Automatyczne dowodzenie twierdzeń

Sztuczna inteligencja

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP 1/1

Operacje w programie Logic Theorist

Podstawienie zmiennych: w każdym twierdzeniu, o którym wiemy, że jest prawdziwe można podstawić za zmienną dowolne wyrażenie w każdym wystąpieniu tej zmiennej.

np. w wyrażeniu $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ podstawiamy $\neg A$ za B
$(\neg A \vee \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg A)$ (*)

Zastąpienie: operator działania można zastąpić wyrażeniem równoważnym lub jego definicją.

np. w wyrażeniu $(\neg A \vee \neg A) \Rightarrow \neg A$ zastępujemy operator $\vee$ jego definicją (*)
$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$

Modus ponens (reguła odrywania):

$$\frac{[(A \Rightarrow B) \wedge A]}{B}$$

Sztuczna inteligencja

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP 2

Algorytm:

1. Wykonanie wszystkich możliwych podstawień do bieżącego celu.
2. Zastosowanie wszystkich możliwych zastąpień i oderwań do bieżącego celu i sprawdzenie wyników za pomocą podstawień; jeżeli nie doprowadzi to do dowodu, dopisanie wyników do listy podcelów.
3. Zastosowanie reguły łańcucha

$$\frac{a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c}{a \Rightarrow c}$$

4. Jeżeli żadne z powyższych działań nie doprowadziło do dowodu, to jako bieżący cel przyjmij kolejny nie rozważany dotąd element z listy podcelów.
5. Zakończ jeżeli: znaleziono dowód lub lista podcelów jest pusta lub czas i pamięć zostały wyczerpane.

Sztuczna inteligencja

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP 3

Przykład

Teoria:	
Każdy człowiek umrze.	człowiek(X) $\Rightarrow$ umrzeć(X)
Sokrates jest filozofem.	filozof(sokrates)
Każdy filozof jest człowiekiem.	filozof(Y) $\Rightarrow$ człowiek(Y) m
Teza:	
Sokrates umrze.	umrzeć(sokrates)

Sztuczna inteligencja

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP 4

Teoria:
(A1) człowiek(X) $\Rightarrow$ umrzeć(X)
(A2) filozof(sokrates)
(A3) filozof(Y) $\Rightarrow$ człowiek(Y)

Teza:
(T) umrzeć(sokrates)

Dowód:

1. Postawiamy sokrates/X w A1 i sokrates/Y w A3

   (A1') człowiek(sokrates) $\Rightarrow$ umrzeć(sokrates)
   (A3') filozof(sokrates) $\Rightarrow$ człowiek(sokrates)

2. Na podstawie reguły odrywania (w tył):

$$\frac{\text{umrzeć(sokrates), człowiek(sokrates)} \Rightarrow \text{umrzeć(sokrates)}}{\boxed{\text{człowiek(sokrates)}}}$$

$$\frac{\text{człowiek(sokrates), filozof(sokrates)} \Rightarrow \text{człowiek(sokrates)}}{\boxed{\text{filozof(sokrates)}}}$$

3. Dopasowanie do aksjomatu A2

Sztuczna inteligencja

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP 5

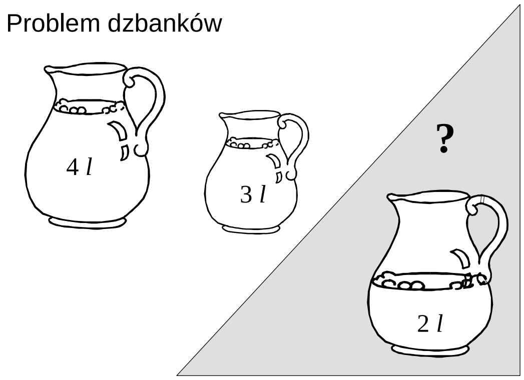
1963 - General problem solver

- wykorzystuje metodę means-ends, która powstała na podstawie obserwacji sposobu rozwiązywania problemów przez człowieka (psychologia)
- podstawowe pojęcia: różnice i operatory
- operator jest opisany przez: warunki początkowe, funkcję transformacji i redukowane różnice
- na każdym etapie rozwiązywania problemu formułuje się różnicę między stanem bieżącym a celem
- następnie poszukuje się operatora, który można zastosować do zredukowania zaobserwowanej różnicy
- jeżeli warunki początkowe operatora nie są spełnione, to zapisuje się je na listę podcelów i przechodzi się do następnego z listy podcelów

Sztuczna inteligencja

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP 6

Problem dzbanków



Sztuczna inteligencja

 7

Means-ends

X - ilość wody w dużym dzbanku, X ∈ {0, 1, 2, 3, 4}

y - ilość wody w małym dzbanku y ∈ {0, 1, 2, 3}

stan zadania: (X, y)

stan początkowy: (4, 3)

cel: (2, y)

Sztuczna inteligencja

 8

Tablica operatory-różnice

	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3
0,0	0,0			0,3													4,0			
0,1	0,-1	0,0		0,2	1,-1													4,0		
0,2	0,-2		0,0	0,1					2,-2										4,0	
0,3	0,-3			0,0									3,-3							4,0
1,0	-1,0	-1,1			0,0			0,3												
1,1		-1,0	-1,1		0,-1	0,0		0,2	1,-1									3,0		
1,2			-1,0	-1,1	0,-2		0,0	0,1					2,-2						3,0	
1,3				-1,0	0,-3			0,0									-3,3			3,0
2,0	-2,0		-2,2						0,0			0,3					2,0			
2,1		-2,0		-2,2						0,0		0,2	1,-1					2,0		
2,2			-2,0						0,-2		0,0	0,1							2,0	
2,3				-2,0					0,-3			0,0						2,-2		
3,0	-3,0			-3,3									0,0			0,3	1,0			
3,1		-3,0											0,-1	0,0		0,1		1,0		
3,2			-3,0									-1,1	0,-2		0,0	0,1			1,0	
3,3				-3,0									0,-3			0,0			1,-1	1,0
4,0	-4,0							-3,3									0,0			0,3
4,1		-4,0										-2,2					0,-1	0,0		0,2
4,2			-4,0													-1,1	0,-2		0,0	0,1
4,3				-4,0													0,-3			0,0

Tablica operatory-różnice

	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3
0,0	0,0			0,3													4,0			
0,1	0,-1	0,0		0,2	1,-1													4,0		
0,2	0,-2		0,0	0,1					2,-2										4,0	
0,3	0,-3			0,0									3,-3							4,0
1,0	-1,0	-1,1			0,0			0,3												
1,1		-1,0	-1,1		0,-1	0,0		0,2	1,-1									3,0		
1,2			-1,0	-1,1	0,-2		0,0	0,1					2,-2						3,0	
1,3				-1,0	0,-3			0,0									-3,3			3,0
2,0	-2,0		-2,2						0,0			0,3					2,0			
2,1		-2,0		-2,2						0,0		0,2	1,-1					2,0		
2,2			-2,0						0,-2		0,0	0,1							2,0	
2,3				-2,0					0,-3			0,0						2,-2		
3,0	-3,0			-3,3									0,0			0,3	1,0			
3,1		-3,0											0,-1	0,0		0,1		1,0		
3,2			-3,0									-1,1	0,-2		0,0	0,1			1,0	
3,3				-3,0									0,-3			0,0			1,-1	1,0
4,0	-4,0							-3,3									0,0			0,3
4,1		-4,0										-2,2					0,-1	0,0		0,2
4,2			-4,0													-1,1	0,-2		0,0	0,1
4,3				-4,0													0,-3			0,0

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP

Tablica operatory-różnice

	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3
0,0	0,0			0,3													4,0			
0,1	0,-1	0,0		0,2	1,-1													4,0		
0,2	0,-2		0,0	0,1					2,-2										4,0	
0,3	0,-3			0,0									3,-3							4,0
1,0	-1,0	-1,1			0,0			0,3												
1,1		-1,0	-1,1		0,-1	0,0		0,2	1,-1									3,0		
1,2			-1,0	-1,1	0,-2		0,0	0,1					2,-2						3,0	
1,3				-1,0	0,-3			0,0									-3,3			3,0
2,0	-2,0		-2,2						0,0			0,3					2,0			
2,1		-2,0		-2,2						0,0		0,2	1,-1					2,0		
2,2			-2,0						0,-2		0,0	0,1							2,0	
2,3				-2,0					0,-3			0,0						2,-2		
3,0	-3,0			-3,3									0,0			0,3	1,0			
3,1		-3,0											0,-1	0,0		0,1		1,0		
3,2			-3,0									-1,1	0,-2		0,0	0,1			1,0	
3,3				-3,0									0,-3			0,0			1,-1	1,0
4,0	-4,0							-3,3									0,0			0,3
4,1		-4,0										-2,2					0,-1	0,0		0,2
4,2			-4,0													-1,1	0,-2		0,0	0,1
4,3				-4,0													0,-3			0,0

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP

Tablica operatory-różnice

	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3
0,0	0,0			0,3													4,0			
0,1	0,-1	0,0		0,2	1,-1													4,0		
0,2	0,-2		0,0	0,1					2,-2										4,0	
0,3	0,-3			0,0									3,-3							4,0
1,0	-1,0	-1,1			0,0			0,3												
1,1		-1,0	-1,1		0,-1	0,0		0,2	1,-1									3,0		
1,2			-1,0	-1,1	0,-2		0,0	0,1					2,-2						3,0	
1,3				-1,0	0,-3			0,0									-3,3			3,0
2,0	-2,0		-2,2						0,0			0,3					2,0			
2,1		-2,0		-2,2						0,0		0,2	1,-1					2,0		
2,2			-2,0						0,-2		0,0	0,1							2,0	
2,3				-2,0					0,-3			0,0						2,-2		
3,0	-3,0			-3,3									0,0			0,3	1,0			
3,1		-3,0											0,-1	0,0		0,1		1,0		
3,2			-3,0									-1,1	0,-2		0,0	0,1			1,0	
3,3				-3,0									0,-3			0,0			1,-1	1,0
4,0	-4,0							-3,3									0,0			0,3
4,1		-4,0										-2,2					0,-1	0,0		0,2
4,2			-4,0													-1,1	0,-2		0,0	0,1
4,3				-4,0													0,-3			0,0

©Dr hab. inż. Joanna Józefowska, prof. PP

Tablica operatory-różnice

	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3
0,0	0,0			0,3													4,0			
0,1	0,-1	0,0		0,2	1,-1													4,0		
0,2	0,-2		0,0	0,1					2,-2										4,0	
0,3	0,-3			0,0									3,-3							4,0
1,0	-1,0	-1,1			0,0			0,3												
1,1		-1,0	-1,1		0,-1	0,0		0,2	1,-1									3,0		
1,2			-1,0	-1,1	0,-2		0,0	0,1					2,-2						3,0	
1,3				-1,0	0,-3			0,0									-3,3			3,0
2,0	-2,0		-2,2						0,0			0,3					2,0			
2,1		-2,0		-2,2						0,0		0,2	1,-1					2,0		
2,2			-2,0						0,-2		0,0	0,1							2,0	
2,3				-2,0					0,-3			0,0						2,-2		
3,0	-3,0			-3,3									0,0			0,3	1,0			
3,1		-3,0											0,-1	0,0		0,1		1,0		
3,2			-3,0									-1,1	0,-2		0,0	0,1			1,0	
3,3				-3,0									0,-3			0,0			1,-1	1,0
4,0	-4,0							-3,3									0,0			0,3
4,1		-4,0										-2,2					0,-1	0,0		0,2
4,2			-4,0													-1,1	0,-2		0,0	0,1
4,3				-4,0													0,-3			0,0

Tablica operatory-różnice

	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3
0,0	0,0			0,3													4,0			
0,1	0,-1	0,0		0,2	1,-1													4,0		
0,2	0,-2		0,0	0,1					2,-2										4,0	
0,3	0,-3			0,0									3,-3							4,0
1,0	-1,0	-1,1			0,0			0,3												
1,1		-1,0	-1,1		0,-1	0,0		0,2	1,-1									3,0		
1,2			-1,0	-1,1	0,-2		0,0	0,1					2,-2						3,0	
1,3				-1,0	0,-3			0,0									-3,3			3,0
2,0	-2,0		-2,2						0,0			0,3					2,0			
2,1		-2,0		-2,2						0,0		0,2	1,-1					2,0		
2,2			-2,0						0,-2		0,0	0,1							2,0	
2,3				-2,0					0,-3			0,0						2,-2		
3,0	-3,0			-3,3									0,0			0,3	1,0			
3,1		-3,0											0,-1	0,0		0,1		1,0		
3,2			-3,0									-1,1	0,-2		0,0	0,1			1,0	
3,3				-3,0									0,-3			0,0			1,-1	1,0
4,0	-4,0							-3,3									0,0			0,3
4,1		-4,0										-2,2					0,-1	0,0		0,2
4,2			-4,0													-1,1	0,-2		0,0	0,1
4,3				-4,0													0,-3			0,0

Tablica operatory-różnice

	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3
0,0	0,0			0,3													4,0			
0,1	0,-1	0,0		0,2	1,-1													4,0		
0,2	0,-2		0,0	0,1					2,-2										4,0	
0,3	0,-3			0,0									3,-3							4,0
1,0	-1,0	-1,1			0,0			0,3												
1,1		-1,0	-1,1		0,-1	0,0		0,2	1,-1									3,0		
1,2			-1,0	-1,1	0,-2		0,0	0,1					2,-2						3,0	
1,3				-1,0	0,-3			0,0									-3,3			3,0
2,0	-2,0		-2,2						0,0			0,3					2,0			
2,1		-2,0		-2,2						0,0		0,2	1,-1					2,0		
2,2			-2,0						0,-2		0,0	0,1							2,0	
2,3				-2,0					0,-3			0,0						2,-2		
3,0	-3,0			-3,3									0,0			0,3	1,0			
3,1		-3,0											0,-1	0,0		0,1		1,0		
3,2			-3,0									-1,1	0,-2		0,0	0,1			1,0	
3,3				-3,0									0,-3			0,0			1,-1	1,0
4,0	-4,0							-3,3									0,0			0,3
4,1		-4,0										-2,2					0,-1	0,0		0,2
4,2			-4,0													-1,1	0,-2		0,0	0,1
4,3				-4,0													0,-3			0,0

Rozwiązanie

stan początkowy	operator	stan końcowy
(4,3)	(-4,0)	(0,3)
(0,3)	(3,-3)	(3,0)
(3,0)	(0,3)	(3,3)
(3,3)	(1,-1)	(4,2)
(4,2)	(-4,0)	(0,2)
(0,2)	(2,-2)	(2,0)

Zasada rezolucji
(Julia Robinson 1965)

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma}{\beta \vee \gamma}$$

Rezolucja w postaci implikacyjnej

to nie jest to samo co dedukcja!!!!

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma} \qquad \frac{\neg\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma}{\neg\alpha \Rightarrow \gamma}$$

$$\frac{\beta, \beta \Rightarrow \gamma}{\gamma} \qquad \frac{true \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma}{true \Rightarrow \gamma}$$

Dedukcja

jest szczególnym przypadkiem **rezolucji**!!!!

Dowód metodą rezolucji

1. Przekształć przesłanki lub aksjomaty w formę klauzul.
2. Dodaj do zbioru aksjomatów zaprzeczenie twierdzenia, które ma być udowodnione.
3. Wygeneruj nowe klauzule wynikające z tego zbioru.
4. Znajdź sprzeczność generując pustą klauzulę.
5. Warunki użyte do wygenerowania pustej klauzuli są tymi, w których zaprzeczenie celu jest prawdziwe.

Przykład

$p(X) \Rightarrow q(X)$
$\neg p(X) \Rightarrow r(X)$
$q(X) \Rightarrow s(X)$
$r(X) \Rightarrow s(X)$

$s(a)$

$s(a)$ nie da się wyprowadzić metodą dedukcji!

Rezolucja jako metoda zupełna

$\forall X\ p(X) \Rightarrow q(X)$
$\forall X\ \neg p(X) \Rightarrow r(X)$
$\forall X\ q(X) \Rightarrow s(X)$
$\forall X\ r(X) \Rightarrow s(X)$

$s(a) = ?$

$p(a) \Rightarrow q(a)$	$\neg\, p(a) \vee q(a)$
$\neg p(a) \Rightarrow r(a)$	$\neg\, (\neg p(a)) \vee r(a)$
$q(a) \Rightarrow s(a)$	$\neg q(a) \vee s(a)$
$r(a) \Rightarrow s(a)$	$\neg r(a) \vee s(a)$

Rezolucja jako metoda zupełna

$\neg\, p(a) \vee q(a)$
$p(a) \vee r(a)$
$\neg q(a) \vee s(a)$
$\neg r(a) \vee s(a)$
$\neg s(a)$

$\neg p(a) \vee q(a)$	$q(a) \vee r(a)$	
$p(a) \vee r(a)$		
$\neg q(a) \vee s(a)$	$r(a) \vee s(a)$	$s(a)$
$\neg r(a) \vee s(a)$	$\neg r(a)$	$\Box$
$\neg s(a)$		

Przykład

$p(a) \Rightarrow q(a)$
$\neg p(a) \Rightarrow r(a)$
$q(a) \Rightarrow s(a)$
$r(a) \Rightarrow s(a)$

$s(a) \Rightarrow false$

$true \Rightarrow p(a) \vee \neg p(a)$

$$\frac{p(a) \Rightarrow q(a),\ q(a) \Rightarrow s(a)}{p(a) \Rightarrow s(a)} \qquad \frac{\neg p(a) \Rightarrow r(a),\ r(a) \Rightarrow s(a)}{\neg p(a) \Rightarrow s(a)}$$

$$\frac{p(a) \Rightarrow s(a),\ s(a) \Rightarrow false}{p(a) \Rightarrow false} \qquad \frac{\neg p(a) \Rightarrow s(a),\ s(a) \Rightarrow false}{\neg p(a) \Rightarrow false}$$

$(p(a) \vee \neg p(a)) \Rightarrow false$

$$\frac{true \Rightarrow (p(a) \vee \neg p(a)),\ (p(a) \vee \neg p(a)) \Rightarrow false}{true \Rightarrow false}$$

Strategie upraszczające rezolucję

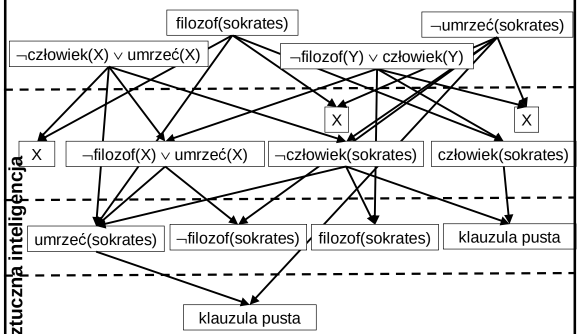
- przeszukiwanie wszerz
- strategia zbioru podpierającego
- strategia preferencji jednostkowej
- strategia liniowego wejścia

Przykład

człowiek(X) ⇒ umrzeć(X)	¬człowiek(X) ∨ umrzeć(X)
filozof(sokrates)	filozof(sokrates)
filozof(Y) ⇒ człowiek(Y)	¬filozof(Y) ∨ człowiek(Y)
umrzeć(sokrates)	¬umrzeć(sokrates)

Sztuczna inteligencja

Przeszukiwanie wszerz



Sztuczna inteligencja

Strategia zbioru podpierającego

Dla zbioru klauzul wejściowych S określa się podzbiór T⊂S zwany zbiorem podpierającym.

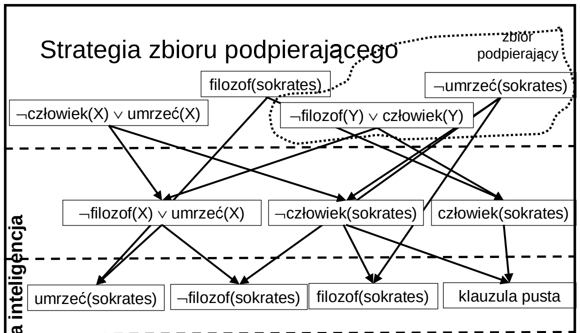
Strategia wymaga, aby w każdej rezolucji co najmniej jedna rezolwenta miała poprzednika w zbiorze podpierającym T.

Jeżeli S jest sprzeczny i S\T nie jest sprzeczny, to strategia ta jest zupełna.

Np. jeżeli T zawiera zaprzeczenie celu.

Sztuczna inteligencja

Strategia zbioru podpierającego



Sztuczna inteligencja

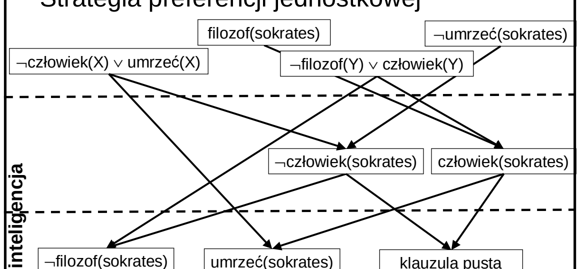
Strategia preferencji jednostkowej

Rezolucja, w której jedna rezolwenta jest literałem prowadzi do „skrócenia" drugiej rezolwenty. Zatem preferuje się rezolucje z pojedynczymi literałami.

Jeżeli nie dopuścimy innych rezolucji, jak tylko z pojedynczymi literałami, to strategia nie jest zupełna.

Sztuczna inteligencja

Strategia preferencji jednostkowej



Sztuczna inteligencja

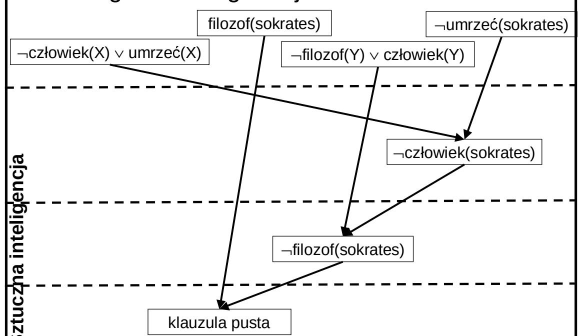
Strategia liniowego wejścia

W pierwszej rezolucji rezolwentami są aksjomat i zanegowany cel. W kolejnych krokach jedną z rezolwent jest ostatnio otrzymana klauzula, a drugą aksjomat.

Strategia nie jest zupełna.

Sztuczna inteligencja

Strategia liniowego wejścia



Sztuczna inteligencja

Inne pożyteczne zasady

- Uporządkowanie literałów w klauzulach.
- Związanie zmiennej może być korzystne na początku przeszukiwania, ale nie jest to regułą.
- Klauzule oczywiste należy eliminować ze zbioru.
- Klauzule mniej ogólne należy eliminować ze zbioru.

Sztuczna inteligencja

PROLOG

PROLOG jest językiem programowania w logice.

Program w PROLOGu składa się z listy stwierdzeń logicznych w postaci klauzul Horna.

Wnioskowanie:

- w tył

- w głąb z nawrotami

Sztuczna inteligencja

PROLOG a logika

- W logice zmienne są kwantyfikowane jawnie, w PROLOGU nazwy zmiennych zaczynają się od dużej litery, a stałych od małej litery.
- W PROLOGU nie występuje znak dysjunkcji, dysjunkcję reprezentuje się w postaci listy alternatywnych stwierdzeń.
- W PROLOGU implikację zapisuje się „od końca”:
  $p \Rightarrow q$ zapisuje się *q :- p.*

Sztuczna inteligencja

Reprezentacja deklaratywna

$\forall$ X man(X) $\Rightarrow$ die(X) man(sokrates)	die(X) :- man(X) man(sokrates) ? die(sokrates)

Sztuczna inteligencja