

Oczywista nie odpowiadam za przepisywanie na poprawce tego co tutaj znajdziecie : to tylko kompendium (niepełne) odpowiedzi różnych ludzi z listy + kilka wycinków ze slajdów drożdza. Sorry za małe skany, brzydki dokument etc etc, ale nie mam czasu cackać się w dopieszczanie wyglądu. Powiększone slajdy wyglądały jeszcze tragiczniej. Use at own risk.

ratkin

## PLECAK DYNAMICZNIENIE :

Przykład 2.1

Procedura rozwiązywania PROBLEMU PLEKAKOWY

$f(i, l)$   $i = 0, 1, \dots, n$   $l = 0, 1, 2, \dots, b$

$f(0, l) = 0 \quad \forall l$   
 $f(i, 0) = 0 \quad \forall i$

$f(i, l) = f(i-1, l)$  jeśli  $l < s(a_i)$   
 $f(i, l) = \max\{f(i-1, l-s(a_i)) + w(a_i), f(i-1, l)\}$  jeśli  $l \geq s(a_i)$

Optimum dla  $f(n, b)$

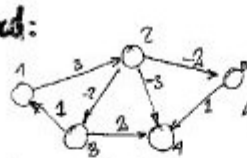
i \ l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	4	4	4	4	7	7	7	7
3	0	0	2	4	4	6	6	6	7	7	9
4	0	0	2	4	6	6	8	10	10	12	12
5	0	0	2	4	6	6	8	10	10	12	12

Obliczmy złożoność obliczeniową. Liczba elementarnych operacji, które należy wykonać zależy wielomianowo od liczby elementów tablicy określającej wartości  $f(i, l)$ , to jest  $O(nb)$ . Zauważmy, że nie jest to jednak alg. wielomianowy.

to mi się wydaje w miarę jasne. natomiast wybieranie przedmiotów które do plecaka wchodzi opowiedział mi Bartas Szopka - zaczyna się od największej w ostatnim rzędzie i jedzie do góry. jeśli wartość się nie zmieniła to znaczy że poprzedni przedmiot do plecaka nie wchodzi. jeśli się zmieniła, to jedziemy w lewo o rozmiar tego przedmiotu i znowu do góry (a ten przedmiot wchodzi). Nie jestem pewien czy czegoś nie namieszałem. Łatwo sprawdzić, patrzeć czy suma rozmiarów przedmiotów które wybraliśmy  $\leq$  rozmiarowi plecaka.

## FLOYDA szukanie odlegosci wierzchołkow :

Przykład:



$$A[i,j] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 5 & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k=0 \quad D[i,j] = A[i,j]$$

$$k=1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 5 & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D[1,3] &= \min\{D[1,3], D[1,1]+D[1,3]\} \\ D[2,4] &= \min\{D[2,4], D[2,1]+D[1,4]\} \\ D[3,2] &= \min\{D[3,2], D[3,1]+D[1,2]\} \end{aligned}$$

$$k=2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 5 & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D[1,3] &= \min\{D[1,3], D[1,2]+D[2,3]\} = 1 \\ D[3,4] &= \min\{D[3,4], D[3,2]+D[2,4]\} = 1 \end{aligned}$$

$$k=3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & \infty & 0 & 1 \\ 4 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 5 & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D[2,4] = \min\{D[2,4], D[2,3]+D[3,4]\} = -1$$

Dla  $k=4$  i  $k=5$  macierz  $D[i,j]$  już się nie zmienia ze względu na brak połączeń, obliczenia przestajemy.

$$D[i,j] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & \infty & 0 & 1 \\ 4 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 5 & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

przy czym ja sobie to po prostu tłumacze tak ze iteracyjnie  
for (i=1; i<=rozmiar macierzy; i++)

```
{
  zaznaczam kolumnę [i] i wiersz [i]
  "wyprowadzam" jakby przecięcia z liczb które leżą w zaznaczonych kolumnach.
  przecięcie = suma tych liczb. Jeśli jest nieskończoność to nic nie robimy.
  jeśli suma jest mniejsza od dotychczasowej, wpisujemy ją w kratkę, jeśli większa, to
  zostawiamy stara
}
```

	1	2	3	4	5
1	0	3	-2+3	-3+3	-2+3
2	∞	0	-2	-3	-2
3	1	∞	0	2	∞
4	∞	∞	∞	0	∞
5	∞	∞	∞	1	0

## PRIMA / KRUSKALA drzewo rozpinajace :

<http://www.algorytm.cad.pl/Algorithms/1-10/algorithm9.html>

<http://www.algorytm.cad.pl/Algorithms/1-10/algorithm8.html>

piece of cake

## PRZEPLYWY W SIECIACH

na slajdach. i tak kiepsko jest to wytлумaczone, nie bede tego przeklejal jeszcze raz, bo latwo to znalezc.

## WASKIE GARDLO W GRAFIE (PRZEPLYWY)

Poczynajac od zrodla przeszukujesz graf wglab przesuwajac sie tylko po sciezках, ktore nie zostaly nasycone. Jesli trafisz na sciezke nasycona to dalaczasz ja do zbioru "waskie gardlo" i cofasz sie. Przeszukiwanie wykonujesz do momentu, gdy nie bedzie juz sciezek nienasyconych od strony zrodla. Pojemnosc waskiego gardla to jest suma przeplywu w sciezках ze zbioru "waskie gardlo".

## MATROID

Def. MATROIDEM nazywa się dowolna parę  $M = (E, J)$ , gdzie  $E$  jest zbiorem skończonym, a  $J \subseteq 2^E$

spełnia warunki :

- (a)  $J$  oraz
- (b) jeśli  $A \in J$  i  $B \subseteq A$ , to  $B \in J$ ,
- (c) dla dowolnych  $A, B \in J$ , takich że  $|B| = |A| + 1$  istnieje element  $e \in B \setminus A$ , taki, że  $A \cup \{e\} \in J$

Pojęcie matroidu sformułowano na gruncie teorii zależności liniowej badającej zależność między wektorami w przestrzeni liniowej. Obecnie matroidy służą do opisu zagadnień kombinatorycznych, analizy ich właściwości i konstrukcji algorytmów rozwiązujących te zagadnienia.

## ZADANIE

"O pewnym problemie optymalizacji i kombinatorycznej wiadomo, że  
> je li  $P \neq NP$ , to nie istnieje dla niego wielomianowy algorytm  
> aproksymacyjny o oszacowaniu jakości lepszym niż 3. Co z tego  
> wynika dla istnienia i jakości oszacowań dla w pełni wielomianowych  
> algorytmów aproksymacyjnych.(1p)"

1. że dla nich wszystkich nie istnieje lepsze oszacowanie.

2. W pełni wielomianowy aproksymacyjny schemat obliczeń (FPTAS) to taki algorytm, któremu możemy zadać dowolną skończoną małą dokładność  $\epsilon$  a on nam znajdzie rozwiązanie w granicach tej dokładności (oczywiście im lepsza dokładność tym dłużej będzie liczył - dla  $\epsilon \rightarrow 0$  robi się alg. wykładniczy). Ale jednak  $\epsilon$  jest DOWOLNIE MAŁE. I może być mniejsze od 3. A skoro dla tego problemu nie istnieje ZADEN wielomianowy alg. o oszacowaniu  $< 3$ , to FPTAS też nie.

## PROBLEM KOMISJI

problem komisji = system różnych reprezentantów = tak zwanych transwersal

przytaczając przykład z MD: komisje to dziewczynki a reprezentanci to ich koledzy  
znajomi się powtarzają ale każdy koleś może zostać tylko jednym narzeczoną (po jednym dla każdej laski)

1. problem komisji to problem że masz  $n$  komisji i  $m$  ludzi i chodzi  
żeby tak wybrać skład komisji z tych ludzi że potem jak wybierasz reprezentantów  
każdej komisji to żaden reprezentant nie może być reprezentantem > niż jednej komisji  
(ale należeć do kilku może)

2. Mamy  $n$  zbiorów  $K$  które składają się z pewnych elementów (ludzi) , dla każdego zbioru należy wybrać 1 reprezentanta z członków komisji. Należy tak dokonać wyboru by żaden członek nie reprezentował naraz dwóch komisji. (można być członkiem wielu komisji ale reprezentantem tylko 1)

3.  
Niech  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$  będzie dowolnym ciągiem zbiorów (niekoniecznie rozłącznych i niekoniecznie różnych)  
Systemem różnych reprezentantów dla  $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$  nazywamy dowolny ciąg  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  taki, że  $a_i \in A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  oraz  $a_i \notin A_j$  dla  $i \neq j$ . Mówimy, że w takim systemie różnych reprezentantów element  $a_i$  reprezentuje zbiór  $A_i$ .  
Problem istnienia i konstrukcji s.r.r. znany jest w wielu nieformalnych sformułowaniach. Jednym z nich jest tzw. "problem komisji":

Mamy  $n$  komisji, przy czym  $A_i$  jest zbiorem osób należących do  $i$ -tej komisji. Należy wybrać w każdej komisji przewodniczącego tak, by żadna osoba nie przewodniczyła więcej niż jednej komisji.

Nietrudno zauważyć, że problem komisji sprowadza się do szczególnego przypadku problemu kojarzenia małżeństw.

## PROBLEM KOJARZENIA MAŁŻEŃSTW

Mamy szereg zbiorów  $D_1 \dots D_n$  Dziewcząt które znają pewnych chłopaków i zbiory Chłopaków  $Z_1 \dots Z_n$  znających pewne dziewczyny. Problem polega na znalezieniu dla wszystkich dziewczyn jednego i różnego chłopaka w taki sposób by dziewczyna znała chłopaka i chłopak dziewczynę.

## DOMKNIĘCIE PRZECHODNIE RELACJI BINARNEJ

Domknięcie przechodnie relacji binarnej  $E$   
(transitive closure).

Wiadomo, że relację binarną  $E \subseteq V \times V$  można przedstawić jako graf zorientowany  $G = (V, E)$ . Określamy dla grafu  $G$  domknięcie przechodnie, jako:  
 $E^* = \{(x, y) : \text{istnieje w } G \text{ droga } \text{skóńczona} \text{ o niezerowej długości od } x \text{ do } y\}$ .

$E^*$  dla relacji  $E$  można też zdefiniować jako najmniejszą relację przechodnią zawierającą  $E$ , tzn. dla dowolnej relacji przechodniej  $F$ ,  $E \subseteq F$  mamy  $E^* \subseteq F$ .

Obliczanie  $E^*$  (dla danego  $E$ )

1. Przedstawić relację  $E$  w postaci grafu  $G = (V, E)$ , w którym każdy istniejący krawędź ma wagę 1.
2. Wykonać algorytm Floyd.
3.  $(v_i, v_j) \in E^* \iff D(v_i, v_j) < \infty$

Złożoność  $O(n^3)$

Można też zastosować podstawienie:

$$A[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{gdy } (v_i, v_j) \notin E \\ 1 & \text{gdy } (v_i, v_j) \in E \end{cases}$$

W algorytmie Floyd zmieniamy wówczas wiersz 8 na

$$D[i, j] := D[i, j] \vee (D[i, k] \wedge D[k, j]) \quad (\text{alg. Warshalla})$$

W wyniku:

$$D[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{gdy } (v_i, v_j) \in E^* \\ 0 & \text{gdy } (v_i, v_j) \notin E^* \end{cases}$$

## MINIMALNY GRAF TRUDNY/DOSĆ TRUDNY DLA KOLOROWANIA RS

- Algorytm RS (od Random Sequential) Porządek wierzchołków jest losowy. Współczynnik jakości w najgorszym przypadku  $S_{RS}$  jest  $O(n)$ . Graf trudny nie istnieje.

Minimalny graf dość trudny  $\textcircled{1} - \textcircled{2} - \textcircled{4} - \textcircled{3}$

## ZŁOŻONOŚĆ PROBLEMU KOLOROWANIA GRAFU

- Problem kolorowania grafu jest NP-zupełny [Karp 1972]. Problem kolorowania grafu jest NP-zupełny dla  $k \geq 3$  [Garey, Johnson, Stockmeyer 1976].
  - Znać są algorytmy o oszacowaniach jakości  $O(n(\log \log n)^2/(\log n)^3)$ , oraz  $\min\{\Theta(\Delta^{1-2/k}), \Theta(n^{1-3/(k+1)})\}$ .
  - O ile  $P \neq NP$  to dla problemu kolorowania, nie istnieje wielomianowy algorytm aproksymacyjny o oszacowaniu lepszym niż 2 [Garey, Johnson 1978].
- O ile  $P \neq NP$  to dla problemu kolorowania, wyznaczenie kolorowania  $n^\epsilon \chi(G)$  kolorami jest NP-trudne, dla dowolnego  $\epsilon > 0$ .

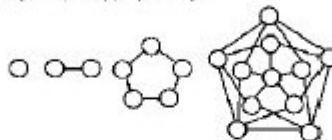
- Problem krawędziowego kolorowania grafu jest NP-trudny.

Zauważmy, że problem kolorowania krawędziowego jest trudny mimo bardzo dobrych oszacowań, dolnego i górnego.

## OGRANICZENIA NA LICZBE/INDEKS CHROMATYCZNY

### OGRANICZENIA NA LICZBĘ I INDEKS CHROMATYCZNY

- $\chi(G) \geq \omega(G)$ , bo wszystkie wierzchołki największej klikki  $G$  muszą mieć różne kolory. Istnieją jednak grafy o małej  $\omega(G)$  i dowolnie dużej liczbie chromatycznej, np. grafy Mycielskiego (g. Mycielskiego rzędu  $k$ : bez trójkątów, o  $\chi(G) = k$ ).



Grafy Mycielskiego dla  $k = 1, 2, 3, 4$

- $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$ , bo każdy kolor jest zbiorem niezależnych wierzchołków. Istnieją jednak grafy dla których to oszacowanie jest bardzo słabe np. grafy Mycielskiego  $3 > n/\alpha(G)$ .
- $\chi(G) \leq \Delta + 1$  - bo tak koloruje algorytm zachłanny.
- $\chi(G) \leq \Delta$  jeżeli,  $G$  nie zawiera klikki o  $\omega(G) = \Delta + 1$  i nie jest cyklem o nieparzystej długości. [Brook 1941]
- $\chi(G) = 2$  dla grafów dwudzielnych.
- $\chi(G) = 4$  dla grafów płaskich [Appel, Haken, 1976] (mapy).

Kolorowanie krawędziowe:

- $\chi'(G) \in \{\Delta, \Delta + 1\}$  [Vizing 1968]
- $\chi'(G) = 2$  dla grafów dwudzielnych [König 1950].

## PYTANIA

### Zadania:

- plecak programowanym dynamicznym
- wyznaczanie odległości między wszystkimi parami wierzchołków (ok 6 wierzchołków)
- minimalne drzewo rozpinające alg Flusk albo Prim
- przepływy w sieciach (górne oraz górne i dolne ograniczenie) + przykład rozwiązania dla szeregowania zadań (2 procesory, typ zadania jak na wykładzie)
- kolorowanie grafu (?)

-----

1. Algorytm floyda
2. szeregowanie zadań:

$r = [0, 2, 1, 4]$

$p = [1, 2, 3, 3]$

$d = [2, 3, 4, 5]$

Kryterium (chyba):  $P \mid r_j; p_{mtn} \mid L_{max}$

3. Co to jest problem komisji i jak się go rozwiązuje?
4. Podaj graf trudny i dość trudny do kolorowania dla metody RS.

-----

1. Plecak 10/10, ale rozmiarów elementów raczej sobie nie przypominę (3p)
2. Obliczyć przepływ maksymalny w sieci. Były podane górne i dolne ograniczenia na przepływy łukowe. Zaznaczyć gdzie jest wąskie gardło. (7p - chyba)
3. Dlaczego algorytmy pseudowielomianowe można podać jedynie dla liczbowych problemów NP-zupełnych. (2p)  
(w odpowiedzi miało się znaleźć, między innymi, stwierdzenie, że gdyby było inaczej <<istniałyby alg. pseudowielomianowe dla problemów silnie NP-zup>> oznaczałoby to  $P = NP$ . Za to już był 1 punkt)
4. Podać górne ograniczenie na liczbę chromatyczną w grafie. (1p)
5. Co to jest matroid. (tu wymagana była pełna matematyczna definicja. Lanie wody nie przeszło:) ) (2p)

-----

### grupa B:

1. Problem plecakowy
  - 10 przedmiotów / 10-pojemność plecaka
  - z tego co pamiętam to wynik (tzn. wartość) był 18, zapakowany na full (3pkt)
2. Znaleźć max.przepływ w sieci z dolnymi ograniczeniami, wyznaczyć wąskie gardła (7pkt).
  - około 5-7 wierzchołków
  - przepływ (końcowy, czyli maksymalny) wyszedł 14.
3. Dlaczego dla problemów silnie NP-zupełnych nie ma algorytmów pseudowielomianowych (2pkt).
4. Podaj znane Ci ograniczenia na liczbę chromatyczną grafu (teraz jestem pewien - to była LICZBA, grupa A miała indeks) (2pkt).
5. Co to jest domknięcie przechodnie relacji binarnej (1pkt).

**GRUPA C (1/2 I3, I4, I5)**

1. Wyznaczyć minimalną odległość między wszystkimi parami wierzchołków w grafie. Zapisać przebieg rozwiązania (4p)  
Macierz sąsiedztwa:

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	-	-	1	-	-
2	-	0	1	-	-	-
3	2	-	0	-	-	-
4	-	-	4	0	-	2
5	-	2	5	-	0	-
6	-	-	-	-	1	0

2. Rozwiązać następującą instancję problemu szeregowania na  $m=2$  identycznych procesorach równoległych,  $n=5$  zada podzielnych, o momentach gotowości  $r=[1,0,0,2,1]$ , liniach krytycznych  $d=[5,3,8,4,8]$  i czasach wykonania  $p=[2,2,3,1,2]$ , dla kryterium największego opóźnienia ( $P \mid r_j, p_{mtn} \mid L_{\max}$ ). Proszę wyznaczyć przedziały wartości kryterium  $L_{\max}$ . Wybierając wartości testowe  $L_{\max}$  proszę zwrócić uwagę na to, jakie wartości  $L_{\max}$  są dopuszczalne. (6p)

3. Co to jest problem komisji i jak można go rozwiązać? (2p)

4. Podaj graf trójdniowy do kolorowania i do trójdniowy do kolorowania dla algorytmu RS (random sequential). (2p)

5. O pewnym problemie optymalizacji kombinatorycznej wiadomo, że jeśli  $P \in NP$ , to nie istnieje dla niego wielomianowy algorytm aproksymacyjny o oszacowaniu jako ci lepszym niż 3. Co z tego wynika dla istnienia i jakości oszacowań dla w pełni wielomianowych algorytmów aproksymacyjnych. (1p)

**GRUPA D (1/2 I3, I4, I5)**

1. Wyznaczyć minimalną odległość między wszystkimi parami wierzchołków w grafie. Zapisać przebieg rozwiązania (4p)  
Macierz sąsiedztwa:

2. Rozwiązać następującą instancję problemu szeregowania na  $m=2$  identycznych procesorach równoległych,  $n=5$  zada podzielnych, o momentach gotowości  $r=[0,1,3,2,0]$ , liniach krytycznych  $d=[8,5,6,6,8]$  i czasach wykonania  $p=[2,1,1,1,4]$ , dla kryterium największego opóźnienia ( $P \mid r_j, p_{mtn} \mid L_{\max}$ ). Proszę wyznaczyć przedziały wartości kryterium  $L_{\max}$ . Wybierając wartości testowe  $L_{\max}$  proszę zwrócić uwagę na to, jakie wartości  $L_{\max}$  są dopuszczalne. (6p)

Jak rozpocząć? Wyznaczyć przedziały  $L_{\max}$  i zobaczyć, które wartości są dopuszczalne, namalować uszeregowanie.



3. Co to jest problem kojarzenia małżeństw i jak można go rozwiązać ?  
(2p)
4. Poczynając od jakiej liczby kolorów problem liczby chromatycznej jest obliczeniowo trudny? Co można powiedzieć o oszacowaniu jakości algorytmów aproksymacyjnych rozwiązujących ten problem?(2p)
5. Co to jest w pełni wielomianowy schemat obliczeń ?(1p)