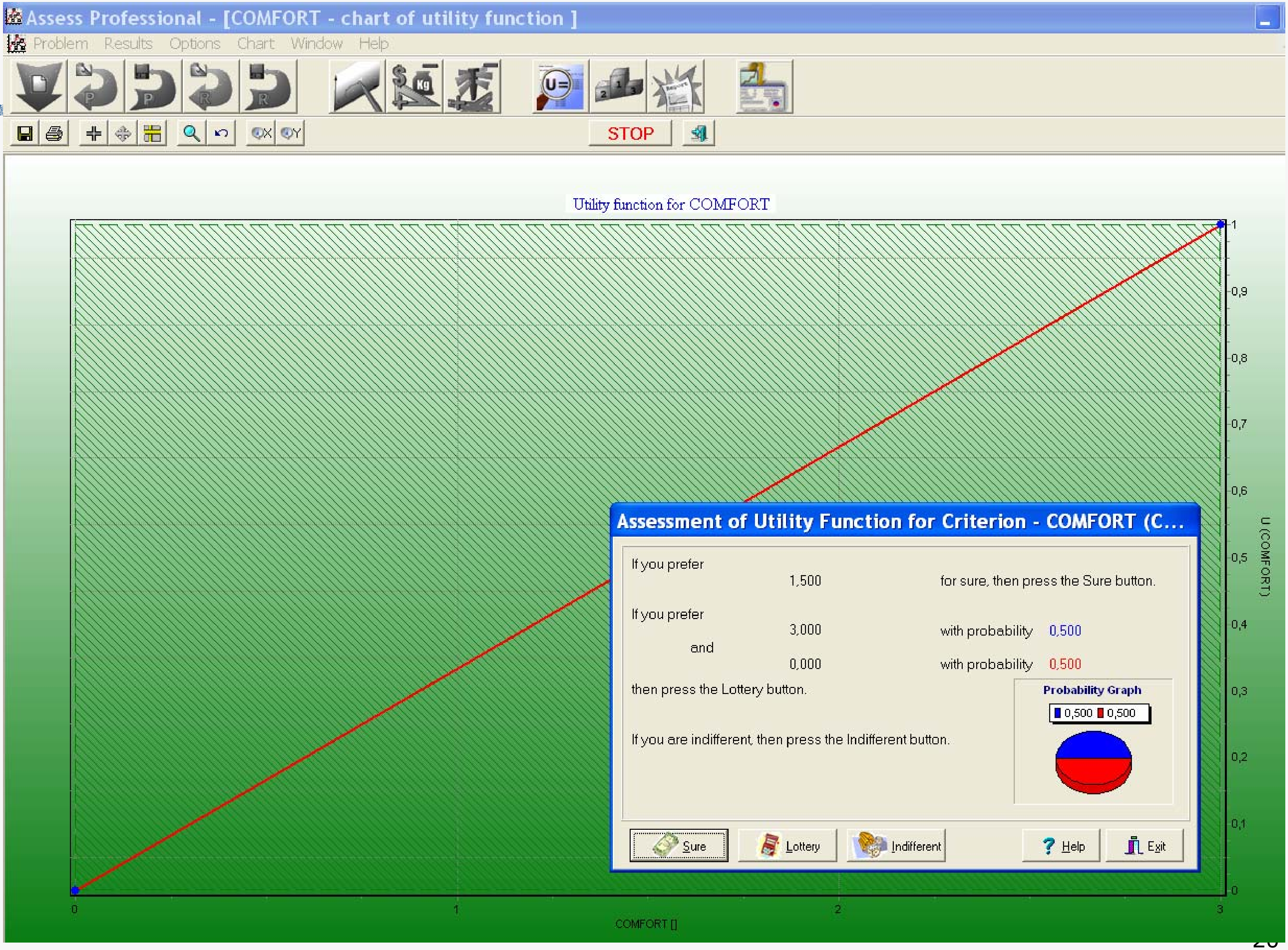
$$K$$

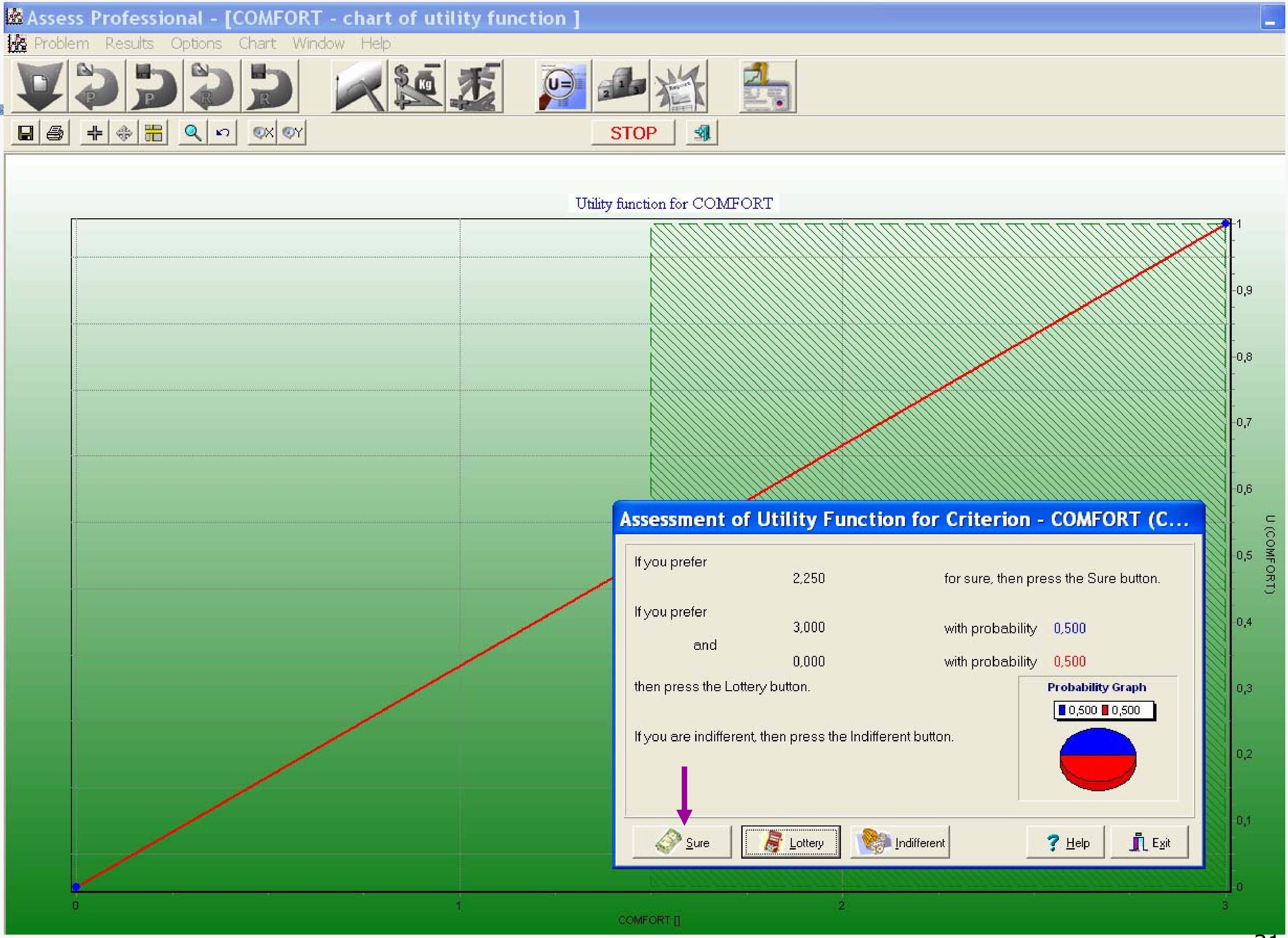
Przykład

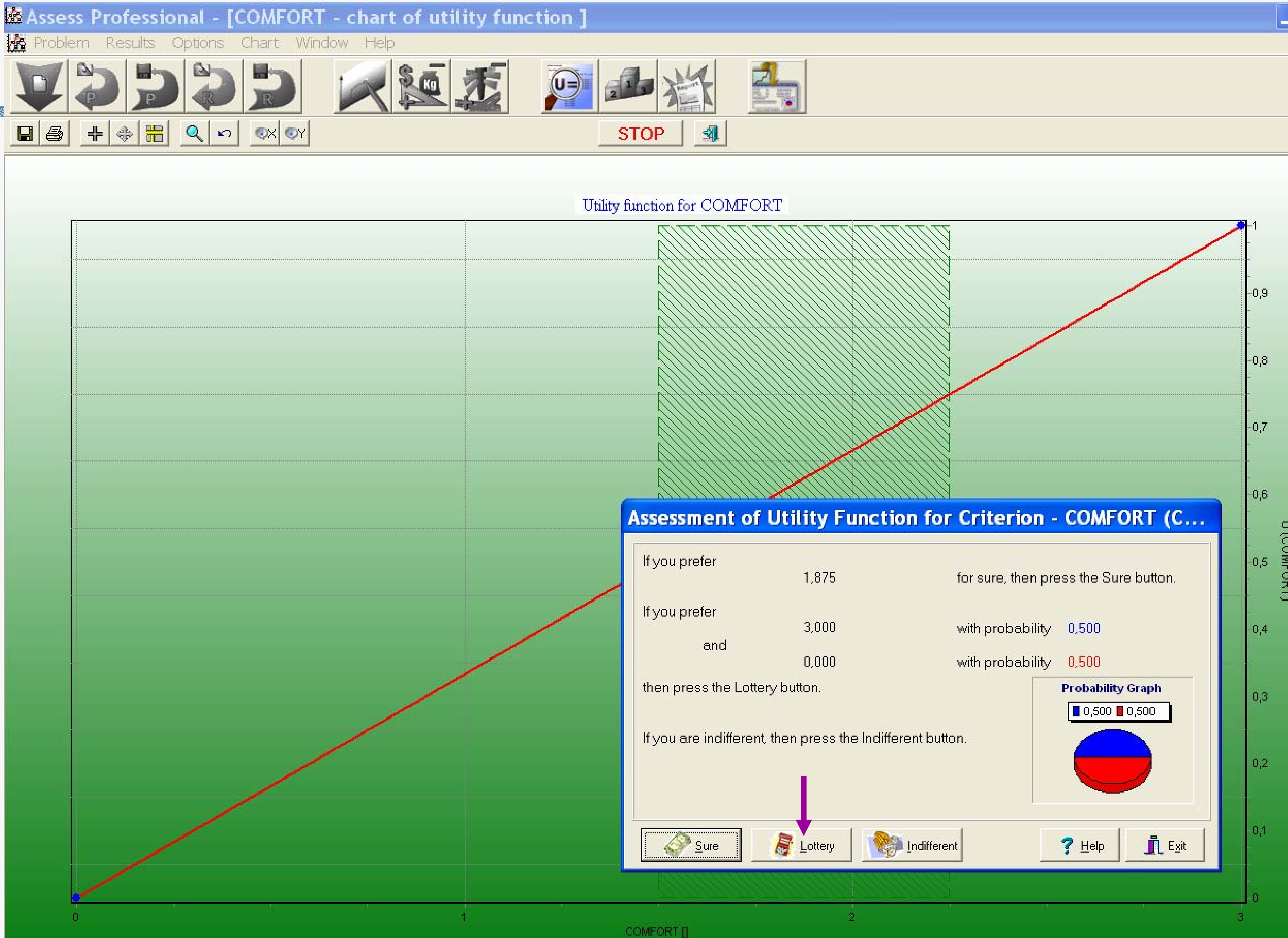
Alternatives

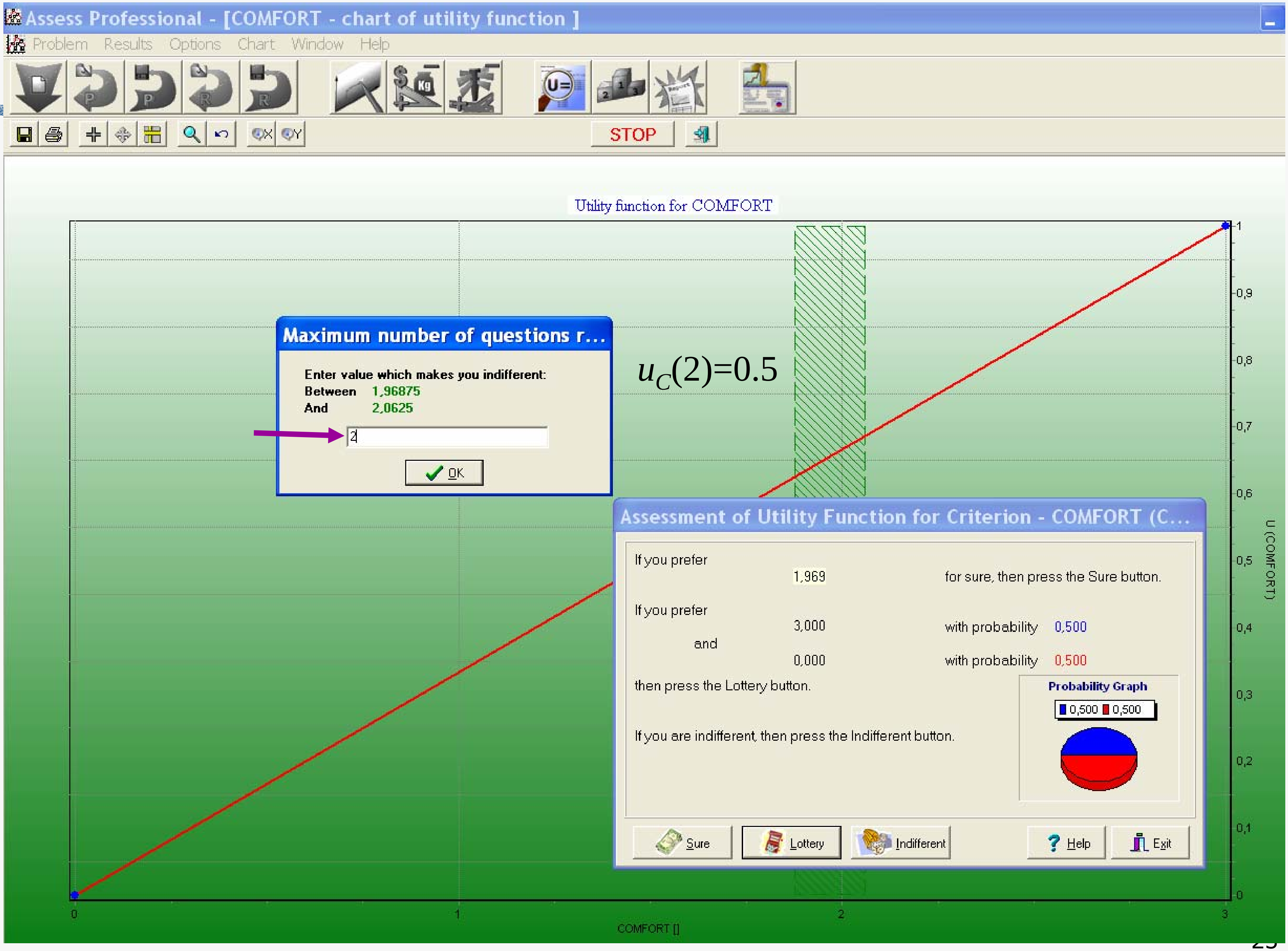
Name	Description	COMFORT	PRICE	TIME
RER		1	3	10
METRO 1		2	4	20
METRO 2		0	2	20
BUS		0	6	40
TAXI		3	30	30
SNCF		2	3	20

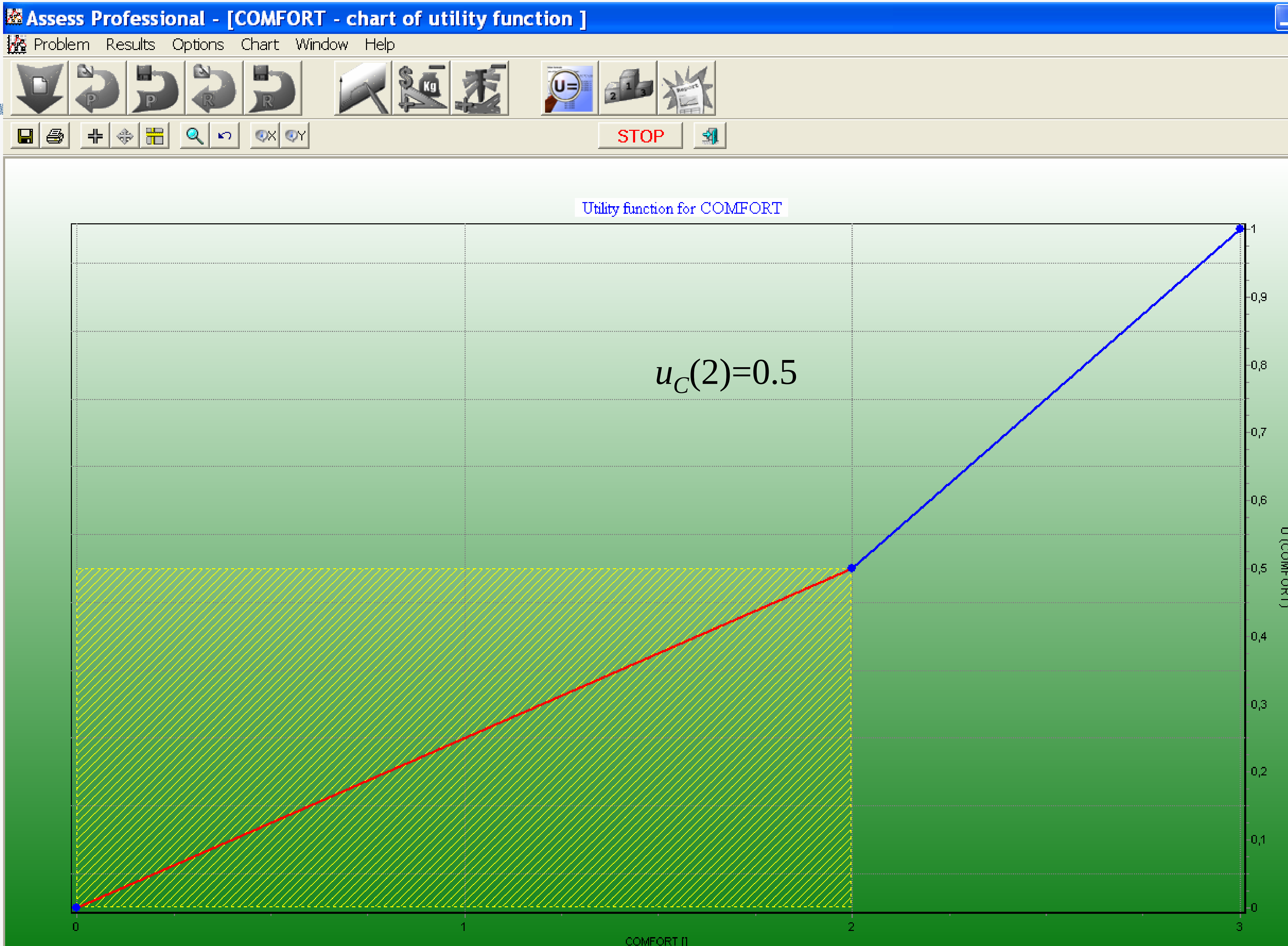
Press F5 to add new row or F6 to delete row


Assess Professional - [COMFORT - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for COMFORT
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
U (COMFORT)
0
1
2
3
COMFORT []
Assessment of Utility Function for Criterion - COMFORT (C...
If you prefer
1,500
for sure, then press the Sure button.
If you prefer
3,000
with probability 0,500
and
0,000
with probability 0,500
then press the Lottery button.
If you are indifferent, then press the Indifferent button.
Probability Graph
0,500 0,500
Sure
Lottery
Indifferent
Help
Exit

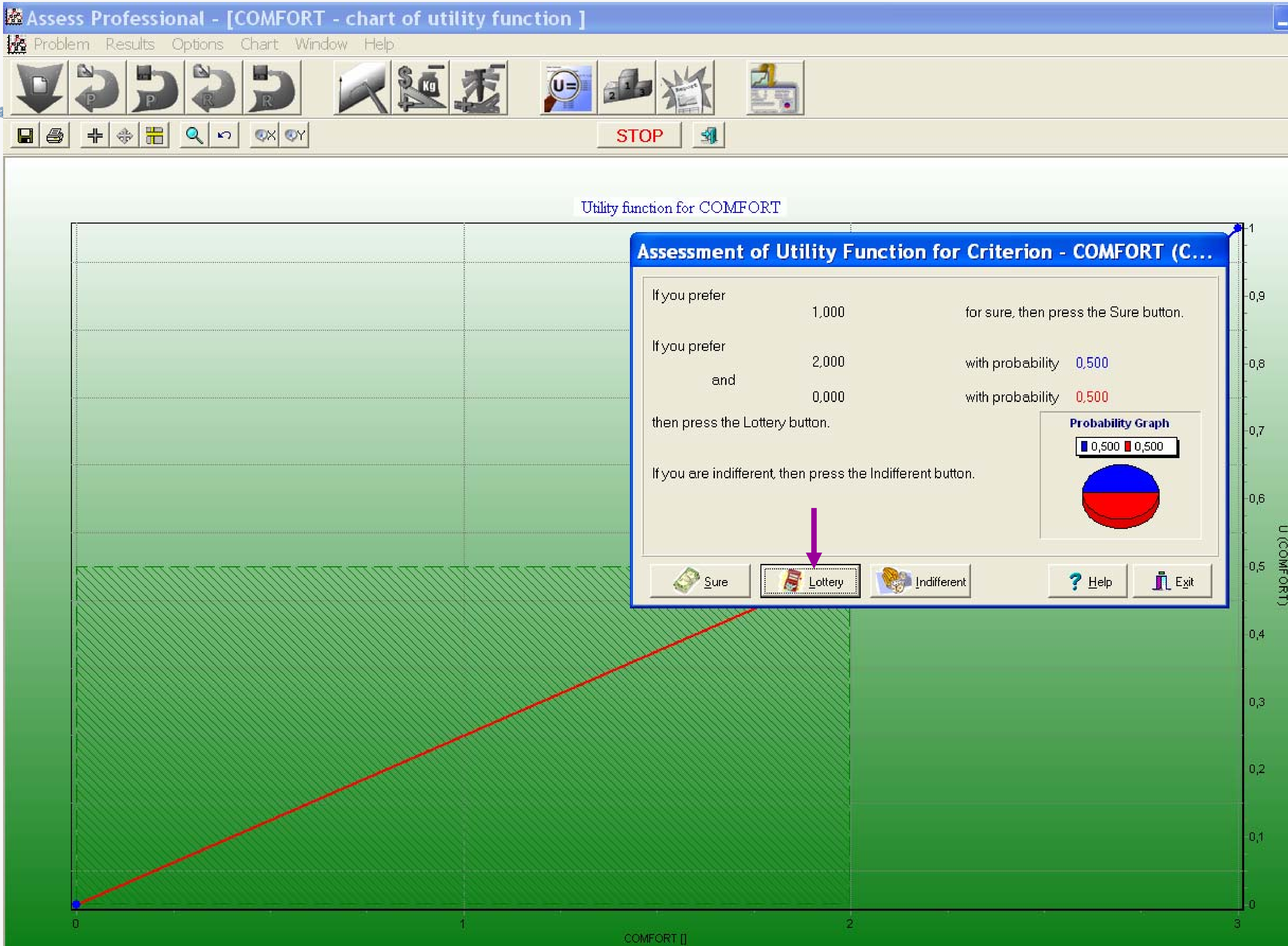

Assess Professional - [COMFORT - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for COMFORT
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
U (COMFORT)
0
1
2
3
COMFORT []
Assessment of Utility Function for Criterion - COMFORT (C...
If you prefer
2,250
for sure, then press the Sure button.
If you prefer
3,000
with probability 0,500
and
0,000
with probability 0,500
then press the Lottery button.
If you are indifferent, then press the Indifferent button.
Probability Graph
0,500 0,500
Sure
Lottery
Indifferent
Help
Exit

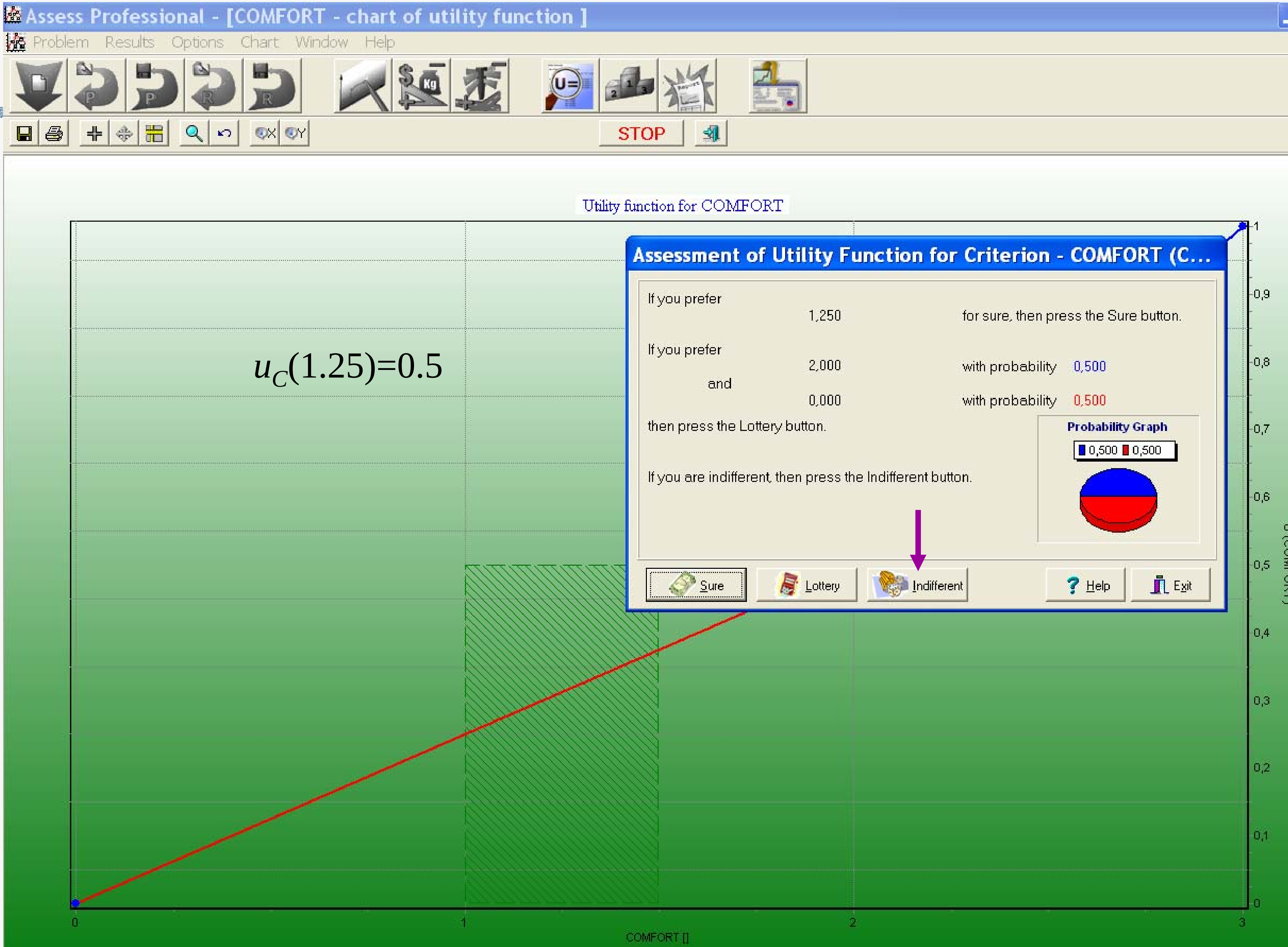

Assess Professional - [COMFORT - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for COMFORT
COMFORT []
U (COMFORT)
Assessment of Utility Function for Criterion - COMFORT (C...
If you prefer
1,875
for sure, then press the Sure button.
If you prefer
3,000
with probability 0,500
and
0,000
with probability 0,500
then press the Lottery button.
If you are indifferent, then press the Indifferent button.
Probability Graph
0,500 0,500
Sure
Lottery
Indifferent
Help
Exit


Assess Professional - [COMFORT - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for COMFORT
Maximum number of questions r...
Enter value which makes you indifferent:
Between 1,96875
And 2,0625
2
OK
$u_C(2)=0.5$
Assessment of Utility Function for Criterion - COMFORT (C...
If you prefer
1,969
for sure, then press the Sure button.
If you prefer
3,000
with probability 0,500
and
0,000
with probability 0,500
then press the Lottery button.
Probability Graph
0,500 0,500
If you are indifferent, then press the Indifferent button.
Sure
Lottery
Indifferent
Help
Exit
0
1
2
3
COMFORT []
U (COMFORT)
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

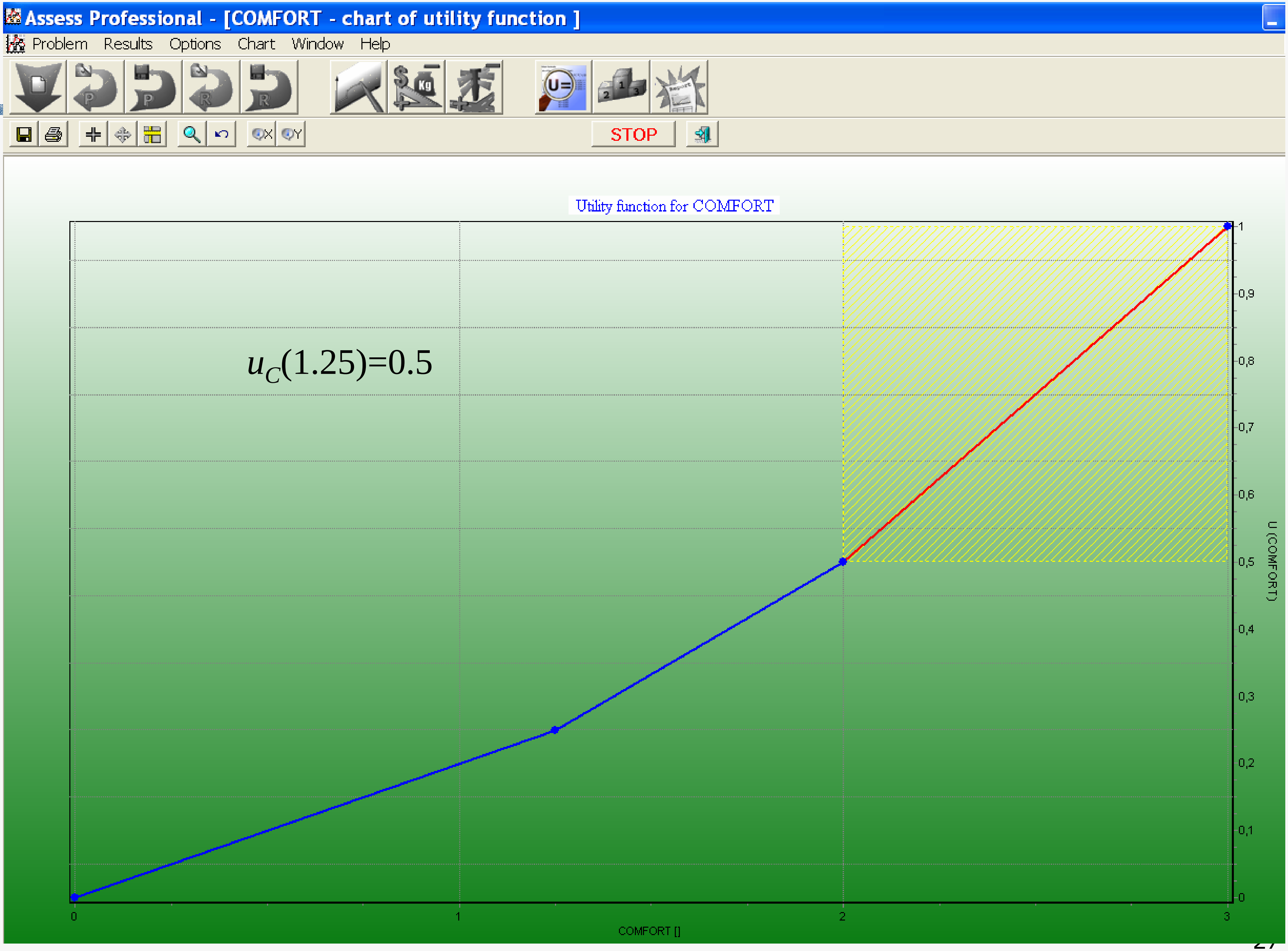


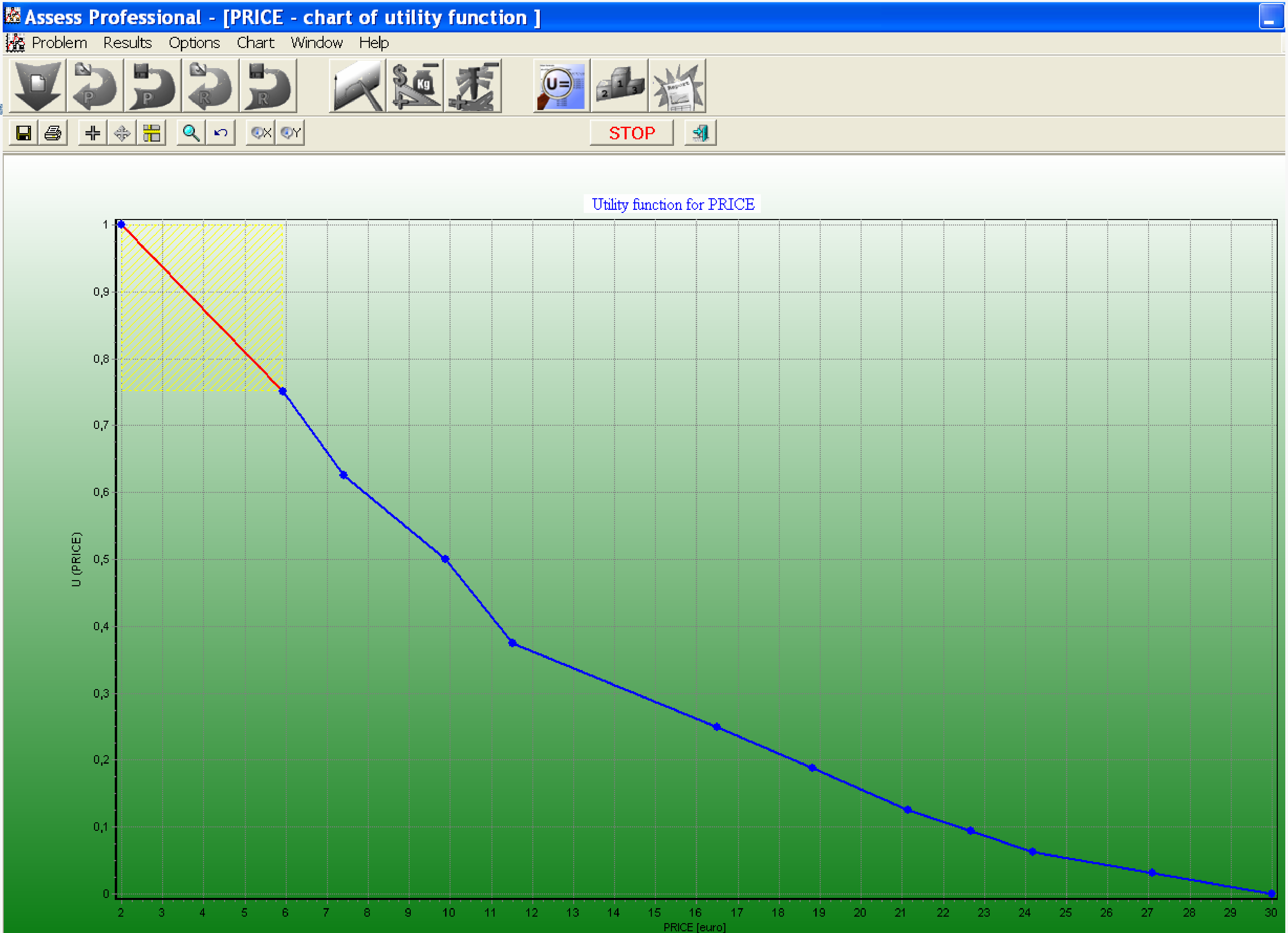
Assess Professional - [COMFORT - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for COMFORT
$u_C(2)=0.5$
0 1 2 3
COMFORT []
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1
U (COMFORT)

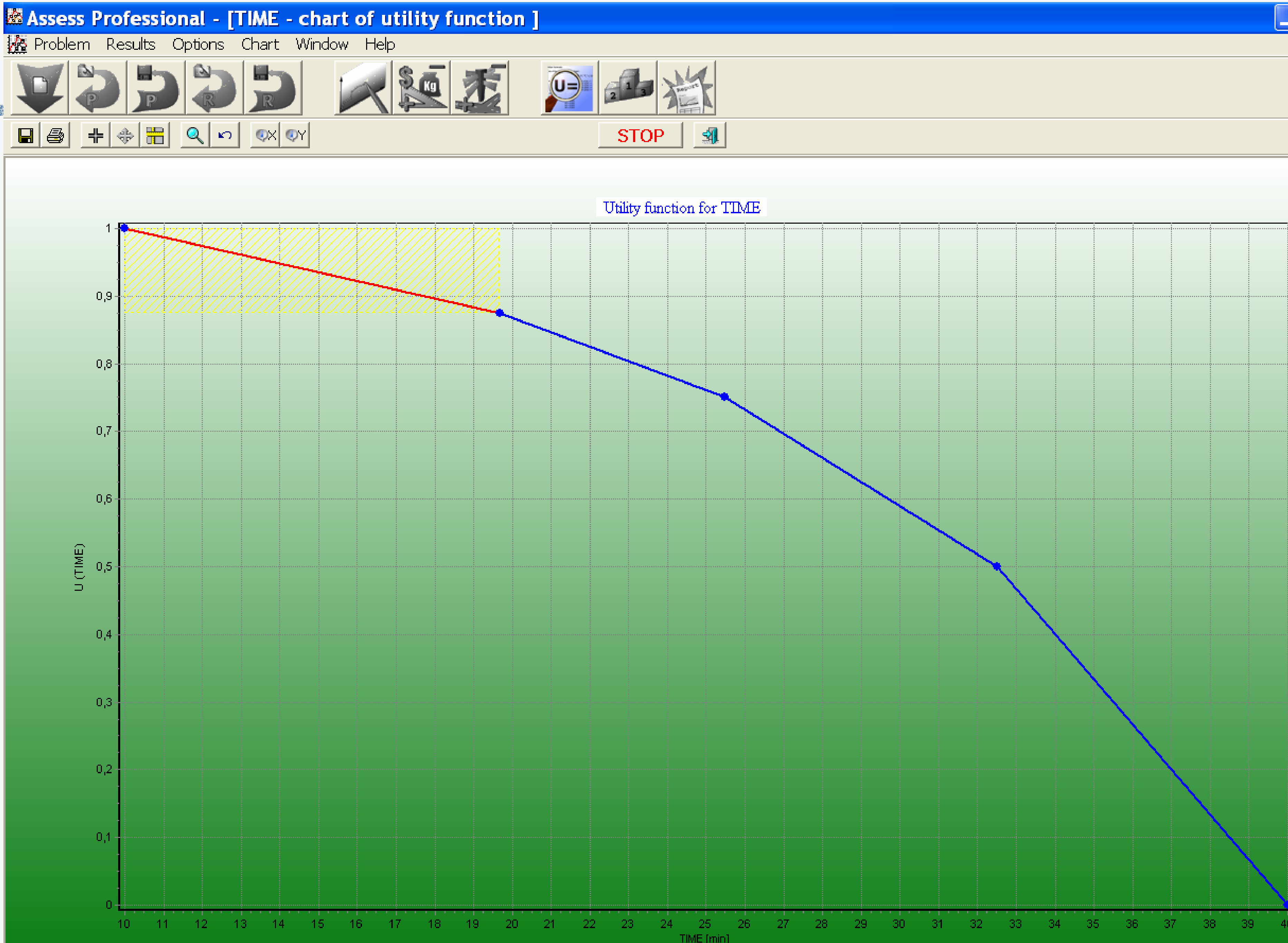

Assess Professional - [COMFORT - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for COMFORT
Assessment of Utility Function for Criterion - COMFORT (C...
If you prefer
1,000
for sure, then press the Sure button.
If you prefer
2,000
with probability 0,500
and
0,000
with probability 0,500
then press the Lottery button.
If you are indifferent, then press the Indifferent button.
Probability Graph
0,500 0,500
Sure
Lottery
Indifferent
Help
Exit
U (COMFORT)
COMFORT []

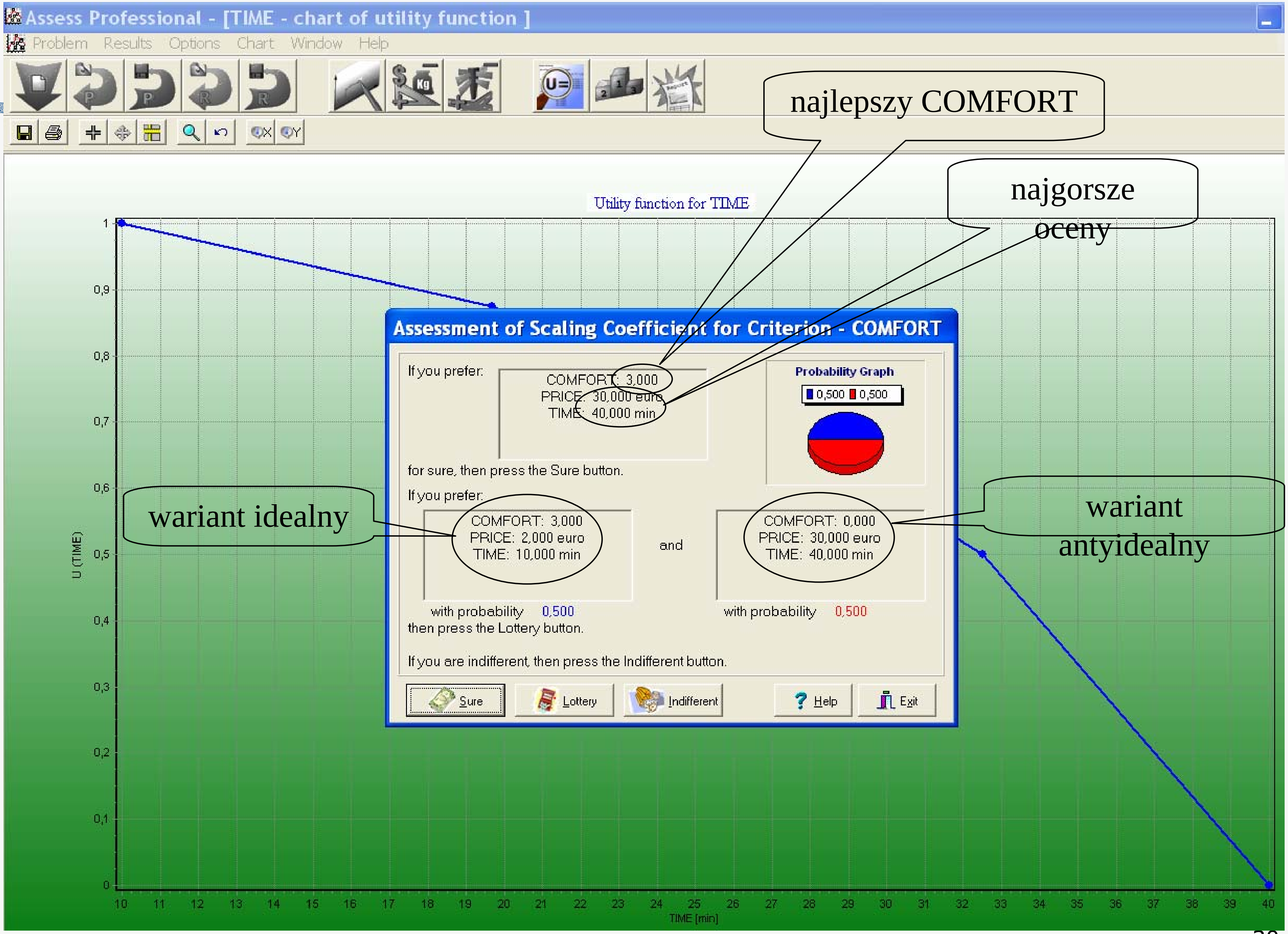


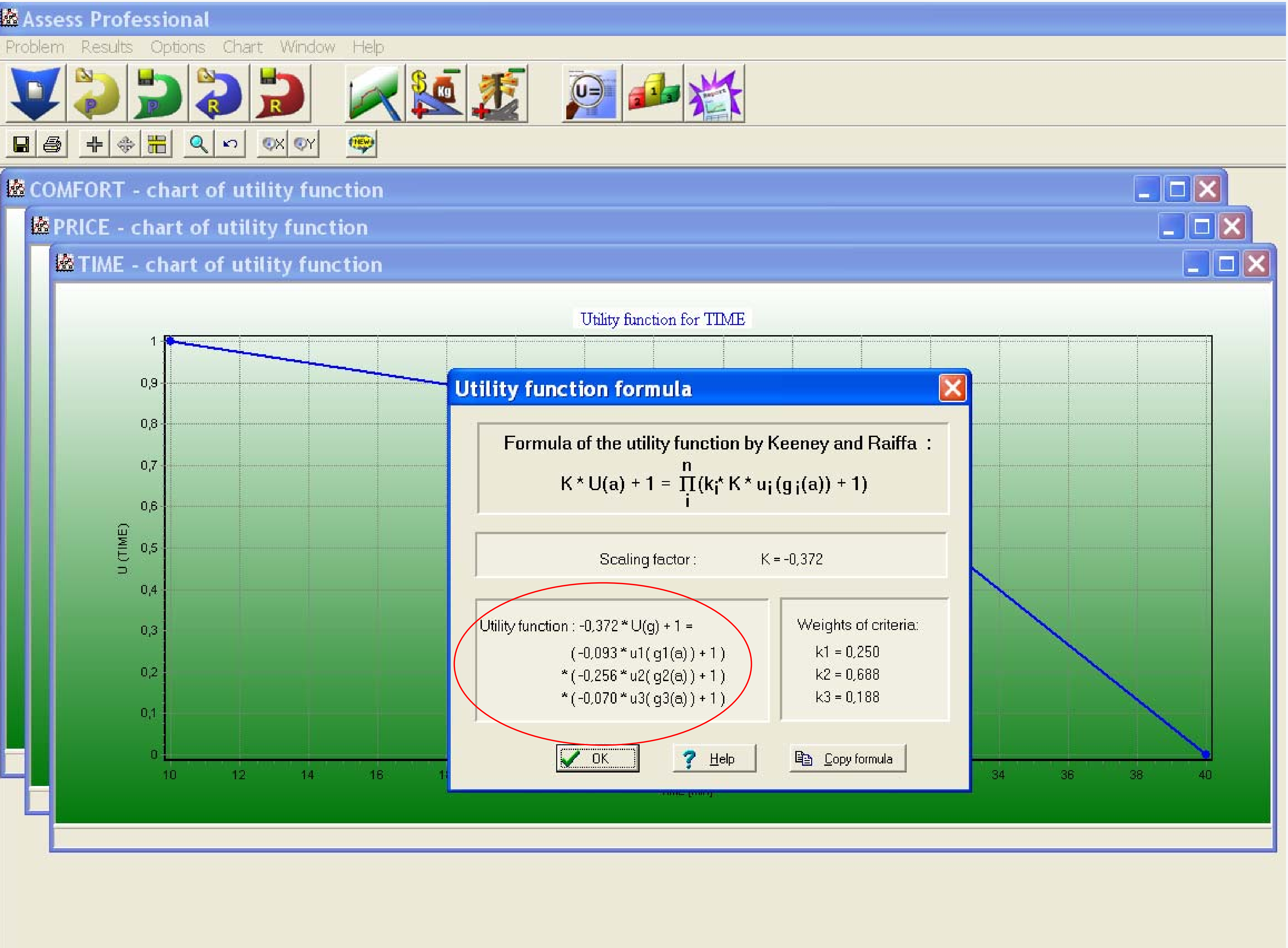
Assess Professional - [COMFORT - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for COMFORT
$u_C(1.25)=0.5$
Assessment of Utility Function for Criterion - COMFORT (C...
If you prefer
1,250
for sure, then press the Sure button.
If you prefer
2,000
with probability 0,500
and
0,000
with probability 0,500
then press the Lottery button.
If you are indifferent, then press the Indifferent button.
Probability Graph
0,500 0,500
Sure
Lottery
Indifferent
Help
Exit
COMFORT []
U (COMFORT)
0
1
2
3
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

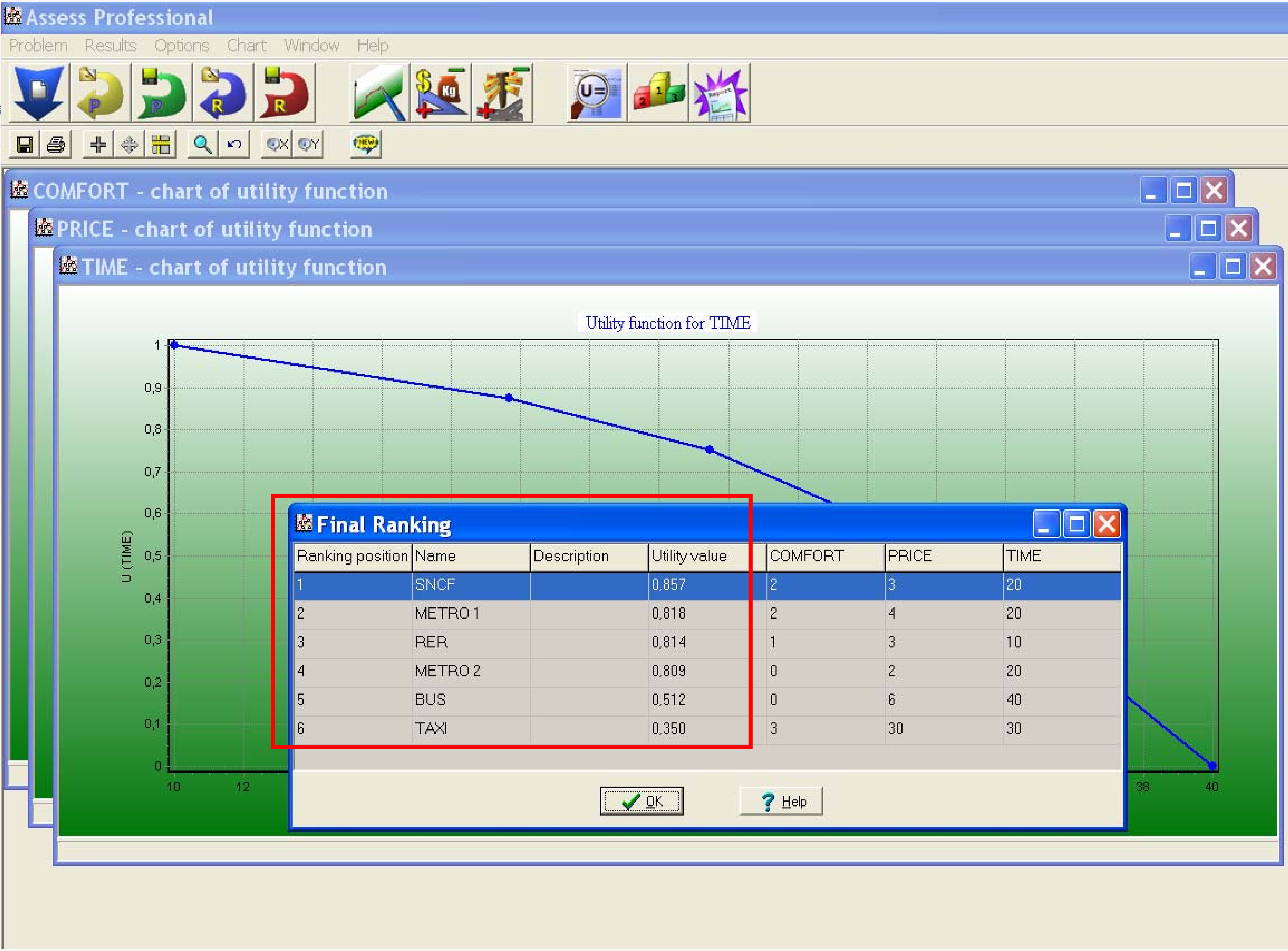

Assess Professional - [COMFORT - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for COMFORT
$u_C(1.25)=0.5$
0 1 2 3
COMFORT []
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1
U (COMFORT)


Assess Professional - [PRICE - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for PRICE
U (PRICE)
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
PRICE [euro]


Assess Professional - [TIME - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
STOP
Utility function for TIME
U (TIME)
TIME [min]
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40


Assess Professional - [TIME - chart of utility function]
Problem Results Options Chart Window Help
najlepszy COMFORT
najgorsze oceny
Utility function for TIME
Assessment of Scaling Coefficient for Criterion - COMFORT
If you prefer:
COMFORT: 3,000
PRICE: 30,000 euro
TIME: 40,000 min
for sure, then press the Sure button.
Probability Graph
0,500 0,500
If you prefer:
COMFORT: 3,000
PRICE: 2,000 euro
TIME: 10,000 min
and
COMFORT: 0,000
PRICE: 30,000 euro
TIME: 40,000 min
with probability 0,500
with probability 0,500
then press the Lottery button.
If you are indifferent, then press the Indifferent button.
Sure
Lottery
Indifferent
Help
Exit
wariant idealny
wariant antyidealny
U (TIME)
TIME [min]


Assess Professional
Problem Results Options Chart Window Help
COMFORT - chart of utility function
PRICE - chart of utility function
TIME - chart of utility function
Utility function for TIME
U (TIME)
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
10
12
14
16
34
36
38
40
Utility function formula
Formula of the utility function by Keeney and Raiffa :
K * U(a) + 1 = ∏(ki* K * ui (g i(a)) + 1)
n
i
Scaling factor : K = -0,372
Utility function : -0,372 * U(g) + 1 =
(-0,093 * u1(g1(a)) + 1)
* (-0,256 * u2(g2(a)) + 1)
* (-0,070 * u3(g3(a)) + 1)
Weights of criteria:
k1 = 0,250
k2 = 0,688
k3 = 0,188
OK
Help
Copy formula


Assess Professional
Problem Results Options Chart Window Help
COMFORT - chart of utility function
PRICE - chart of utility function
TIME - chart of utility function
Utility function for TIME
U (TIME)
Final Ranking

Ranking position	Name	Description	Utility value	COMFORT	PRICE	TIME
1	SNCF		0,857	2	3	20
2	METRO 1		0,818	2	4	20
3	RER		0,814	1	3	10
4	METRO 2		0,809	0	2	20
5	BUS		0,512	0	6	40
6	TAXI		0,350	3	30	30

OK
Help