ELEKTRONIKA

Podstaw Elektroniki

Obliczanie liniowych obwodów rozgałęzionych

Wydział Informatyki
Politechniki Szczecińskiej

Pojęcia wstępne

W teorii obwodów elektrycznych bada się różne zjawiska powstałe w wyniku przepływu prądu elektrycznego. W obwodach elektrycznych najczęściej wymuszeniem (przyczyna zewnętrzna) jest napięcie źródłowe, a odpowiedzią prąd lub wielkość zależna od prądu. Rozpatrywamy obwody rozgałęziony o wymuszeniach stałych (niezależnych od czasu). W obwodach tych dane są zazwyczaj rezystancje wszystkich gałęzi oraz wymuszenia (idealnych źródeł napięcia lub prądu – rezystancja wewnętrzna obwodu jest pomijalna). Do obliczanie obwodów rozgałęzionych stosuje się różnych metod m.in. *metoda superpozycji, metoda przekształcenia sieci* (w literaturze) oraz inny metody które zostaną omawiany m.in.:

Metoda praw Kirchhoffa

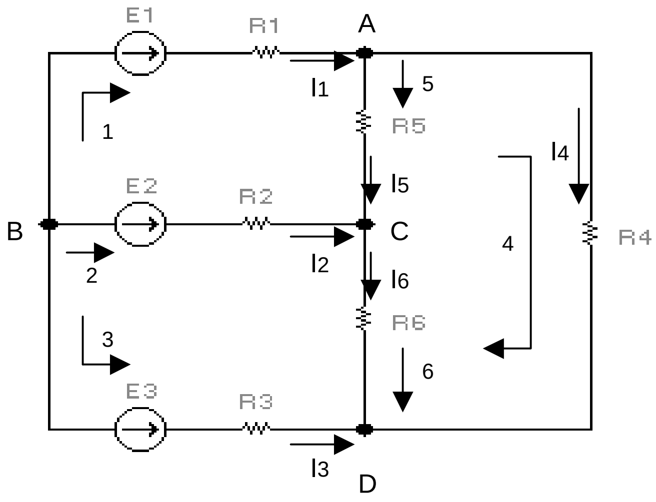
Metoda oczkowa

Metoda potęcjałów węzłowych

Metoda źródła zastępczego (Twierdzenie Nortona i Twierdzenie Thevenina)

Metoda praw Kirchhoffa

Rozwiązywania obwodów rozgałęzionych metodą praw kirchhoffa złożonych z ***n-*** gałęzi tworzących ***w-*** węzłów dokonujemy w następujący sposób:



1. Przejmujemy dowolnie zwroty prądów we wszystkich gałęziach obwodu,

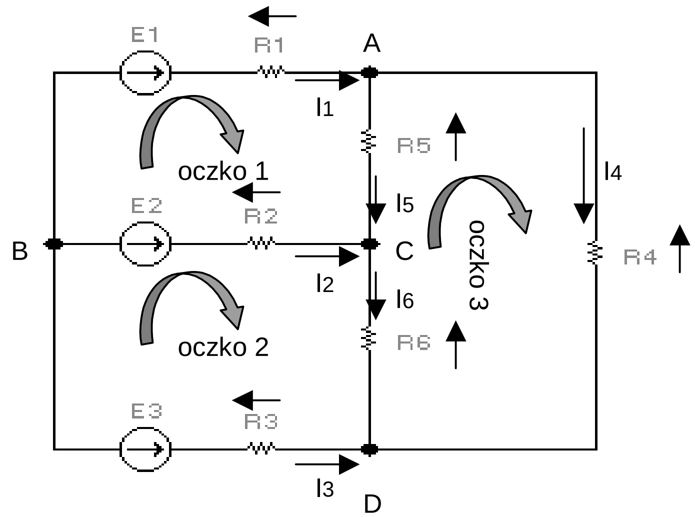
2. Układamy, korzystając z pierwszego prawa Kirchhoffa (dla węzłów), (w – 1) równań,

3. Układamy, korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa (dla oczek), $m = n - (w - 1)$ równań.

Liczba gałęzi w obwodzie na rysunku jest 6 (BA, BC, BD, AD, AC, CD) a liczba węzłów jest 4 (A, B, C, D). Układanie równań z punktu 2 (w - 1) wynika że dla ostatniego węzła przy układanie równań dla prądów został już ułożony. Całkowita liczba równań musi odpowiadać liczbie niewiadomych prądów gałęziowych n, Jeżeli po rozwiązywaniu układu równań okaże się, że jeden z prądów jest ujemny, to fakt ten oznacza, że jego zwrot założono przeciwnie do rzeczywistego zwrotu.

Z założeń podanych wynika ze mamy 3 równania węzłowych (w –1 ⇔ 4 - 1 = 3) i 3 równania oczkowy ($m = n - (w - 1)$ ⇔ m= 6 – (4 –1) =3). Patrz rózwiązanie

Rozwiązywania obwodu
Metodą praw Kirchhoffa



Węzeł A $I_1 - I_5 - I_4 = 0$

Węzeł C $I_2 + I_5 - I_6 = 0$

Węzeł D $I_3 + I_6 + I_4 = 0$

Oczko 1 $E_1 - R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_2 I_2 - E_2 = 0$

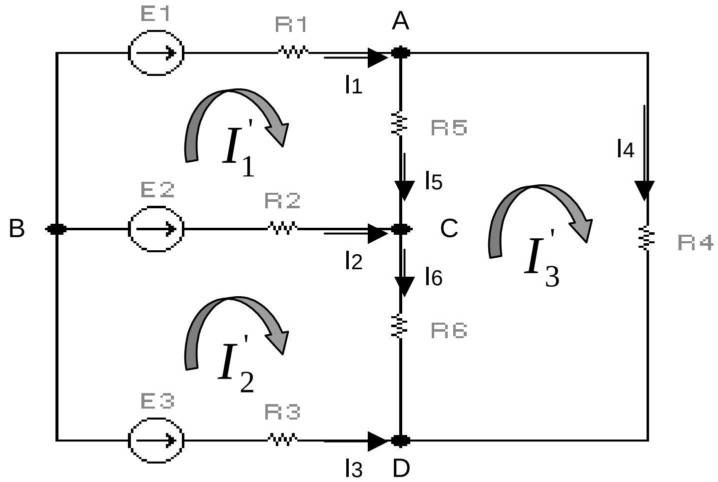
Oczko 2 $E_2 + R_2 I_2 - R_6 I_6 - R_3 I_3 - E_3 = 0$

Oczko 3 $R_5 I_5 + R_6 I_6 - R_4 I_4 = 0$

Rozwiązywania obwodów rozgałęzionych metodą praw Kirchhoffa można stosować dla dowolnych sieci. Jednak metoda ta staje się skomplikowana wraz z wzrostem liczby gałęzi sieci. Wskutek tego w praktyce stosuje się szereg metod łatwiejszych. Kierunki spadki napięcia na poszczególnych rezystorów musi być odwrotna do kierunku dobranego prądu.

Metoda oczkowa

Metoda oczkowa jest metodą szeroko stosowaną w praktyce. Metoda ta polega na tym, że zamiast prądów gałęziowych oblicza się tzw. prądy oczkowe zamykające w niezależnych oczkach sieci (umyślone prądy oczkowe – cykliczne). Prądy rzeczywiste stanowią wtedy sumą lub różnicy prądów umyślonych (prądy oczkowe).



Rozwiązywania obwodów rozgałęzionych metodą oczkową sprowadza się wtedy tylko do rozwiązania układu złożonego z m niezależnych równań. Rozwiązania obwodu dokonujemy w następujący sposób:

1. Przejmujemy dowolnie zwroty prądów rzeczywistych we wszystkich gałęziach obwodu,

2. Ustalamy dowolny zwroty prądów oczkowych (prądy umyślne) i oznaczamy te prądy jako

$I_1^{'}, \; I_2^{'}, \; I_3^{'},$

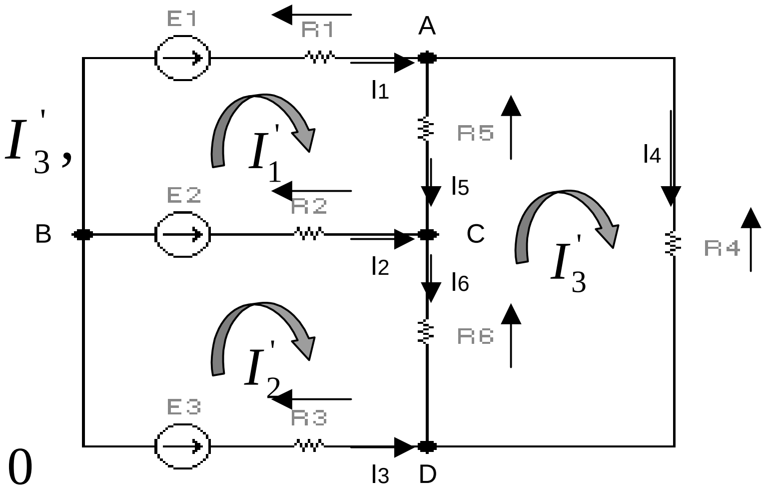
3. Ustalamy prądy w gałęziach wspólnych dla każde z sąsiednich dwóch oczkach,

4. Układamy, korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa (dla oczek), $m = n - (w - 1)$ równań.

Patrz rózwiązanie

Rozwiązywania obwodu
Metodą oczkową

Krok 1 - Zgodnie z punktu 3 prądy gałęziowych wspólne dla dwóch sąsiednich oczkach są: $I_2 = -I_1^{'} + I_2^{'},\ I_5 = I_1^{'} - I_3^{'},$ $I_6 = I_2^{'} + I_3^{'},$



Krok 2 – wznaczanie prądy wewnątrz oczka:
$I_1 = I_1^{'},\ I_3 = -I_2^{'},\ I_4 = I_3^{'}$

Krok 3 – wyznaczamy 3 równań dla 3 oczek.

Oczko 1 $\mathrm{E}_1 - R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_2 I_2 - E_2 = 0$

Oczko 2 $\mathrm{E}_2 + R_2 I_2 - R_6 I_6 - R_3 I_3 - E_3 = 0$ Oczko 3 $R_5 I_5 + R_6 I_6 - R_4 I_4 = 0$

Krok 4 – prądy rzeczywisty zastępujemy prądamy umyślnimi:

Oczko 1 $\mathrm{E}_1 - R_1 I_1^{'} - R_5 (I_1^{'} - I_3^{'}) - R_2(-I_1^{'} + I_2^{'}) - E_2 = 0$

Oczko 2 $\mathrm{E}_2 + R_2(-I_1^{'} + I_2^{'}) - R_6 (I_2^{'} - I_3^{'}) - R_3 (-I_2^{'}) - E_3 = 0$

Oczko 3 $R_5 (I_1^{'} - I_3^{'}) + R_6 (I_2^{'} - I_3^{'}) - R_4 I_3^{'} = 0$

Krok 5 – po przekształceniu równań otrzymujemy 3 równania z trzema niewiadomymi:

Oczko 1 $(R_1 + R_2 + R_5) I_1^{'} - R_2 I_2^{'} - R_5 I_3^{'} = E_1 - E_2$

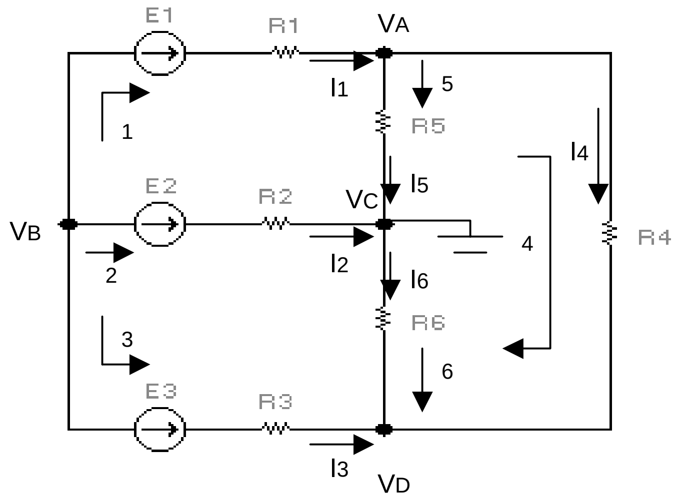
Oczko 2 $-R_2 I_1^{'} + (R_2 + R_3 + R_5) I_2^{'} - R_6 I_3^{'} = E_2 - E_3$

Oczko 3 $-R_5 I_1^{'} - R_6 I_2^{'} + (R_4 + R_5 + R_6) I_3^{'} = 0$

Krok 6 – wyznaczamy prądy $I_1^{'},\ I_2^{'},\ I_3^{'},$ a następnie wystawiamy do wzorów na prądy rzeczywisty (krok 1 i krok 2).

Metoda potęcjałów Węzłowych

Metoda potęcjałów węzłowych jest metodą mało stosowaną w praktyce. Metoda ta polega na tym, że jeden z węzłów w danym obwodzie można równać go do zera (oziębienia układu). Rozwiązywania obwodów rozgałęzionych metodą potęcjałów węzłowych sprowadza się wtedy tylko do rozwiązania układu złożonego z m niezależnych równań względem liczbie potencjałów węzłówych - jeden. Rozwiązania obwodu dokonujemy w następujący sposób:



1. Przejmujemy dowolnie zwroty prądów rzeczywistych we wszystkich gałęziach obwodu (kolor niebieski),

2. Ustalamy dowolny kierunek dla każdej z gałędzi (1,2,3,4,5,6 – kolor zielony), w celu obliczanie równanie (różnicy potęcjałów),

3. Piszemy zgodnie z prawem Kirchhoffa (pierwsze prawo) bilans prądów w węźle A, B, C,

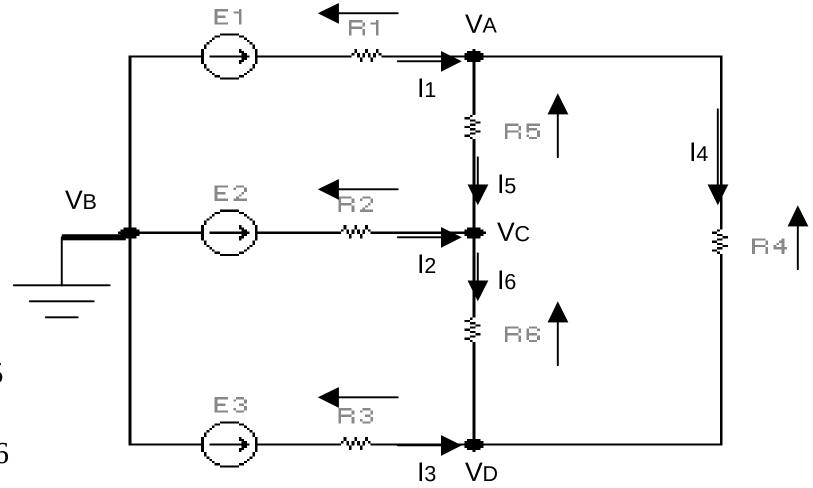
4. Wyznaczamy z równań punktu drugiego prądy i wstawiamy je do równań punku trzeciego),

5. Wznaczamy tyle równań względem potęcjałów ile ich jest minus jeden i obliczamy ich wartości (zalecane zamiana rezystancji na kondukcjancji $G_n = 1/R_n$),

6. Wstawiamy wartości potęcjałów z punktu 5 do równań punktu 2 i obliczamy prądy. *Patrz rozwiązanie*

Rozwiązywania obwodu
Metodą potencjałów węzłowym

Krok 1 - wyznaczamy 6 równań dla 6 różnic potencjałów(VB =0).



$$E_1 - R_1 I_1 - V_A = 0 \Leftrightarrow E_1 - R_1 I_1 = V_A$$

$$E_2 - R_2 I_2 - V_C = 0 \Leftrightarrow E_2 - R_2 I_2 = V_C$$

$$E_3 - R_3 I_3 - V_D = 0 \Leftrightarrow E_3 - R_3 I_3 = V_D$$

$$(V_A - V_C) - R_5 I_5 = 0 \Leftrightarrow V_A - V_C = R_5 I_5$$

$$(V_C - V_D) - R_6 I_6 = 0 \Leftrightarrow V_C - V_D = R_6 I_6$$

$$(V_A - V_D) - R_4 I_4 = 0 \Leftrightarrow V_A - V_D = R_4 I_4$$

Krok 2 - wyznaczamy prądy węzłowy w punkcie V_A, V_C, V_D zgodnie z 1 prawa Kirchhoffa

$$I_1 - I_5 - I_4 = 0, \quad I_2 + I_5 - I_6 = 0, \quad I_3 + I_6 + I_4 = 0$$

Krok 3 – z pierwszego kroku wyznaczamy równań prądów węzłowych i wystawiamy do równań kroku 2.

$$\frac{E_1 - V_A}{R_1} - \frac{V_A - V_C}{R_5} - \frac{V_A - V_D}{R_4} = 0, \quad \frac{E_2 - V_C}{R_2} + \frac{V_A - V_C}{R_5} - \frac{V_C - V_D}{R_6} = 0, \quad \frac{E_3 - V_D}{R_3} + \frac{V_C - V_D}{R_6} + \frac{V_A - V_D}{R_4} = 0$$

Krok 4 – wstawiając za $1/R_1 = G_1$, itd. do $1/R_6 = G_6$ otrzymujemy 3 równania względem V_A, V_C, V_D:

$$+(G_1 + G_5 + G_4)V_A - G_5 V_C - G_4 V_D = E_1,$$

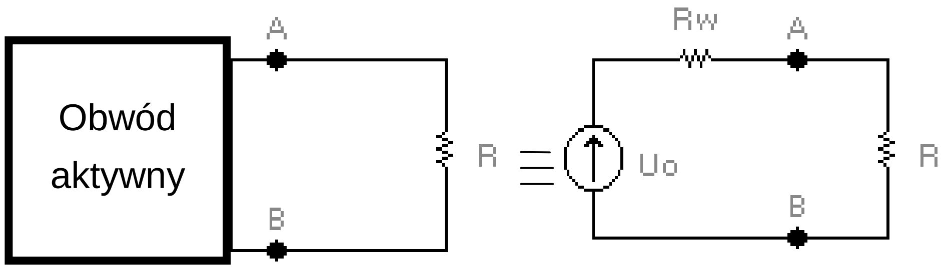
$$-G_5 V_A + (G_2 + G_5 + G_6)V_C - G_6 V_D = E_2,$$

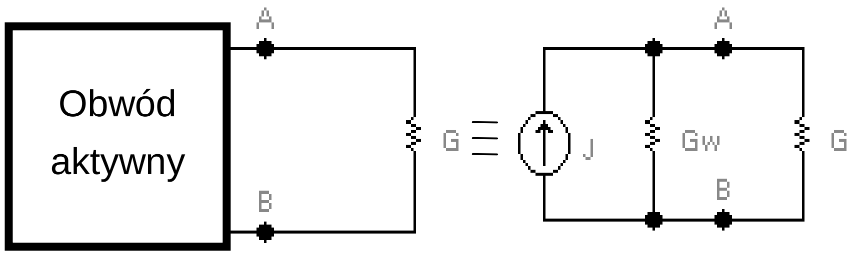
$$-G_4 V_A - G_6 V_C + (G_3 + G_4 + G_6)V_D = E_3,$$

Krok 5 – wyznaczamy potencjały V_A, V_C, V_D a następnie wystawiamy do wzorów (krok 1) i wyznaczamy prądy.

Metoda źródła zastępczego Twierdzenie Thevenina i Nortona

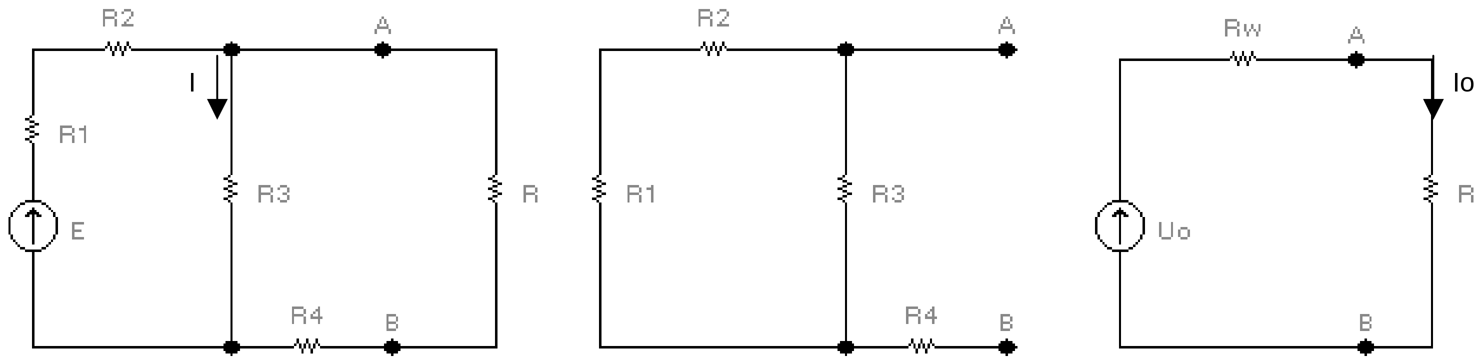
Twierdzenie Thevenina. Prąd w dowolnej gałęzi AB, dołączonej do aktywnej sieci elektrycznej nie ulegnie zmianie, jeżeli sieć tę zastąpi się równoważnym źródłem napięcia, którego wartość jest równa napięciu na zaciskach otwartej gałęzi AB. Rezystancja wewnętrzna R_w tego źródła jest równa rezystancji sieci pasywnej widzianej od strony zacisków otwartej gałęzi AB.Patrz przykład





Twierdzenie Nortona. Prąd w dowolnej gałęzi AB, dołączonej do aktywnej sieci elektrycznej nie ulegnie zmianie, jeżeli sieć tę zastąpi się równoważnym źródłem prądu, którego wydajność jest równa prądowi, jaki popłynąłby między zaciskami AB przy ich zwarciu. Rezystancja wewnętrzna R_w tego źródła jest równa rezystancji sieci pasywnej widzianej od strony zacisków otwartej gałęzi AB.Patrz przykład

Rozwiązywania obwodu
Metodą Thevenina



Zastosowanie tej metodzie umożliwia wyznaczenie wartości prądu płynącego w danej gałęzi, bez konieczności ułożenia i rozwiązania określonego układu równań.

Krok 1 – Przy odłączonym R, w obwodzie płynie prąd. Napięcie Uo, występujące między zaciskami AB, jest równe spadkowi napięcia na rezystancji R_3:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}, \qquad U_0 = R_3 I = R_3 \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3},$$

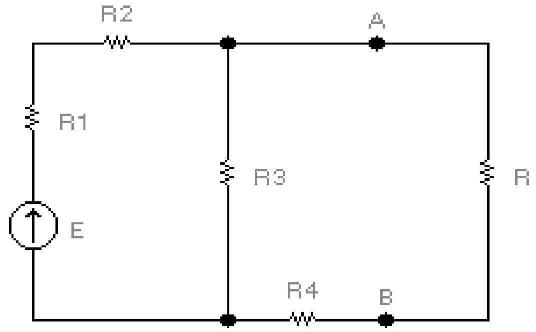
Krok 2 – obliczamy rezystancja wewnętrzna obwodu mierzona miedzy zaciskami AB.

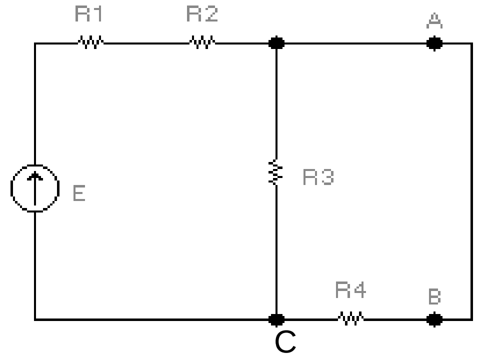
$$R_w = R_4 + \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

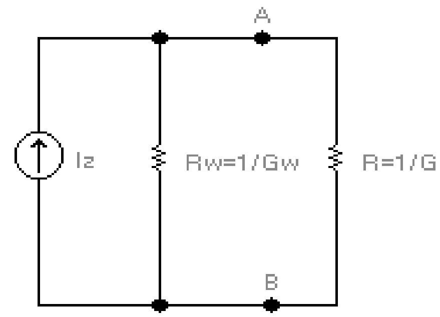
Ostatecznie prąd I_0 płynące przez R jest równe

$$I_0 = \frac{U_0}{R_w + R}$$

Rozwiązywania obwodu
Metodą Nortona







Krok 1 – Przy odłączonym R, w celu określenia prądu Io przepływającego przez konduktancję G należy obliczyć najpierw rezystancję obwodu przy zwarciu zacis ków wyjściowych AB.

$$R_z = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4},$$

Krok 2 – obliczamy rezystancja między punktami AC, prąd płynący ze źródł a napięcia i napięcie między punktami AC.

$$R_{AC} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}, \qquad I = \frac{E}{R_z}, \qquad U_{AC} = R_{AC} I$$

Krok 3 – między zwartymi zaciskami AB płynie prąd o wartości równej prąd owi źródłowemu idealnego źródła prądu.

$$I_z = \frac{U_{AC}}{R_4}, \qquad G_w = \frac{1}{R_3}, \qquad G = \frac{1}{R}$$

Krok 4 – zgodnie z zasadą dzielnika prądu, prąd rozdziela się między gałęzi wprost proporcjonalnie do G_w i G.

Krok 5. Ostatecznie prąd Io płynące przez konduktancję G jest równe:

$$I_0 = I_z \frac{G}{G_w + G}$$