BOP pytania i odpowiedzi v1.3
Changelog:
1.3
-rozwiązanie pytania o zależności simpleksowe
1.2
-Poprawka wzorów przy porównaniu MM1 z RR, treść pyania o sieciach
1.1
-wygląd, literówki

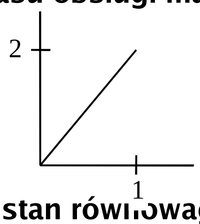
a)Przy jakich założeniach proces sygnałowy jest jednorodnym (=stacjonarnym) procesem Poissona?
b)Wykazać, że dla jednorodnego procesu Poissona odstęp pomiędzy kolejnymi zadaniami ma rozkład wykładniczy.

a)Proces sygnałowy o przyrostach niezależnych i stacjonarnych, w którym zadania zachodzą pojedynczo i błyskawicznie jest stacjonarnym procesem Poissona.

- -stacjonarność: proces sygnałowy nazywamy procesem sygnałowym o przyrostach stacjonarncyh jeśli rozkład prawdopodobieństwa liczby zdarzeń losowych w przedziałach o dowolnej długości Δ nie zależy od umieszczenia tego procesu w czasie, w szczególności dla takiego procesu średnia liczba pojawiania się zdarzeń jest stała.
- -niezależność: proces sygnałowy nazywamy procesem sygnałowym o przyrostach niezależnych, jeśli liczba zdarzeń losowych w dowolnych rozłącznych przedzałach czasowych (n dowolne) $<t_0, t_1), <t_1, t_2), \ldots <t_{n-1}, t_n)$ są zmiennymi losowymi niezależnymi
- -błyskawiczność: oznacza matematycznie, że prawdopodobieństwo zajścia jednego zdarzenia w przedziale czasu $\Delta t \to 0$ wyraża się wzorem $P_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, gdzie $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$
- - pojedynczość: ja rozumiem to tak że w definicji błyskawiczności powiedziano, że chodzi o zajście jednego zdarzenia w przedziale $\Delta t \to 0$

b) rozkład wykładniczy jest opisany dystrybuantą $F_U(t)=1-e^{-\lambda t}$
Dowód: oznaczmy przez U zmienną losową (odstęp między zajściami zdarzeń). Jej dystrybuanta ma postać: $F_U(t)=P(U<t)=1-P(U>=t)=1-P_0(t)=1-e^{-\lambda t}$. korzystamy z tw 1.

Dla jednostkowego systemu masowej obsługi z algorytmem FIFO prawdopodobieństwo pojawienia się *k* zadań w jednostce czasu *t* wynosi $P[x(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$ **,** $\lambda > 0$**, a funkcja gęstości prawdopodobieństwa czasu obsługi ma postać**



Dobrać λ **tak by system osiągnął stan równowagi statystycznej, w tym stanie obliczyć wszystkie poznane średnie dla zadania o długości** $0{,}5$**. Jakie byłyby te średnie te średnie gdyby zastąpić algorytm FIFO algorytmem RR.**

Sądząc po wzorze na wejściu mamy stacjonarny strumień Poissona (czyli strumień prosty).

Z wykresu widzimy, że funkcja gęstości zmiennej losowej V to ma postać f(v)=2v (w przedziale <0;1> oczywiście).

Wyliczmy sobie najpierw odpowiednie momenty:

$E(V) = \int_{(0,1)} v*2v\ dv = 2* \int_{(0,1)} v^2 dv = 2/3 * [v^3]_{(0,1)} = 2/3$
$E(V^2) = \int_{(0,1)} v^2*2v\ dv = 2* \int_{(0,1)} v^3 dv = 1/2 * [v^4]_{(0,1)} = 1/2$
$\sigma_V^2 = E(V^2)-[E(V)]^2 = 1/18$

Wiemy, że wartość średnia zmiennej losowej V to $1/\mu$, więc $\mu=3/2$.
Warunkiem dostatecznym istnienia stanu równowagi statystycznej jest by $\lambda<\mu$ i my chyba możemy wybrać sobie dowolne λ, które spełnia ten warunek. Ja sobie wybiorę $\lambda=3/4$. Wtedy $\delta=\lambda/\mu=1/2$.

Teraz mamy obliczyć średnie dla zadania o czasie wykonywania t=1/2.
Wartość średnia czasu oczekiwania nie zależy od długości zadania, które robimy (bo FIFO nie preferuje żadnych zadań).
$E(W(t)) = E(W) = = = 3/8$
$E(T(t)) = E(W(t))+t = 3/8 + 1/2 = 7/8$

Co do zmiennej N to jej średnia chyba też nie zależy od długości zadania (ale tu głowy nie dam).
$E(N) = + \delta = + 1/2 = 25/32$

Natomiast dla algorytmu RR mamy następujące wzory na średnie:
$E(W(t)) = = = 1/2$
$E(T(t)) = = = 1$

Algorytm RR wypada nieco gorzej.

Ułożyć problem programowania dynamicznego, w którym można wyznaczyć $C^*_{\max}$ dla problemu szeregowania 3 niezależnych zadań na dwóch dowolnych maszynach, gdy:
a) **zadania są niepodzielne,**
b) **zadania są podzielne**

Czasy wykonywania zadań $Z_1[1,2]$, $Z_2[2,3]$, $Z_3[3,4]$.

1. Zadania niepodzielne (sprowadzamy do problemu 0-1 PL)

Zminimalizować C_{max}
$C_{max}-(1*x_{11}+2*x_{12}+3*x_{13})$ 0 (* długość uszereg. na maszynie 1 nie przekracza C_{max} *)
$C_{max}-(2*x_{21}+3*x_{22}+4*x_{23})$ 0 (* długość uszereg. na maszynie 2 nie przekracza C_{max} *)
$x_{11}+x_{21} = 1$ (* zadanie 1 jest wykonane w 100% *)
$x_{12}+x_{22} = 1$ (* zadanie 2 jest wykonane w 100% *)
$x_{13}+x_{23} = 1$ (* zadanie 3 jest wykonane w 100% *)
$x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}$ {0,1}

2. Zadania podzielne (sprowadzamy do problemu PL)

Zminimalizować C_{max}
$C_{max}-(1*x_{11}+2*x_{12}+3*x_{13})$ 0 (* długość uszereg. na maszynie 1 nie przekracza C_{max} *)
$C_{max}-(2*x_{21}+3*x_{22}+4*x_{23})$ 0 (* długość uszereg. na maszynie 2 nie przekracza C_{max} *)
$x_{11}+x_{21} = 1$ (* zadanie 1 jest wykonane w 100% *)
$x_{12}+x_{22} = 1$ (* zadanie 2 jest wykonane w 100% *)
$x_{13}+x_{23} = 1$ (* zadanie 3 jest wykonane w 100% *)
$C_{max}-(1*x_{11}+2*x_{21})$ 0 (* czas wykonywania zadania 1 nie przekracza C_{max} *)
$C_{max}-(2*x_{12}+3*x_{22})$ 0 (* czas wykonywania zadania 2 nie przekracza C_{max} *)
$C_{max}-(3*x_{13}+4*x_{23})$ 0 (* czas wykonywania zadania 3 nie przekracza C_{max} *)
$x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}$ <0;1>

W jednostanowiskowym systemie masowej obsługi z alg. FIFO prawdopodobieństwo pojawienia się *k* zgłoszeń w przedziale o długości *t* wynosi $P[x(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, $\lambda>0$, a funkcja gęstości czasu obsługi dana jest wzorem:

$$\rho(t)=\begin{cases}3t^2 & dla\, t\in\langle 0,1\rangle\\ 0 & dla\, t\notin\langle 0,1\rangle\end{cases}$$

Dobrać tak, by system osiągnął stan równowagi statystycznej, w tym stanie obliczyć wszystkie poznane średnie dla zadania o długości $0{,}5$. Jakie byłyby te średnie te średnie gdyby zastąpić algorytm FIFO algorytmem RR?

Na wejściu mamy stacjonarny strumień Poissona (czyli strumień prosty).

Wyliczmy sobie najpierw odpowiednie momenty:
$E(V) = \int_{(0,1)}t*3t^2\ dt = 3*\int_{(0,1)}t^3dt = 3/4 * [t^4]_{(0,1)} = 3/4$
$E(V^2) = \int_{(0,1)}v^2*3t^2\ dt = 3*\int_{(0,1)}t^4dt = 3/5 * [v^5]_{(0,1)} = 3/5$
$\sigma_V^2 = E(V^2)-[E(V)]^2 = 3/80$

Wiemy, że wartość średnia zmiennej V to $1/\mu$, więc $\mu=4/3$.
Warunkiem dostatecznym istnienia stanu równowagi statystycznej jest by $\lambda<\mu$, więc niech np. $\lambda=1$.
Wtedy $\delta=\lambda/\mu=3/4$.

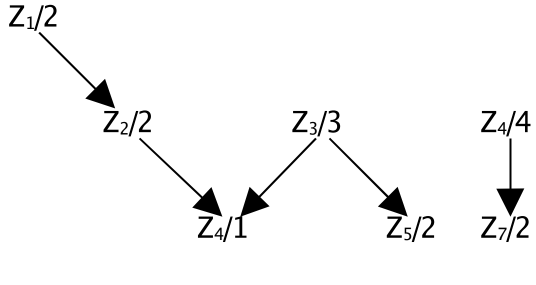
Teraz mamy obliczyć średnie dla zadania o czasie wykonywania t=1/2.
Wartość średnia czasu oczekiwania nie zależy od długości zadania, które robimy (bo FIFO nie preferuje żadnych zadań).
E(W(t)) = E(W) = = = 6/5
E(T(t)) = E(W(t))+t = 6/5 + 1/2 = 17/10

Co do zmiennej N to jej średnia chyba też nie zależy od długości zadania (ale tu głowy nie dam).
E(N) = + δ = + 3/4 = 39/20

Natomiast dla algorytmu RR mamy następujące wzory na średnie:
E(W(t)) = = = 3/2
E(T(t)) = = = 2

Algorytm RR wypada nieco gorzej.

Wyznaczyć uszeregowanie minimalizujące $C^*_{\max}$ dla podanego zbioru zadań podzielnych na 2 identycznych maszynach.



To trzeba trzasnąć algorytm Muntza-Coffmana.

W **chwili 0** zadania wyglądają następująco:
Z1: (2)5; Z2: (2)3; **Z3: (3)5**; Z4: (1)1; Z5: (2)2; **Z6: (4)6**; Z7: (2)2
(liczba w nawiasie mówi ile jeszcze czasu pozostało do wykonywania, a poza nawiasem to poziom zadania; zadania pogrubione nie mają poprzedników).

Z zadań bez poprzedników największy poziom ma zadanie Z6, więc ono dostaje samodzielnie maszynę, a Z1 i Z3 dostają drugą maszynę na spółe (z =1/2).

Po 2 jednostkach czasu (w **chwili 2**) poziom zadania Z6 zmaleje o 2, a Z1 i Z3 tylko o 1.
Z1: (1)4; Z2: (2)3; **Z3: (2)4**; Z4: (1)1; Z5: (2)2; **Z6: (2)4**; Z7: (2)2
Od tej pory te trzy zajmą wspólnie 2 maszyny (z =2/3).

Po 1.5 jednostkach (w **chwili 3.5**) czasu każde z tych zadań skróci się o 1 i Z1 się skończy, więc wyleci z grafu ograniczeń (do gry wchodzi Z2)
Z2: (2)3; **Z3: (1)3**; Z4: (1)1; Z5: (2)2; **Z6: (1)3**; Z7: (2)2
Znowuż 3 zadania mają ten sam poziom, więc one dostają obie maszyny (z =2/3).

Po 1.5 jednostkach (w **chwili 5**) czasu każde z tych zadań skróci się o 1, więc Z3 i Z6 się zakończą (wylot z grafu).
Z2: (1)2; Z4: (1)1; **Z5: (2)2**; **Z7: (2)2**
Znowuż 3 zadania mają ten sam poziom, więc one dostają obie maszyny (z =2/3).

Po 1.5 jednostkach (w **chwili 6.5**) czasu każde z tych zadań skróci się o 1, więc Z2 się tym razem skończy.
Z4: (1)1; **Z5: (1)1**; **Z7: (1)1**
I znowu .... (=2/3).

Po 1.5 jednostkach (w **chwili 8**) wszystkie zadania się zakończą.

A tak wygląda to co opisałem powyżej:

Z6 (β=1)	Z1,Z3,Z6 (β=2/3)	Z2,Z3,Z6 (β=2/3)	Z2,Z5,Z7 (β=2/3)	Z4,Z5,Z7 (β=2/3)
Z1,Z3 (β=1/2)				

0 2 3.5 5 6.5 8

Stosując algorytm McNaughtona do każdego z przedziałów możemy otrzymać uszeregowanie np.:

Z6		Z6	Z3	Z3	Z6	Z5	Z7	Z7	Z5
Z1	Z3	Z3	Z1	Z6	Z2	Z2	Z5	Z5	Z4

0 2 3.5 5 6.5 8

Podaj wzajemne zaleznosci pomiedzy:
- **rozwiazanie bazowe**
- **zb. rozw. dopuszczalnych**
- **punkt wierzcholkowy powyzszego**
- **nieujemne rozwiazanie bazowe**

Wszystkie terminy dotyczą metody simpleks.
Rozwiązanie bazowe x(B) które spełnia warunek brzegowy x >= 0 (nieujemne rozwiąznie bazowe) nazywa się dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym.

Jeżeli x(B) nalezy do X, jest dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym układu równań Ax=b to jest on również punktem wierzcholkowym zbioru X rozwiązań dopuszczalnych.

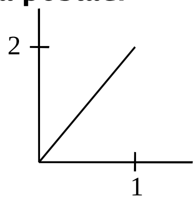
Jeżeli x nalezy do X jest punktem wierzchołkowym zb. X to jest on również rozwiązaniem bazowym układy równań Ax=b.

Jeszcze wspomne zeby bylo wszystko jasne ze maly x i male b to wektory.

Podaj twierdzenie LaGrange'a.
Twierdzenie LaGrange'a (warunek konieczny optymalności)

Dane jest zadanie programowania nieliniowego przy ograniczeniach równościowych.
Jeśli wektor x* stanowi optimum globalne funkcji f, funkcje f(wektor x), g_i(wektor x) są rózniczkowalne, ∇g_i(wektor x*) są liniowo niezależne, to istnieje wektor mnożników Lagrange'a taki, że ∇L(wektor x*, wektor lambda)=0.
$g_i(x)$- ograniczenia

Mamy system o *k* końcówkach obsługiwany wg. algorytmu RR. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa czasu obsługi ma postać:



Natomiast dystrybuanta czasu zastanawiania się równa się: $F(t)=1-e^{-0,5t}$
Oblicz ogólny czas odpowiedzi się tego systemu. Oblicz także *k. Narysuj wykres.**

Widać, ze funkcja gęstości jest równa f(v)=2v.
Policzmy
E(V) = $\int_{(0,1)}$2v*vdv = 2*$\int_{(0,1)v}$v²dv = 2/3 * $[v^3]_{(0,1)}$ = 2/3
E(V)=1/μ czyli μ =3/2.
Z czasu zastanawiania się (czas między kolejnymi zgłoszeniami) odczytujemy λ=1/2.
Teraz obliczmy czas odpowiedzi:

$$\bar{T}=\frac{k}{\mu(1-p_0)}-\frac{1}{\lambda}$$

gdzie $p_0=[\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}\rho^i]^{-1}$

Nie mamy k, więc wstawmy tu wartość $k^*=\frac{\mu+\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

$$p_0=[\sum_{i=0}^{4}\frac{4!}{(4-i)!}\rho^i]^{-1}=[1+\frac{4}{3}+\frac{12}{9}+\frac{24}{27}+\frac{24}{81}]^{-1}=\frac{27}{131}$$

więc

$$\bar{T}=\frac{4}{\frac{3}{2}(1-\frac{27}{131})}-\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\frac{156}{131}}-2=\frac{53}{39}$$

Podaj wzory na najwcześniejszy i najpóźniejszy termin zajścia zdarzenia w sieci przepływowej o wierzchołkach od 1 do *s*. Podaj wzór na luz całkowity. Podaj zależność między ścieżką krytyczną a zdarzeniami i zadaniami.

Najwcześniejszy termin zajścia zdarzenia j, t_j^w, wyraża się wzorem

$t_1^w = 0$

$t_j^w = \max_k\{T(P_k^j)\}$, $j \in 2,3,\ldots,s$

gdzie P_k^j jest k-tą ścieżką od zdarzenia 1 do zdarzenia j w sieci, a $T(P_k^j)$ jest długością tej ścieżki, równą $T(P_k^j) = \sum_{(i,j)\in P_k^j}\tau_{ij}$

Łatwo też zauważyć, że do wyznaczenia t_j^w można zastosować wzór rekurencyjny:

$$t_1^w = 0$$
$$t_j^w = \max_{i \in A_j}\{t_i^w + \tau_{ij}\} \qquad j = 2,3,\dots,s$$

gdzie A_j jest zbiorem wszystkich zdarzeń/ wierzchołków, w których rozpoczynają się zadania (łuki) dochodzące do zdarzenia/wierzchołka j.

Postępując analogicznie, jednak poruszając się od końca sieci (czyli od zdarzenia s) definiujemy najpóźniejszy termin zajścia wierzchołka/zdarzenia i - t_i^p, który nie powoduje opóźnienia zajścia zdarzenia końcowego s. Mamy zatem

$$t_s^p = t_s^w$$
$$t_i^p = \min_k\left\{t_s^p - T\left(\hat{P}_k^i\right)\right\} \qquad i = s-1, s-2, \dots 1$$

gdzie $\hat{P}_k^i$ jest k-tą ścieżką od zdarzenia s do zdarzenia i w sieci z łukami o przeciwnych zwrotach.

Do wyznaczenia t_i^p służy następujący wzór rekurencyjny:

$$t_s^p = t_s^w$$
$$t_i^p = \min_{j \in B_i}\{t_j^p - \tau_{ij}\} \qquad i = s-1, s-2, \dots, 1$$

gdzie B_i jest zbiorem wszystkich zdarzeń, w których kończą się zadania wychodzące ze zdarzenia i (nie jest odwrócony zwrot)

Luz całkowity zadania (i,j), który wyraża się wzorem $s_{ij}^c = t_j^p - t_i^w - \tau_{ij}$

Drogę (ścieżkę) od zdarzenia 1 do zdarzenia s w sieci zadań, która ma maksymalną długość, nazywamy drogą (ścieżką) krytyczną (critical path).

W każdej sieci zadań istnieje co najmniej jedna taka ścieżka. Zadania leżące na tej ścieżce nazywamy zadaniami krytycznymi. Łatwo wykazać, że zdarzenia leżące na ścieżce krytycznej są zdarzeniami krytycznymi, tzn. $s_i=0$, jednak ciąg zdarzeń krytycznych nie zawsze wyznacza ścieżkę krytyczną.

Słuszne jest natomiast następujące twierdzenie:

Na to, by zadanie (i,j) było zadaniem krytycznym, potrzeba i wystarcza by $s_{ij}=0$. Innymi słowy ścieżka krytyczna jest jednoznacznie wyznaczona przez ciąg zadań, których luz całkowity jest zerowy.

Opisać sposób postępowania przy badaniu złożoności obliczeniowej problemu szeregowania PI

Jeśli zatem mamy zbadać złożoność obliczeniową problemu szeregowania Π, o którym zakładamy, że jest problemem optymalizacyjnym, to mamy do dyspozycji dwie drogi :

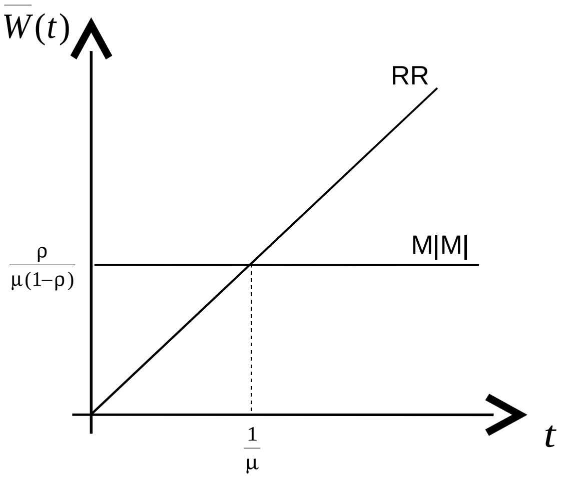
a) podanie algorytmu dokładnego, wielomianowego dla problemu Π, co jest równoważne udowodnieniu, że wersja decyzyjna problemu Π należy do klasy **P**.
b) wykazanie, że wersja decyzyjna problemu Π jest **NP-zupełna** lub **NP-trudna,** a tym samym wykazanie, że problem Π jest problemem **NP-trudnym**. Wymaga to wykazania, że dowolny problem NP-zupełny transformuje się wielomianowo do badanego problemu w wersji decyzyjnej.

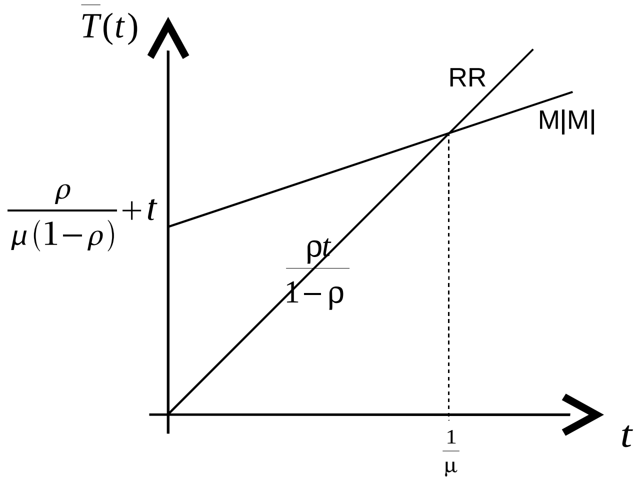
Niestety zarówno wybór kolejności wymienionych dróg, jak i wybór problemu NP-zupełnego do transformacji zależą od rozeznania i intuicji dowodzącego. Jeśli obie drogi zawiodą to mówimy, że problem Π jest otwarty.

Porównaj system M|M|1 z systemem z alg. RR

Porównajmy system z algorytmem RR z systemem $M \mid M \mid 1$. Mamy :

średni czas oczekiwania





Widzimy zatem, że system z algorytmem RR w porównaniu z systemem $M\,|\,M\,|1$ przy tych samych założeniach odnośnie rozkładu wejścia i czasu obsługi preferuje zadania o długości mniejszej od $\frac{1}{\mu}$, a dyskryminuje zadania o czasie większym niż $\frac{1}{\mu}$.

Podaj wzory rekurencyjne na najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy zajścia zdarzeń w sieci zadań.

Najwcześniej : $t_1^w = 0$

$$t_j^w = \max_{i \in A_j}\{t_i^w + \tau_{ij}\} \qquad j = 2,3,\ldots,s$$

$$t_s^p = t_s^w$$

Najpóźniej: $t_i^p = \min_{j \in B_i}\{t_j^p - \tau_{ij}\} \qquad i = s-1, s-2, \ldots, 1$

Podaj wzory na najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy rozpoczęcia i zakończenia zadań w sieci

Łatwo zauważyć, że:

t_j^w - najwcześniejszy termin rozpoczęcia zadań wychodzących z wierzchołka j (EST – early start time)

$t_i^w + \tau_{ij}$ - najwcześniejszy termin zakończenia zadania (i,j) (EFT – early finish time)

$t_j^p - \tau_{ij}$ - najpóźniejszy termin rozpoczęcia zadania (i,j) (LST – late start time)

t_i^p - najpóźniejszy termin zakończenia wszystkich zadań dochodzących do wierzchołka i

Zdefiniujemy obecnie luz (zapas) czasowy zdarzenia i (event slack time) jako

$$s_i = t_i^p - t_i^w \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots s$$

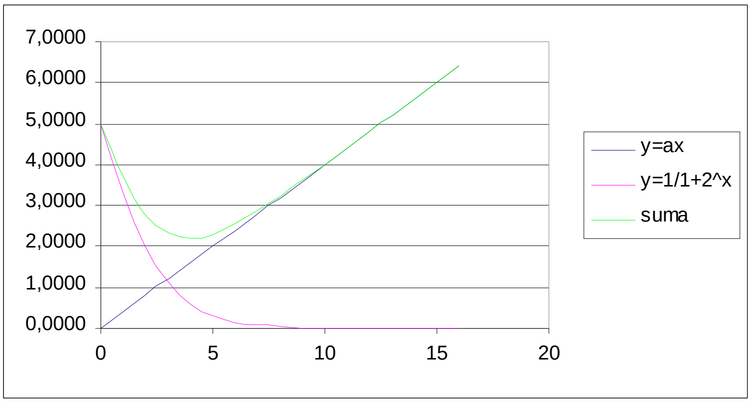
Oznacza on oczywiście maksymalne przesunięcie terminu zajścia zdarzenia i, niepowodujące zmiany terminu t_s^w / t_s^p. Zdarzenia dla których $s_i = 0$ nazywać będziemy krytycznymi (critical).

Podaj założenia i wykresy odpowiednich kosztow w metodzie CPM/MCX

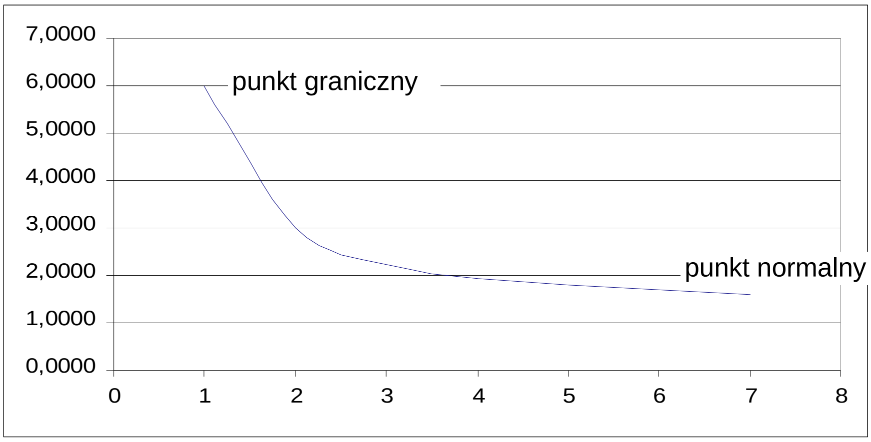
Zakłada się, że na każdej krzywej znane są
- punkt normalny
- punkt graniczny

Koszt wykonania siec zadań K składa się z
- kosztu bezpośredniego K_b, będącego sumą kosztów bezpośrednich K_{ij} wykonania poszczególnych zadań (robocizna, materiały, energia etc.)
- kosztu pośredniego K_p odniesionego do całego zbioru zadań (administracja, amortyzacja, zamrożenie kapitału etc.)

Na ogół zakłada się że:
- zmieniając koszt bezpośredni K_{ij} można zmieniać w pewnym zakresie czas wykonania tego zadania τ_{ij} , zgodnie ze znaną krzywą czas-koszt
- koszt pośredni K_p rośnie liniowo ze wzrostem czasu wykonania zbioru zadań Cmax



(niebieskie -K p,
różowe -K b,
zielone – K)
oś Y – K, oś X - Cmax



oś Y -Kij, oś X - τij

Zdefiniuj stan równowagi statystycznej i podaj przy jakim dostatecznym warunku ma to miejsce

W stanie równowagi statystycznej zakłada się, że w systemie osiągnięte zostały granice:

$$\lim_{t\to\infty} P_n(t) = p_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = N \qquad \overline{N} < \infty$$

Warunek dostateczny:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < m$$