Niesymetryczne problemy dualne #1

- Na podstawie danych problemu PL można zdefiniować pewien inny, związany z nim problem, zwany ogólnie <u>problemem dualnym</u>
  - dla jasności problem oryginalny będzie nazywany odtąd formalnie problemem prymalnym
- Klasyfikacja problemów dualnych
  - niesymetryczne
  - symetryczne
- Problemy dualne się definiuje, ponieważ istnieje wiele interesujących właściwości wspólnych dla obu problemów (tzn. dla problemu prymalnego i dualnego)
  - właściwości te często pozwalają na uproszczenie/przyspieszenie obliczeń służących rozwiązywaniu oryginalnego problemu

Niesymetryczne problemy dualne #2

- Zapis macierzowy problemów: prymalnego oraz odpowiadającego mu niesymetrycznego problemu dualnego

<u>Prymalny</u>:

max $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

p.o. $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$

$\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$

<u>Dualny</u>:

min $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$

p.o. $\mathbf{A}^T\mathbf{y}\geq\mathbf{c}$

Niesymetryczne problemy dualne #2

- Uwagi:
  - problem prymalny jest w postaci standardowej typu ‘max’
  - odpowiadający mu niesymetryczny problem dualny jest postaci charakterystycznej dla niesymetrycznych problemów dualnych
  - zmienne w problemie dualnym są innymi zmiennymi niż zmienne w prymalnym
  - zmienne te mogłyby nazywać się tak samo ale aby uniknąć nieporozumień zmienne prymalne problemów w postaci klasycznej typu ‘max’ będą zawsze oznaczane przez ‘x’ a zmienne problemu do nich dualnych – przez ‘y’

Niesymetryczne problemy dualne #3

- Transformacja problemu z postaci prymalnej do dualnej odbywa się zgodnie z szeregiem z góry ustalonych zasad, a konkretnie:
  - przede wszystkim prymalny musi mieć konkretną postać:
    - jest to postać standardowa typu ‘max’
  - zasady przekształcenia są wtedy następujące:
    - kierunek optymalizacji zostaje zmieniony z ‘max’ na ‘min’
    - współczynniki prawych stron ograniczeń stają się współczynnikami funkcji celu
    - współczynniki funkcji celu stają się współczynnikami prawych stron ograniczeń
    - ograniczenia równościowe zostają zamienione na ograniczenia nierównościowe typu ≥
    - pomija się ograniczenia na nieujemność zmiennych

Niesymetryczne problemy dualne #4

- Niesymetryczne problemy dualne – dalsze uwagi:
  - w definicji niesymetrycznego problemu dualnego nie występują ograniczenia na nieujemność zmiennych – wynikowy problem nie ma więc żadnej z typowych postaci problemu liniowego (choć jest w ogólności problemem programowania liniowego)
  - niesymetryczne problemy dualne są bardzo ogólne, definiuje się je także dla:
    - ogólniejszych sformułowań problemów PL (np. sformułowań, w których na pewne zmienne nakłada się ograniczenia na nieujemność, na inne – ograniczenia na niedodatniość, itp.)
    - nieliniowych problemów programowania

Symetryczne problemy dualne #1

- Geneza symetrycznych problemów dualnych
  - jeżeli problem prymalny występuje w postaci klasycznej typu ‘max’ to odpowiadający mu niesymetryczny problem dualny także występuje w postaci klasycznej (ale w wersji typu ‘min’)
    - oznacza to w szczególności, że w problemie dualnym pojawią się – niejako automatycznie – ograniczenia na nieujemność zmiennych
  - w tej sytuacji dochodzi do zamiany problemu z postaci klasycznej do innego problem w postaci klasycznej
    - fakt ten doprowadził do wyróżnienia podgrupy problemów dualnych zwanych symetrycznymi problemami dualnymi

Symetryczne problemy dualne #2

- Symetria pomiędzy problemami prymalnym i dualnym ma dalsze konsekwencje, a mianowicie takie, że:
  - jeżeli pewien problem prymalny w postaci klasycznej przekształci się do problemu dualnego, to powstanie inny problem w postaci klasycznej (co oznacza, że także dla niego można znaleźć problem dualny)
  - jeżeli wynikowy problem dualny potraktuje się jako prymalny i przekształci go do postaci dualnej, to powstanie problem oryginalny (w tej sytuacji zwany dualnym)
- W ogólności oznacza to, że każdy problem w postaci klasycznej można nazwać jednocześnie:
  - prymalnym, ponieważ istnieje problem do niego dualny
  - dualnym, ponieważ istnieje problem prymalny względem niego

Symetryczne problemy dualne #3

- Problem prymalny w postaci klasycznej i odpowiadający mu symetryczny problem dualny

Prymalny (klasyczna ‘max’)		Prymalny (standardowa ‘max’)		Dualny (postać ‘dualna’)
max $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$		max $[\ \mathbf{c}^T\ \mathbf{0}^T\ ][\ \mathbf{x};\ \mathbf{x}^o\ ]$		min $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$
p.o. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$	$\Rightarrow$	p.o. $[\ \mathbf{A}\ \mathbf{I}\ ][\ \mathbf{x};\ \mathbf{x}^o\ ] = \mathbf{b}$	$\Rightarrow$	p.o. $[\ \mathbf{A}\ \mathbf{I}\ ]^T\mathbf{y} \geq [\ \mathbf{c}^T\ \mathbf{0}^T\ ]$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$		$\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\ \mathbf{x}^o\geq\mathbf{0}$		

  – dalsze przekształcenia problemu dualnego

Dualny (postać ‘dualna’)		Dualny (postać ‘dualna’)		Dualny (klasyczna ‘min’)
min $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$		min $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$		min $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$
p.o. $[\ \mathbf{A}\ \mathbf{I}\ ]^T\mathbf{y} \geq [\ \mathbf{c};\ \mathbf{0}\ ]$	$\Rightarrow$	p.o. $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$	$\Rightarrow$	p.o. $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
		$\mathbf{I}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$		$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Symetryczne problemy dualne #4

- Przekształcenia problemów symetrycznych:
  - ‘max’ na ‘min’

Prymalny		Dualny
max $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$		min $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$
p.o. $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$	$\Rightarrow$	p.o. $\mathbf{A}^T\mathbf{y}\geq\mathbf{c}$
$\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$		$\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$

  - ‘min’ na ‘max’

Prymalny		Dualny
min $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$		max $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$
p.o. $\mathbf{Ax}\geq\mathbf{b}$	$\Rightarrow$	p.o. $\mathbf{A}^T\mathbf{y}\leq\mathbf{c}$
$\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$		$\mathbf{y}\geq\mathbf{0}$

Symetryczne problemy dualne #5

- Pomimo dwóch rodzajów przekształceń (‘max’ $\Rightarrow$ ‘min’ oraz ‘max’ $\Rightarrow$ ‘min’) zasady przekształcenia (dzięki jego symetrii) mają jedną formę:
  - kierunek optymalizacji zostaje zamieniony na odwrotny
  - współczynniki prawych stron ograniczeń i współczynników ulegają wzajemnej wymianie
  - macierz lewych stron ograniczeń ulega transpozycji
  - kierunek ograniczeń nierównościowych zostaje zamieniony na odwrotny
    - pomiędzy ograniczeniami a zmiennymi problemów wzajemnie dualnych zachodzi następująca zależność: każdemu ograniczeniu jednego problemu odpowiada zmienna drugiego problemu