Programowanie ilorazowe #1

- Problem programowania ilorazowego (PI) jest przykładem problemu programowania matematycznego nieliniowego, który można skutecznie zlinearyzować, tzn. zapisać (i rozwiązać) jako problem programowania liniowego

Programowanie ilorazowe #2

- Ogólna postać problemów PI:

$$\min / \max \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0}{\mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0}$$

p.o.: $\mathbf{A}\mathbf{x}$ {≤, ≥, =} $\mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

- cechy problemu:
  - kierunek optymalizacji w funkcji celu: minimalizacja lub maksymalizacja
  - funkcja celu jest ilorazem dwóch wyrażeń liniowych $\mathbf{c}^T\mathbf{x}+c_0$ oraz $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0$ i nosi nazwę (a z nią cały problem) ilorazowej lub hiperbolicznej
  - wartość funkcji celu jest określona tylko dla tych **x**, dla których $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0 \neq 0$, przyjmujemy jednak dodatkowo, że $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0>0$

Programowanie ilorazowe #3

- Linearyzacja problemów PI:
  - problemy PI należą do grupy problemów programowania matematycznego nieliniowego, który można skutecznie zlinearyzować
    - zlinearyzować czyli zapisać (i rozwiązać) jako problem programowania liniowego, którego rozwiązanie będzie jednocześnie rozwiązaniem problemu nieliniowego (lub rozwiązaniem, na podstawie którego można jednoznacznie odczytać rozwiązanie problemu liniowego)
  - linearyzacja problemu PI została podana przez Charnes'a i Cooper'a
  - linearyzacja ta polega na wprowadzeniu nowych zmiennych (co jest realizowane przez podstawienie)

Programowanie ilorazowe #4

- Linearyzacja problemów PI:
  - załóżmy, że funkcja celu pewnego konkretnego problemu ilorazowego ma być maksymalizowana
    - w obliczu obowiązującego założenia, że $\mathbf{d}^T\mathbf{u}+d_0>0$ wiadomo, iż zwiększanie wartości bezwzględnej ilorazowej funkcji celu może być osiągane poprzez:
      - zwiększanie wartości bezwzględnej funkcji $\mathbf{c}^T\mathbf{x}+c_0$
      - zmniejszanie wartości funkcji $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0$
    - niestety, funkcje te (pomijając trywialne przypadki) trudno jest jednocześnie kontrolować, w rezultacie czego zwiększanie wartości funkcji $\mathbf{c}^T\mathbf{x}+c_0$ często prowadzi do jednoczesnego zwiększania się wartości funkcji $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0$ (i tym samym nie zmienia zasadniczo wartości funkcji ilorazowej)
  - powstaje problem „całościowego” kontrolowania wartości ilorazowej

Programowanie ilorazowe #5

- Linearyzacja problemów PI:
  - problem „całościowego” kontrolowania wartości ilorazowej
    - pewnym rozwiązaniem tego problemu byłoby „ustalenie” wartości funkcji $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0$, dzięki czemu cała kontrola wartości ilorazu sprowadziłaby się do kontrolowania wartości funkcji $\mathbf{c}^T\mathbf{x}+c_0$
    - „ustalenie” takie można zrealizować przyjmując na przykład, że $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0=1$ (warunek ten jest to zgodny z założeniem $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0>0$)
      - w praktyce oznaczałoby to dodanie ograniczenia: $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0=1$
      - rozwiązanie takie ograniczyłoby jednak dopuszczalne wektory $\mathbf{x}$ do tylko takich, które spełniają $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0=1$, i ostatecznie otrzymane rozwiązanie nie byłoby w ogólności rozwiązaniem optymalnym oryginalnego problemu

Programowanie ilorazowe #6

- Linearyzacja problemów PI:
  - problem „całościowego” kontrolowania wartości ilorazowej
    - pewnym rozwiązaniem tego problemu byłoby „ustalenie” wartości funkcji $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0$, dzięki czemu cała kontrola wartości ilorazu sprowadziłaby się do kontrolowania wartości funkcji $\mathbf{c}^T\mathbf{x}+c_0$
    - można to zrealizować przyjmując na przykład, że $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0=1$ (ograniczenie to jest to zgodne z założeniem $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0>0$)
    - rozwiązanie takie ograniczyłoby jednak dopuszczalne wektory $\mathbf{x}$ do tylko takich, które spełniają $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0=1$, i ostatecznie otrzymane rozwiązanie nie byłoby w ogólności rozwiązaniem optymalnym oryginalnego problemu
      - wynika z tego, że to konkretne rozwiązanie nie jest właściwe, ale metoda (doprowadzania mianownika do wartości stałej) jest właściwa
      - gdyby więc udało się zaproponować jakieś zadanie równoważne oryginalnemu, w którym wartość mianownika byłaby ustalona, to problem kontrolowania funkcji ilorazowej byłby rozwiązany

Programowanie ilorazowe #7

- Linearyzacja problemów PI:
  - okazuje się, że rozwiązanie znajdujemy dzięki podstawieniu:

dla każdego j: $u_j = \dfrac{x_j}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0}$

oraz dodatkowo $u_0 = \dfrac{1}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0}$

- z faktu, że $\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0>0$ wynika, że $u_0>0$, wobec czego możliwe jest obliczenie wartości wyrażenia u_j/u_0:

$$u_j/u_0 = \frac{x_j}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0} \cdot \frac{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0}{1} = x_j$$

(wyrażenie to pozwala na otworzenie wartości zmiennych x_j na podstawie wartości zmiennych u_j)

Programowanie ilorazowe #8

- Linearyzacja problemów PI:
  - funkcja celu przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}+c_0}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}=\frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}+\frac{c_0}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}=\mathbf{c}^T\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}+c_0\frac{1}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}=\mathbf{c}^T\mathbf{u}+c_0\cdot u_0$$

  - jak więc widać, ilorazowa funkcja celu została wyrażona w kategoriach nowych zmiennych, przy czym (co jest istotne!) przyjęła ona postać zwykłej funkcji liniowej
  - jest to zgodne z metodą „ustalania” mianownika funkcji ilorazowej, ponieważ mianownik ten, po wyrażeniu go w kategoriach nowych zmiennych przyjmuje postać: $\mathbf{du}+d_0\cdot u_0$ i spełnia:

$$\mathbf{du}+d_0\cdot u_0=\frac{\mathbf{d}^T\mathbf{x}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}+\frac{d_0}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}=\frac{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+d_0}=1$$

Programowanie ilorazowe #9

- Linearyzacja problemów PI:
  - jednocześnie ograniczenia typu '=' przyjmują postać:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{Ax}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0} = \mathbf{b}\frac{1}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0} \Leftrightarrow \mathbf{Au} = \mathbf{b} \cdot u_0$$

    - identycznie dla ograniczeń typu '$\leq$' oraz '$\geq$':

  - ostatecznie wszystkie ograniczenia można je zapisać jako:

    Au–**b**$\cdot u_0$ {$\leq$, $\geq$, **=**} **0**

Programowanie ilorazowe #10

- Linearyzacja problemów PI:
  - całość problemu wyrażonego w kategoriach nowych zmiennych przedstawia się ostatecznie następująco:

    min/max $\mathbf{c}^T\mathbf{u}+c_0 \cdot u_0$

    p.o.: $\mathbf{d}^T\mathbf{u}+d_0 \cdot u_0 = 1$

    $\mathbf{Au}-\mathbf{b} \cdot u_0 \ \{\leq, \geq, =\} \ \mathbf{0}$

    $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

    $u_0 > 0$
  - powyższy problem nie jest jednak problemem liniowym, a to ze względu na ograniczenie '$u_0 > 0$' (ograniczenia tego typu nie są dopuszczalne w problemach liniowych)

Programowanie ilorazowe #11

- Linearyzacja problemów PI:
  - dlatego wprowadza się pewne uproszczenie i zastępuje ograniczenie '$u_0 > 0$' ograniczeniem dopuszczalnym w problemach liniowych, czyli ograniczeniem: '$u_0 \geq 0$'
  - w rezultacie powstaje problem liniowy:

    min/max $\mathbf{c}^T\mathbf{u}+c_0 \cdot u_0$

    p.o.: $\mathbf{d}^T\mathbf{u}+d_0 \cdot u_0 = 1$

    $\mathbf{Au}-\mathbf{b} \cdot u_0 \{\leq, \geq, =\} \mathbf{0}$

    $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

    $u_0 \geq 0$
  - powyższy problem jest zlinearyzowaną wersją problemu ilorazowego, czyli takim problemem liniowym, z którego rozwiązania można odczytać rozwiązanie problemu ilorazowego

Programowanie ilorazowe #12

- Linearyzacja problemów PI:
  - rozwiązanie oryginalnego problemu ilorazowego realizuje się więc następująco:

1. Przekształca się problem ilorazowy do postaci zlinearyzowanej
2. Rozwiązuje się postać zlinearyzowaną
3. Jeżeli po rozwiązaniu problemu zlinearyzowanego zachodzi $u_0>0$ to odtwarza się rozwiązanie problemu ilorazowego wykorzystując zależność:

$$x_j = \frac{x_j}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0} \cdot \frac{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + d_0}{1} = \frac{u_j}{u_0}$$