ELEKTRONIKA

Podstaw Elektroniki

Obwody prądu przemiennego

Wydział Informatyki
Politechniki Szczecińskiej

Klasyfikacja prądów zmiennych

W układach elektrycznych prądu stałego energię elektryczną wytwarza się przy napięciu równym napięciu odbiorników, układy taki przy większych mocach i odległościach przesyłu powoduje duże straty energii. Prąd zmienny umożliwia w łatwy sposób podwyższać lub obniżać napięcia, wysyłać energia na dużych odległości dzięki transformatorów.

Prąd zmienny w odróżnieniu od prądu stałego, jego natężenie i biegunowość lub tylko natężenie zmieniają się w czasie.

$$i = \frac{dq}{dt} = f(t) \neq const$$

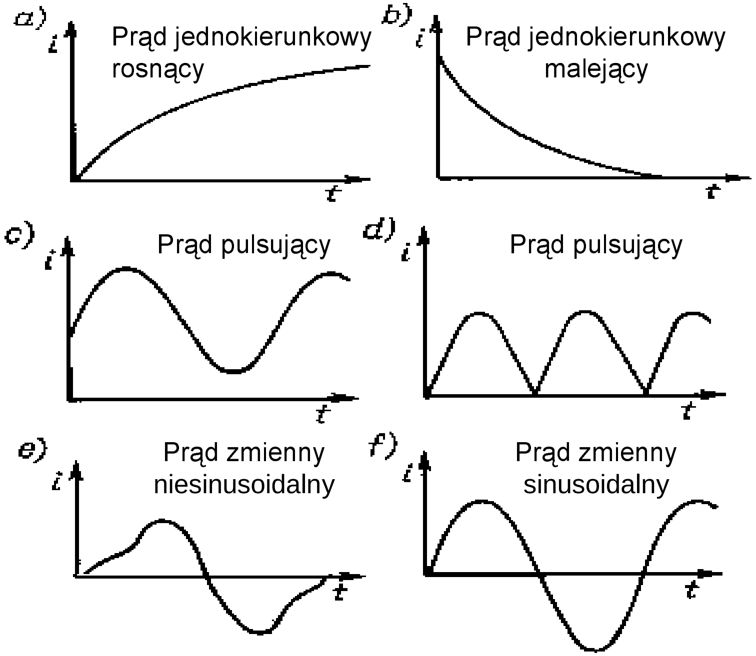
Zmiana w czasie może odbywać się w dowolny sposób i dlatego w zależności od sposobu tych zmian rozróżnia się następujące rodzaje prądów:

Prąd jednokierunkowy – zmienia w czasie wartość, lecz nie zmienia biegunowości. przykładowo przy włączaniu cewki do napięcia stałego rośnie prąd jednokierunkowy a przy zwarciu maleje.

Prąd dwukierunkowy - zmienia w czasie wartość i biegunowość.

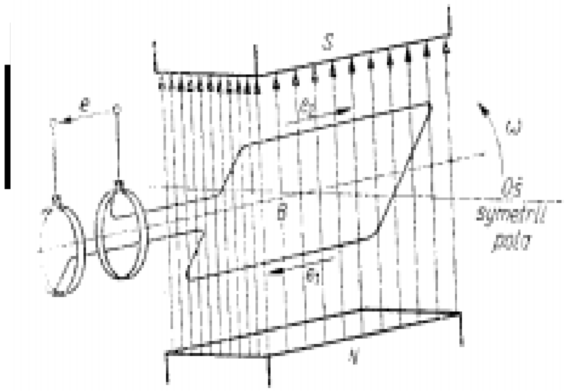
Prąd pulsujący – Powstaje on z nałożenia prądu stałego oraz prądu okresowego dwukierunkowego.

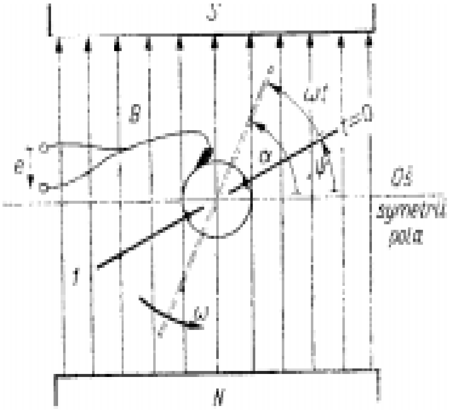
Prąd sinusoidalnie zmienny – prąd przemienny o zmianach okresowych w kształcie sinusoidy.

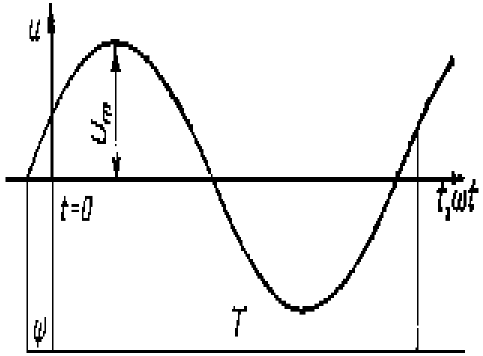


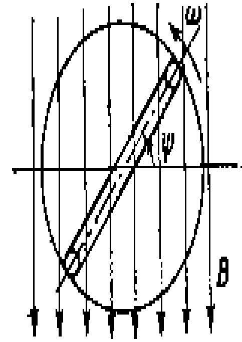
Prąd sinusoidalny

Właściwości funkcji sinusoidalnej - napięcia i prądu zmienia się w czasie zgodnie z wartości kąta sinusa od 0 do 360^o. Prąd zmienny powstaje w wyniku wymuszonego ruchu obrotowego zespołów prądotwórczych. Sinusoidalnie przebieg funkcji napięcia można zapisać w postaci :









Wielkości sinusoidalne można ją określić przez podanie trzech wielkości: amplitudy, częstotliwości i kąta fazowe. W przypadku gdzie badany są dwa przebiegi sinusoidalnych o jednakowej pulsacji i różnych kątach fazowych to przesunięcia fazowe prądu względem napięcia jest równa różnicy ich argumentów.

Wartość chwilowa napięcia

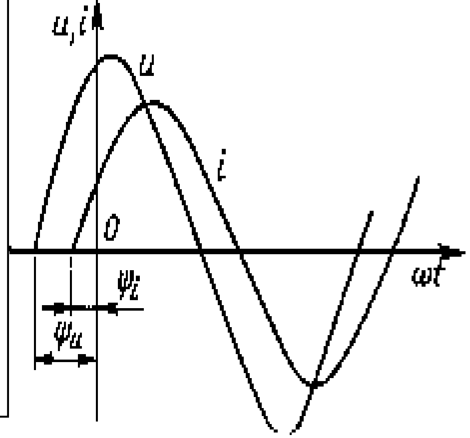
$$e = u = z\omega Bld \cos \omega t$$

$$u = U_m \sin(wt + \Psi)$$

Amplituda funkcji

Kąt fazowy

pulsacja $w = \frac{2\pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$



$$u = U_m \sin(wt + \Psi_u),$$

$$i = I_m \sin(wt + \Psi_i)$$

$$\varphi = (wt + \Psi_u) - (wt + \Psi_i) = \Psi_u - \Psi_i$$

Wartość skuteczna prądu sinusoidalnego

Wartość skuteczna prądu i napięcia zmiennego jest to taka wartość prądu (napięcia) stałego, który płynąc w określonym czasie przez określony odbiornik, wydzieliłby tę samą ilość energii co prąd (napięcia) zmienny, płynący przez ten odbiornik w tym samym czasie.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$$

Dla prądu sinusoidalnego $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)\,dt}$$

Podstawiając $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$

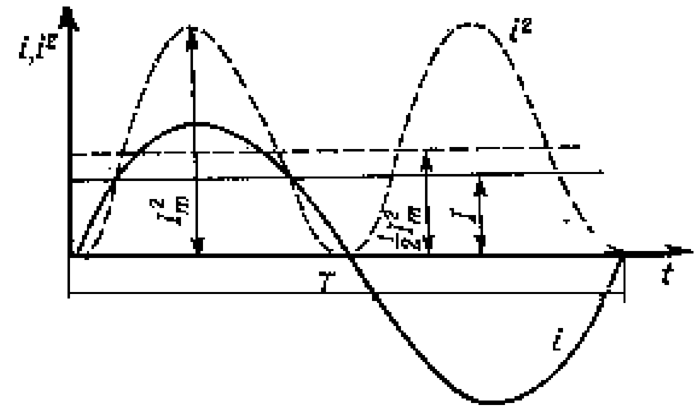
$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2(\omega t + \varphi)\right]dt} = I_m\sqrt{\frac{1}{2T}\left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2(\omega t + \varphi)\,dt\right]} = \sqrt{\frac{1}{2T}\left[t\right]_0^T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\int_0^T \cos 2(\omega t + \varphi)\,dt} = \left[(1/2\omega)\sin 2(\omega t + \varphi)\right]_0^T = (1/2\omega)\sin 2\omega T = (1/2\omega)\sin(2\pi/T)/T = 0$$

Wartość skuteczna prądu sinusoidalnego jest zatem $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ razy mniejsza od od wartości maksymalnej

Podobne zależności można napisać dla sinusoidalnie zmiennych przebiegów E i U.

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$



Elementy obwodów prądu sinusoidalnego

Elementy R, L, C – dowolny przewód lub układ przewodów można scharakteryzować trzema parametrami charakteryzującymi się następującymi właściwościami:

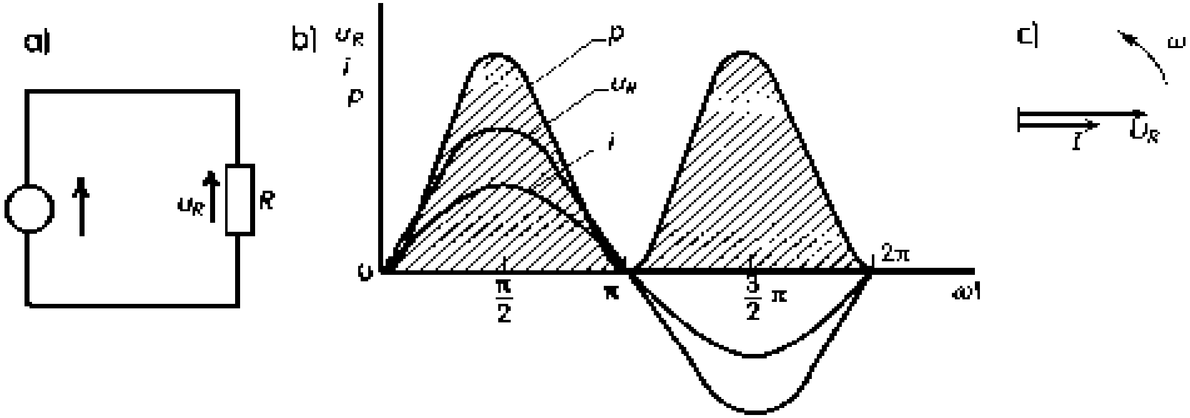
R - rezystancja (rozpraszanie energii elektrycznej,

L – indukcja (magazynowanie energii pola magnetycznego),

C – pojemności (magazynowanie energii pola elektrycznego).

Elementy R, L, C są nazywane idealnymi w tym sensie że są oni od siebie niezależne oraz że zależność między napięciem na ich zaciskach a prądem jest liniowa (ich wartość jest niezależna od pulsacji oraz od amplitudy prądu lub napięcia) .

Opornik idealny

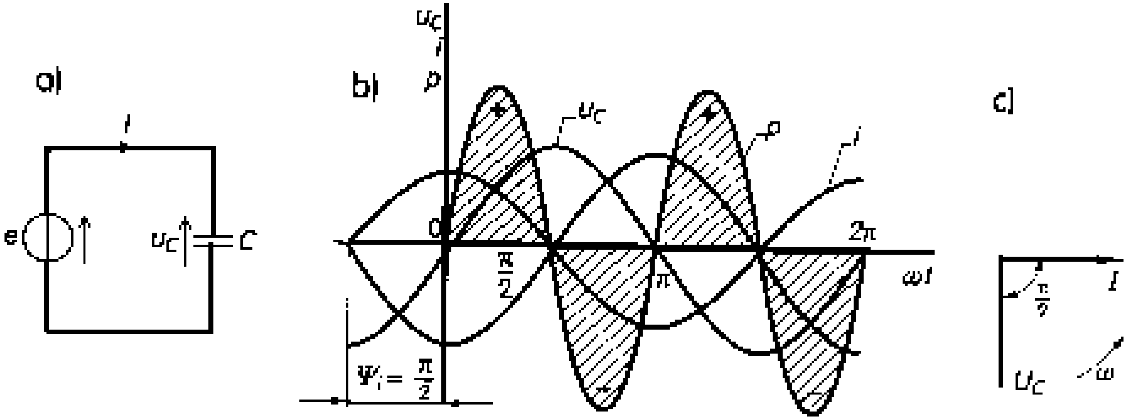


Obwód prądu zmiennego z elementem rezystancyjnym

Opornik idealny – W obwodzie prądu przemiennego zawierającym opornikiem, wartość chwilową napięcia jest: $u = U_m \sin \omega t$ Zgodnie z prawem Ohma prąd płynący jest:

$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$, który ma tę samą fazę co napięcie, kąt fazowy między ***u*** i ***i*** =0

Kondensator idealny



Obwód prądu zmiennego z idealną kondensatorem

kondensator idealny – W obwodzie prądu przemiennego zawierającym (kondensator idealny) wraz ze zmianą napięcia na okładzinach zmienia się jego ładunek elektryczny.

Przyrost ładunku w czasie jest : $dq = idt\,, \quad q = Cu$

przyrostowi ładunku *dq* odpowiada przyrost napięcia *du* w czasie *dt:*

$dq = Cdu \;\Leftrightarrow\; i = C\, du/dt$ Jeżeli kondensator jest włączony do napięcia *u* to:

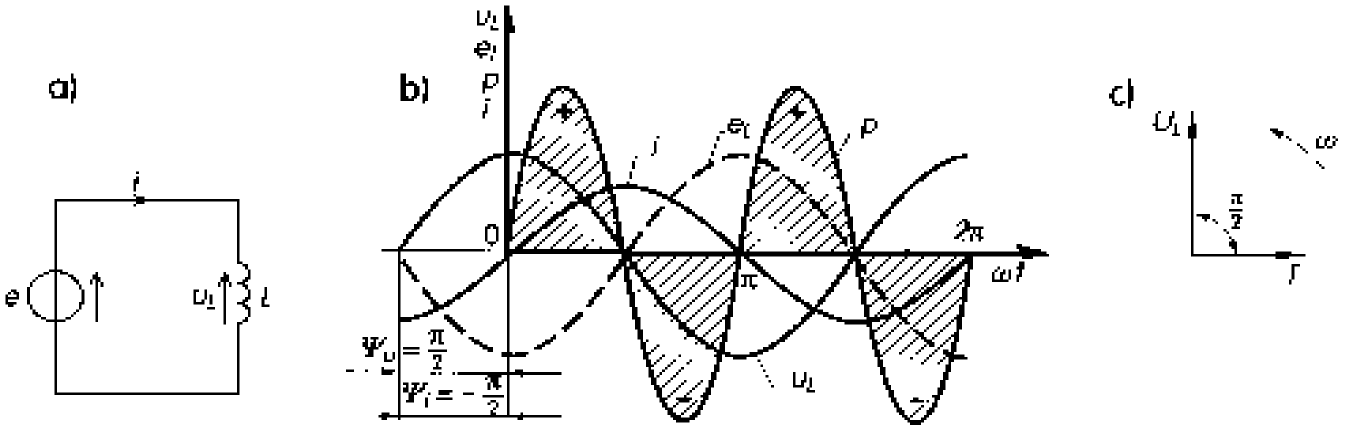
$$i = C\frac{du}{dt} = C\frac{d}{dt}(U_m \sin \omega t) = C\omega U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

prąd ładowania kondensatora wyprzedza napięcie o kąt fazowy równa $\pi/2$

z równania na prąd wynika, że amplituda prądu ładowania wynosi: $I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{1/\omega C} = \frac{U_m}{X_c}$

gdzie Xc nazywamy ***reaktancją pojemnościową*** kondensatora

Cewka idealna



Obwód prądu zmiennego z idealną cewką

Cewka idealna – W obwodzie prądu przemiennego zawierającym cewką płynie prąd, którego zmiana w czasie spowoduje indukowanie się na zaciskach cewki siły elektromotorycznej samoindukcji: $e_L = -L\frac{di}{dt}$

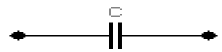
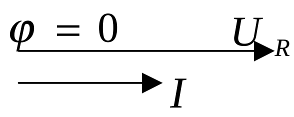
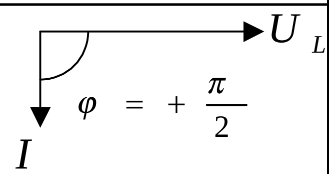
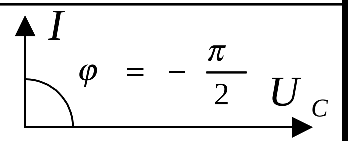
$$u = -e_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_m \sin\omega t) = L\omega I_m \cos\omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

napięcie ***u*** na zaciskach cewki wyprzedza w fazie przepływający przez nią prąd ***i*** o kąt fazowy równa $\pi/2$

Z równania na napięcia wynika, że amplituda napięcia wynosi: $U_m = \omega L I_m = X_L I_m$

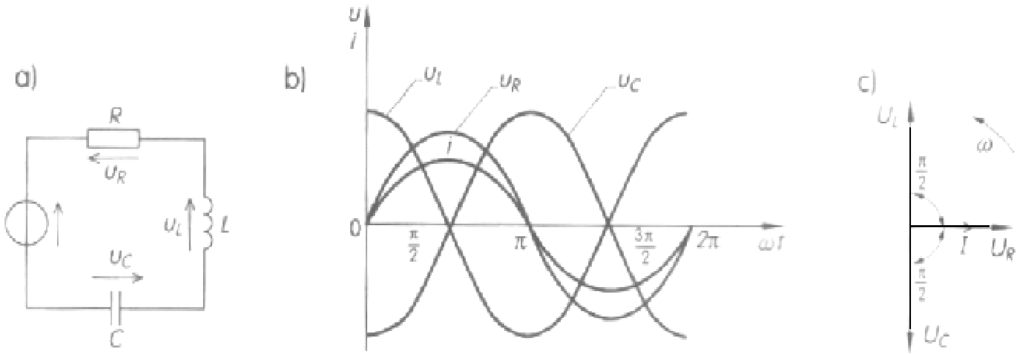
gdzie $\boldsymbol{X_L}$ nazywamy ***reaktancją indukcyjną.***

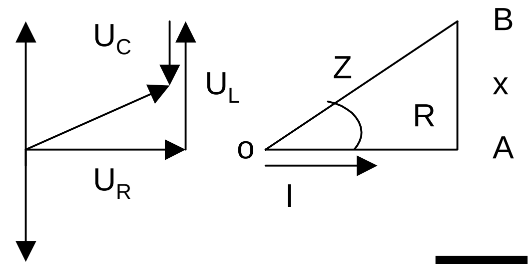
Elementy R, L, C w obwodach prądu sinusoidalnego

Dwójnik	*Opornik*	*Cewka*	*Kondensator*
Symbol			
Zależność prądowo-napięciowa	$U = Ri$	$U = L\frac{di}{dt}$	$U = \frac{1}{C}\int idt$
Gdy dane jest napięcie To prąd Wartość skuteczna	$U_R = U_m \sin\omega t$ $i = \frac{U_m}{R}\sin\omega t$ $I = \frac{U}{R}$	$U_L = U_m \sin\omega t$ $i = \frac{U_m}{\omega L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ $I = \frac{U}{\omega L}$	$U_C = U_m \sin\omega t$ $i = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ $I = \omega CU$
Rezystancja reaktancja	R ---	--- $X_L = \omega L$	---- $X_L = {}^{1}\!/_{\omega C}$
Wektorowo przesunięcie fazowe			
Kąt fazowy $\varphi = \psi_u - \psi_i$	0	$+\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
Moc (czynna, bierna indukcyjno - pojemnościowa	$P = U_R I = RI^2$	$Q_L = U_L I = X_L I^2$	$Q_C = U_C I = X_C I^2$

Szeregowo połączenie Elementów R,L,C w obwodach prądu sinusoidalnego

Podobnie jak w obwodach prądu stałego, w obwodach prądu przemiennego zachodzi konieczność sumowania napięć lub prądów. Do tych celów można wykorzystać prawa Kirchoffa pod warunkiem, że posługujemy się tylko wartościami chwilowymi prądu i napięcia.





Budowa Wykresu wektorowego: prąd I jako wektor wyjściowy odkłada się zgodnie z dodatnim kierunkiem osi x. U_R jest w fazie z prądem I. U_L wyprzedza w fazie I o $+\pi/2$ a U_C jest przesunięty w stosunku do I o $-\pi/2$. U_li U_C Są przesunięty wobec siebie o π. Napięcia wypadkowe oraz kąt przesunięcia fazowego oblicza się z zależności geometrycznych

$$U=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2},\ \text{lub}\ U=\sqrt{RI^2+(X_L-X_C)^2I^2}$$

$$U=I\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2},\quad U=ZI,$$ → Prawo Ohma

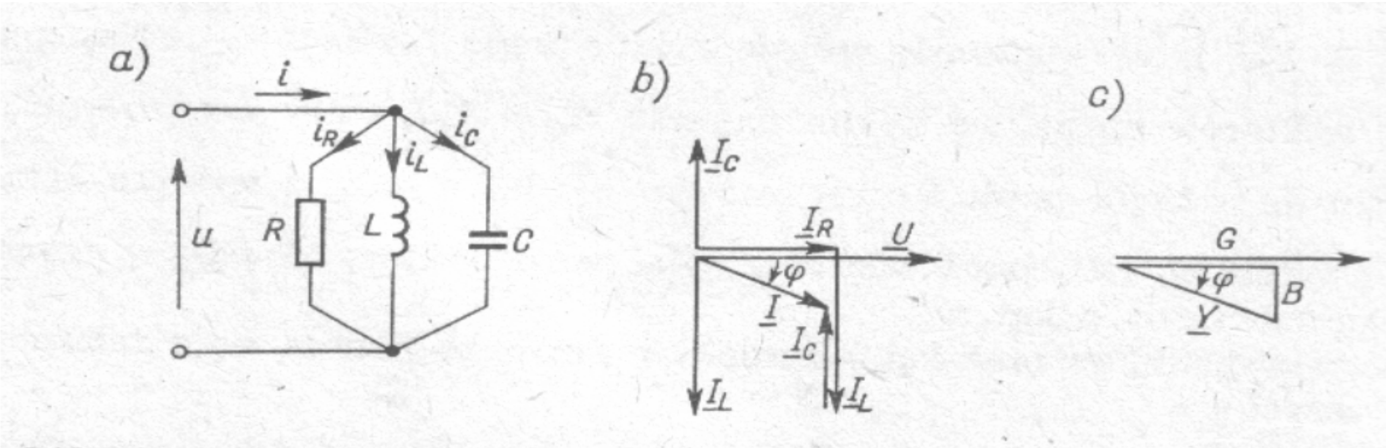
$$\text{gdzie}: Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$$ → Impedancją lub Opór pozorny

$$X=X_L-X_C=\omega L-\frac{1}{\omega C},$$ → Reaktancja

$$\varphi=arctg\,\frac{X_L-X_C}{R}$$ → Kąt przesunięcia fazowego

Równoległe połączenie Elementów R,L,C w obwodach prądu sinusoidalnego

Wartość chwilowa prądu płynącego z sieci jest równa sumie wartości chwilowych prądów poszczególnych odbiorników.



Według pierwszego prawa Kirchoffa: $i = i_R + i_L + i_C\,,\ u = U_m \sin \omega t,\ i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

Budowa Wykresu wektorowego: napięcia U jako wektor wyjściowy odkłada się zgodnie z dodatnim kierunkiem osi x. I_R jest w fazie z prądem U. I_L opóżnia się w fazie do U o kąt π/2 a I_C wyprzedza w U o kąt π/2. I_li I_C Są przesunięty wobec siebie o π. prąd wypadkowe oraz kąt przesunięcia fazowego oblicza się z zależności geometrycznych.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}\ ,\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{I_c} - I_L}{I_R}$$

Wprowadzając na miejsce rezystancji i reaktancji odpowiednie przewodności.

$$G = \frac{1}{R}\,(konduk\mathrm{tan}cja),\ B_L = \frac{1}{\omega L}\,(suscept.\ ind.),\ B_C = \omega C\,(suscept\ poj.)$$

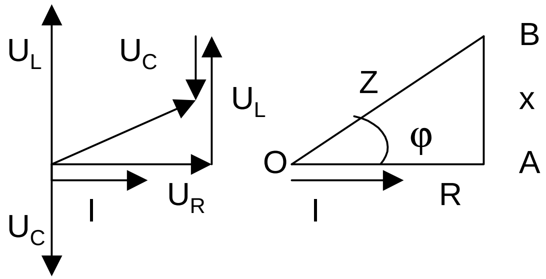
Otrzymujemy: $I = \sqrt{(GU)^2 + (B_C - B_L)^2 U^2} = U\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = UY$

$\mathrm{gdzie}\ : \mathrm{Y} = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$ ⇒ Admitancją lub przewodnością pozorny

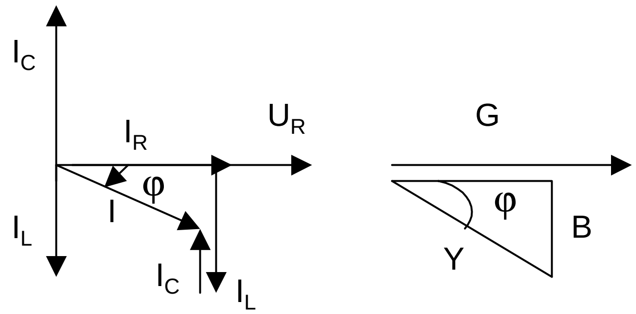
$B = B_C - B_L$ ⇒ Susceptancja wypadkowa

$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ ⇒ Admitancja

Wektorowo połączenie Szeregowo i równoległy elementów R,L,C w obwodach P.S



wektorowo połączenie Szeregowo



wektorowo połączenie Równoległy

W obwodach szeregowych wszystkie wektory napięć są proporcjonalne do prądu I. Dzieląc wektory napiec przez prąd otrzymujemy trójkąt OAB.

W zależności od znaku reaktancji:

$X \rangle 0$ i $X_L \rangle X_C$ to Prąd ma charakter indukcyjny, U wyprzedza I.

$X \langle 0$ i $X_L \langle X_C$ to Prąd ma charakter pojemnościowy i wyprzedza U.

$X = 0$ i $X_L = X_C$ to napięcia jest w fazie z prądem.

W obwodach równoległych wszystkie wektory prądów są proporcjonalne do napięcia U. Dzieląc wektory prądu przez napięcia U otrzymujemy trójkąt.

W zależności od znaku susceptancji:

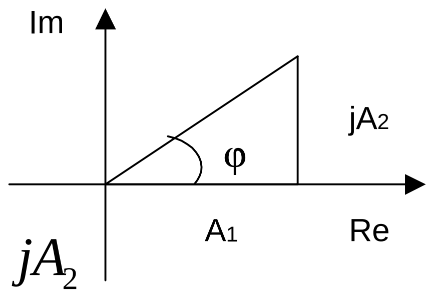
$B \rangle 0$ i $B_C \rangle B_L$ to Prąd całkowity ma charakter pojemnościowy, prąd wyprzedza napięcia.

$B \langle 0$ i $B_C \langle B_L$ to Prąd całkowity ma charakter indukcyjny, prąd opóźnia się względem napięcia.

$B = 0$ i $B_C = B_L$ to prąd całkowity ma charakter rezystancyjny napięcia jest w fazie z prądem.

Obliczanie obwodów prądu sinusoidalnego metodą symboliczną

W analizie obwodów prądu stałego równania mogły być napisane i rozwiązane bezpośrednio środkami zwykłej algebry. W obwodach prądu przemiennego postać algebraiczna musi zawierać informacje co do amplitudy i fazy wielkości zmiennej w czasie. Algebra liczb zespolonych jedynie nadaje się do rozwiązanie obwodów prądu przemiennego . Liczby zespolony można zapisać :



a) Postać algebraiczna: $\underline{A} = A_1 + jA_2, \quad j = \sqrt{-1}$

a) Postać trygonometryczna: $\underline{A} = A(\cos\alpha + j\sin\alpha)$

a) Postać wykładnicza: $\underline{A} = Ae^{j\alpha} = A(\cos\alpha + j\sin\alpha) = A_1 + jA_2$

$$\underline{A} = Ae^{\pm j\frac{\pi}{2}} = A(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) = \pm j$$

Równanie w dziedzinie czasowej i częstotliwościowej: W dziedzinie czasowej elementy R, L, C są zdefiniowane przez równania przedstawiające zależność napięcia za zaciskach u(t) od prądu i(t).

$$u(t) = Ri(t) \text{ lub } i(t) = \frac{1}{R}u(t)$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \text{ lub } i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt$$

$$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \text{ lub } i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

Jeśli uwzględnimy: $u(t) = \sqrt{2}\underline{U}e^{j\omega t}$ i $i(t) = \sqrt{2}\underline{I}e^{j\omega t}$

Otrzymuje zależności napięciowo - prądowe w dziedzinie często-tliwości

$$\underline{U} = R\underline{I} \text{ lub } \underline{I} = G\underline{U}$$

$$\underline{U} = j\omega L\underline{I} \text{ lub } \underline{I} = \frac{1}{j\omega L}\underline{U}$$

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} \text{ lub } \underline{I} = j\omega C\underline{U}$$

Impedancja i admitancja

W dziedzinie częstotliwościowej

Zastosowanie praw kirchhoffa w dziedzinie częstotliwościowej pozwala na zapisanie równań sieci w stanie ustalonym: $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$ lub $\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}$

$\underline{Z}$ i $\underline{Y}$ Są liczbami zespolonymi przedstawiające impedancją zespoloną (om) i admitancją zespoloną (simens).

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{lub} \quad \underline{Z} = Ze^{j\varphi} \; , \; \underline{Y} = G + jB \quad \text{lub} \quad \underline{Y} = Ye^{j\varphi'}$$

gdzie $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ i $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ oraz $\varphi = arctg\,\frac{X}{R}$ i $\varphi' = arctg\,\frac{B}{G}$

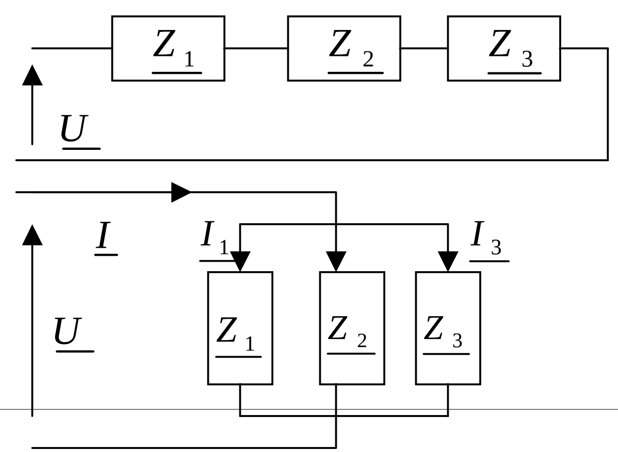
Szeregowe i równoległe połączenie impedancji i admitancji: Napięcie na zewnątrz obwodu szeregowego (równoległego) jest równa sumie napięć (prądów) na poszczególnych impedancjach i admitancjach.

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I} \; , \; \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = \sum_1^n \underline{Z}_i = (R_1 + ... + R_3) + j(X_1 + ... + X_3)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = \left(\frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2} + \frac{1}{\underline{Y}_3}\right), \; \underline{Y} = \left[\left(\frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2} + \frac{1}{\underline{Y}_3}\right)\right]^{-1}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\right)\underline{U} = \sum_1^n \frac{1}{\underline{Z}_i}\underline{U}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\,\underline{\mathrm{U}} = \underline{\mathrm{U}}\,\underline{Y}$$



Przykłady zastosowań liczb zespolonych

R, L połączone szeregowo

Napięcie całkowite

$$u = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Napięcie całkowite zespol.

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I}$$

Impedancja zespolona

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

Moduł napięcia

$$U = I\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Faza napięcia

$$\varphi = arctg\frac{\omega L}{R}$$

R, C połączone szeregowo

Napięcie całkowite

$$u = Ri + \frac{1}{C}\int idt$$

Napięcie całkowite zespol.

$$\underline{U} = R\underline{I} - j\frac{\underline{I}}{\omega C}$$

Impedancja zespolona

$$\underline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

Moduł napięcia

$$U = I\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Faza napięcia

$$\varphi = arctg\frac{1}{RC\omega}$$

R, L, C połączone szeregowo

Napięcie całkowite

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

Napięcie całkowite zespol.

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\underline{I}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Impedancja zespolona

$$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Moduł napięcia

$$U = I\sqrt{R^2 + (L\omega + \frac{1}{\omega C})^2}$$

Faza napięcia

$$\varphi = arctg\frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}$$

Zadanie nr 1:

Prądy płynące w dwóch gałęziach obwodu, połączonych równolegle, wynoszą odpowiednio: $i_1 = 4\sin(\omega\ t + \frac{\pi}{2})A$ oraz $i_2 = 3\sin(\omega\ t + 0^o)A$ Znaleźć analitycznie i graficznie sumę tych prądów, jeżeli $\omega = 1 rad/s$

Rozwiązanie:

Znajdujemy najpierw zależność ogólną określającą sumę dwóch funkcji sinusoidalnie zmiennych o jednakowych częstotliwościach. Złóżmy że: $i_1 = I_{m_1}\sin(\omega\ t + \varphi_1)$ i $i_2 = I_{m2}\sin(\omega\ t + \varphi_2)$

Suma algebraiczna tych funkcji jest funkcją sinusoidalnie zmienną o tej samej częstotliwości, czyli:

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega\ t + \varphi)$$

Korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów, piszemy:

$$I_{m1}\sin(\omega\ t + \varphi_1) + I_{m2}\sin(\omega\ t + \varphi_2) = I_{m1}\cos\varphi_1\sin\omega t + I_{m1}\sin\varphi_1\cos\omega t +$$
$$I_{m2}\cos\varphi_2\sin\omega t + I_{m2}\sin\varphi_2\cos\omega t = I_m\cos\varphi\sin\omega t + I_m\sin\varphi\cos\omega$$

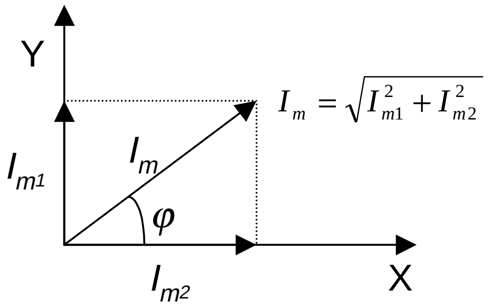
Przyrównując wyrażenia z prawej i lewej strony równania, zawierające odpowiednio , $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ otrzymujemy układ równań:

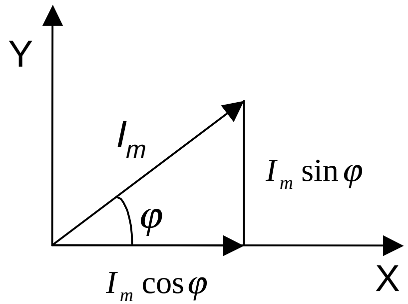
$$\begin{cases} I_{m1}\cos\varphi_1\sin\omega t + I_{m2}\cos\varphi_2\sin\omega t = I_m\cos\varphi\sin\omega t \\ I_{m1}\sin\varphi_1\cos\omega t + I_{m2}\sin\varphi_2\cos\omega t = I_m\sin\varphi\cos\omega t \end{cases} =$$

$$\begin{cases} I_{m1}\cos\varphi_1 + I_{m2}\cos\varphi_2 = I_m\cos\varphi \\ I_{m1}\sin\varphi_1 + I_{m2}\sin\varphi_2 = I_m\sin\varphi \end{cases}$$

Zadanie i rozwiązanie

Wyrażenia $I_m \sin\varphi$ i $I_m \cos\varphi$ są rzutami, odpowiednio na oś ***y*** i ***X***, wektora o długości $\boldsymbol{I_m}$:





Kąt obliczamy z zależności:

$$tg\varphi = \frac{I_m \sin\varphi}{I_m \cos\varphi} = \frac{I_{m1}\sin\varphi_1 + I_{m2}\sin\varphi_2}{I_{m1}\cos\varphi_1 + I_{m2}\cos\varphi_2}$$

Amplitudę Im obliczamy korzystając z twierdzenia kosinusów:

$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Wartość chwilowa prądu ma wartość:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) = 5\sin(t + 53^o)\,A \quad \text{gdzie} :$$

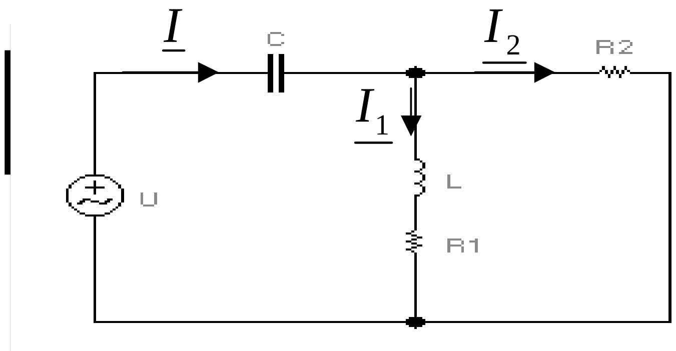
$$\varphi \text{ oblicza się ze wzoru} : tg\,\varphi = \frac{4\sin\frac{\pi}{2} + 3\sin 0}{4\cos\frac{\pi}{2} + 3\cos 0} = tg\,\frac{4}{3} = 53^o$$

$$\text{a amplituda sumy prąd z wzoru} : I_m = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2.4.3\cos(\frac{\pi}{2} - 0)} = 5\,A$$

Zadanie nr 2:

W obwodzie przedstawionym na rys. obliczyć wartości chwilowe i skuteczne prądów.

$$Dane\ :\ \omega L = 10\,k\Omega,\quad \frac{1}{\omega C} = 5k\Omega,\quad R_1 = R_2 = 5k\Omega,\quad \underline{U} = 375V$$



Rozwiązanie:

Impedancja zastępcza obwodu jest:

$$\underline{Z} = -j\frac{1}{\omega C} + \underline{Z}_{AB} = -j\frac{1}{\omega C} + \frac{R_2(R_1 + j\omega L)}{R_2 + R_1 + j\omega L} =$$

$$-\ j5.10^3 + \frac{5.10^3.(5.10^3 + j10.10^3)}{5.10^3 + 5.10^3 + j10.10^3} = (3{,}75 - j3{,}75)k\Omega$$

Prąd $\underline{I}$ obliczamy z prawa Ohma:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{375}{(3{,}75 - j3{,}75)} = \frac{375.(3{,}75 + j3{,}75)}{(3{,}75 - j3{,}75).(3{,}75 + j3{,}75)} = (50 + j50).10^{-3}\,A$$

Prąd $\underline{I}_2$ obliczamy z prawa Ohma po uprzednim obliczaniu spadku napięcia między zaciskami AB obwodu:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_{AB}.\underline{I} = (50 + j50).10^{-3}.(3{,}75 + j1{,}25)10^3 = (125 + j250)V$$

$$\text{prad}\quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{R_2} = \frac{(125 + j250)}{5}.10^{-3} = (25 + j50)mA$$

Zadanie i rozwiązanie

Prąd obliczamy korzystając z pierwszego prawa kirchhoffa:

$$\underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2 = (50 + j50) - (25 - j50) = 25\,mA$$

Do obliczanie wartości chwilowe prądu potrzebne jest obliczanie moduły wartości skutecznych prądów $\underline{I},\ \underline{I}_1,\ \underline{I}_2$ i faz początkowych $\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2$:

$$I = \sqrt{\mathrm{Re}\,\underline{I}^2 + \mathrm{Im}\,\underline{I}^2} = \sqrt{50^2 + 50^2} = 71mA, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\underline{I}}{\mathrm{Re}\,\underline{I}} = \frac{50}{50} = 1,\ \varphi = 45^{\mathrm{o}}$$

$$I_1 = \sqrt{\mathrm{Re}\,\underline{I}_1^2 + \mathrm{Im}\,I_1^2} = \sqrt{25^2 + 0^2} = 25mA, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\underline{I}_1}{\mathrm{Re}\,\underline{I}_1} = \frac{0}{25} = 0,\ \varphi = 0^{\mathrm{o}}$$

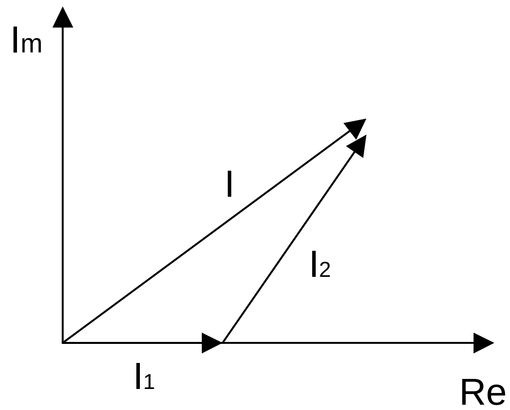
$$I_2 = \sqrt{\mathrm{Re}\,\underline{I}_2^2 + \mathrm{Im}\,\underline{I}_2^2} = \sqrt{25^2 + 50^2} = 56mA, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\underline{I}_2}{\mathrm{Re}\,\underline{I}_2} = \frac{50}{25} = 2,\ \varphi = 64^{\mathrm{o}}$$

Wartości chwilowe prądów $i,\ i_1,\ i_2$:

$$i = 71\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^0)\quad mA$$

$$i_1 = 25\sqrt{2}\sin\omega t\quad mA$$

$$i_2 = 56\sqrt{2}\sin(\omega t + 65^0)\quad mA$$

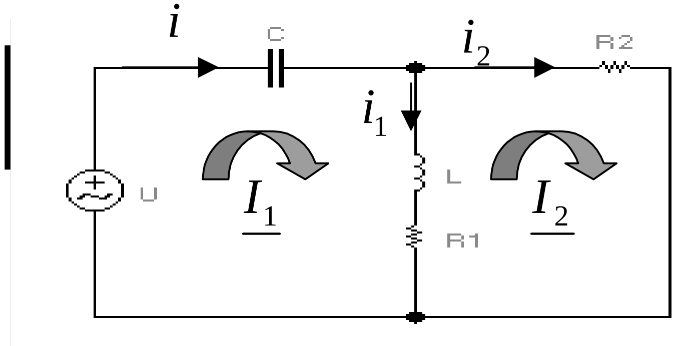


Zadanie i rozwiązanie

Zadanie nr 3:

W obwodzie przedstawionym na rys. obliczyć wartości chwilowe i skuteczne prądów.

$$Dane\ :\ \ \omega L = 10\,k\Omega,\quad \frac{1}{\omega C} = 5k\Omega,\quad R_1 = R_2 = 5k\Omega,\quad \underline{U} = 375V$$



Rozwiązanie metodą oczkową:

Krok1:

$$\begin{cases} (-\dfrac{1}{\omega C} + (\omega L + R_1)).\underline{I}_1 - (\omega L + R_1).\underline{I}_2 = \underline{U} \\ (R_2 + R_1 + \omega L).\underline{I}_2 - (\omega L + R_1)).\underline{I}_1 = 0 \end{cases}$$

Krok2:

$$\begin{cases} (-\dfrac{1}{\omega C} + (\omega L + R_1)).\underline{I}_1 - (\omega L + R_1).\underline{I}_2 = \underline{U} \\ -(\omega L + R_1).\underline{I}_1 + (R_2 + R_1 + \omega L).\underline{I}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (5+5j).10^3 & (-5-10j).10^3 \\ (-5-10j).10^3 & (10+10j).10^3 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 375 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Krok3:

$$W = \begin{vmatrix} (5+5j).10^3 & (-5-10j).10^3 \\ (-5-10j).10^3 & (10+10j).10^3 \end{vmatrix} = (5+5j).10^3 \bullet (10+10j).10^3 - ((-5-10j).10^3.(-5-10j).10^3) =$$

$$100j.10^3 - (-75+100j).10^3 = 75.10^3$$

Zadanie i rozwiązanie

Krok4:

$$I_1 = \left|\underline{I}_1\right| = \frac{1}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 375 & (-5-10j).10^3 \\ 0 & (10+10j).10^3 \end{vmatrix}}{75.10^3} = \frac{375.(10+j10).10^3}{75.10^3} = \left|50-50j\right| = \sqrt{50^2+50^2} = 71mA$$

Krok5:

$$I_2 = \left|\underline{I}_2\right| = \frac{1}{W} = \frac{\begin{vmatrix} (5+5j).10^3 & 375 \\ (-5-10j).10^3 & 0 \end{vmatrix}}{75.10^3} = 375.\frac{(5+10j).10^3}{75.10^3} = \left|25-50j\right| = \sqrt{25^2+50^2} = 56mA$$

Krok6: $i = \underline{I}_1, \quad i_1 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2, \quad i_2 = \underline{I}_2$ tzn. $i_1 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (50-50j)-(25-50j) = 25$

Krok7:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\underline{I}}{\mathrm{Re}\,\underline{I}} = \frac{50}{50} = 1, \ \varphi = 45^{\circ}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\underline{I}_1}{\mathrm{Re}\,\underline{I}_1} = \frac{0}{25} = 0, \ \varphi = 0^{\circ}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\underline{I}_2}{\mathrm{Re}\,\underline{I}_2} = \frac{50}{25} = 2, \ \varphi = 64^{\circ}$$

Krok8:

$$i = 71\sqrt{2}\sin(\omega t + 45^{0}) \quad mA$$

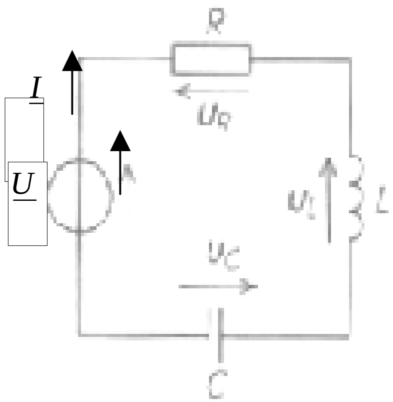
$$i_1 = 25\sqrt{2}\sin\omega t \quad mA$$

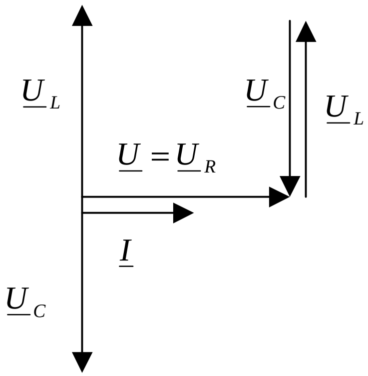
$$i_2 = 56\sqrt{2}\sin(\omega t + 65^{0}) \quad mA$$

Zjawiska rezonansowe

w obwod. prądu przemiennego

Rezonans napięć: powstaje wtedy gdzie całkowita moc bierna elementów odbiorczych obwodu szeregowego ***RLC*** jest równa zeru (duża moc bierna może oscylować między elementem ***L*** i ***C***). Obwód zachowuje się tak jak gdyby w obwodzie nie było elementów indukcyjnych i pojemnościowych. Powstanie rezonansu jest uzależniony nie tylko od parametrów ***L*** i ***C***, ale i od częstotliwości prądu.





$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R$$

Z warunku rezonansu:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega^2 LC} = 1$$

Tak więc rezonans powstaje, gdy:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{lub inaczej} \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

W obwodzie, w którym występuje rezonans napięć, napięcia $\boldsymbol{U_L}$ i $\boldsymbol{U_C}$ mogą osiągnąć wartości większa niż wartości napięcia zasilającego. Zjawisko takie jest nazywane ***przepięcie rezonansową*** i występuje wówczas, gdy: $X_L = X_C \rangle R$. Zjawisko taki jest niebezpiecznie w obwodach elektroenergetycznych, gdyż może spowodować przebicie izolacji, natomiast w obwodach teleelektrycznych jest jak najbardziej pozytywne gdzież umożliwia wyodrębnienie sygnału o określonej częstotliwości.

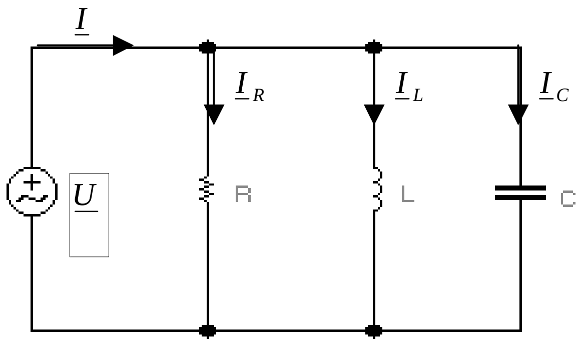
$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \longrightarrow$$

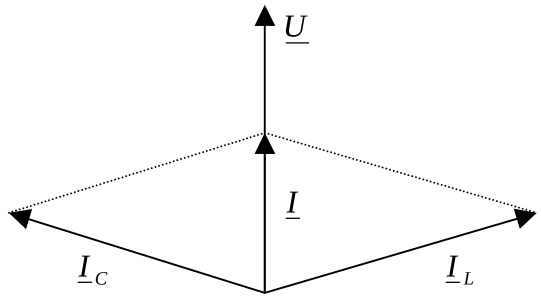
Q nazywa się współczynnik rezonansu lub współczynnik dobroci obwodu

Zjawiska rezonansowe

w obwod. prądu przemiennego

Rezonans prądu: powstaje w obwodach , w których są połączone równolegle elementy ***L*** i ***C***. Przy odpowiednio dobranych parametrach ***L*** i ***C*** całkowity prąd będzie równy prądowy wywołanemu przez rezystor ***R***. Wówczas wartość skuteczna prądu $\boldsymbol{I_C}$ jest równa $\boldsymbol{I_L}$ a wypadkowa prądu ***I*** jest wtedy w fazie z napięciem ***U*** (składowa bierna jest równa zero pomimo że w poszczególnych gałęziach składowe bierne istnieją) .





Przy połączeniu równoległym elementów ***L*** i ***C*** napięcia $\boldsymbol{U_L}$ i $\boldsymbol{U_C}$ muszą być równe to $\boldsymbol{I_L}$ i $\boldsymbol{I_C}$ można obliczyć z zależności:

$$I_L = \frac{U_L}{X_L} \quad \text{i} \quad I_C = \frac{U_C}{X_C}$$

Warunkiem powstania rezonansu prądów jest równość odwrotności reaktancji $\boldsymbol{X_L}$ i $\boldsymbol{X_C}$:

$$\frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega L} = \omega C$$

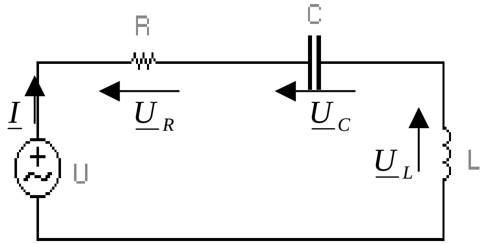
Tak więc rezonans prądu powstaje, gdy: $\omega_r = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ lub inaczej $f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

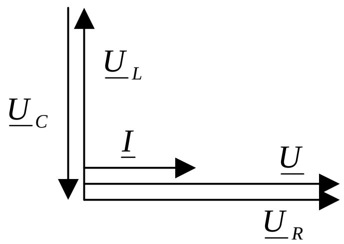
Zadanie i rozwiązanie

W obwodzie przedstawionym na rysunku są dane:

$$u = 5\sqrt{2}\sin 10^4 t \quad [\mathrm{V}],\quad R = 1 \quad [\mathrm{kV}],\quad C = 10^{-8} \quad [\mathrm{F}],\quad L = 1 \quad [\mathrm{H}]$$

Obliczyć wartości skuteczne i chwilowe prądów i napięć na poszczególnych elementach oraz częstotliwość rezonansową i dobroć cewki i kondensatora





Rozwiązanie:

Impedancja zastępcza obwodu jest: $\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 10^3 + j(10^4 .1 - \frac{1}{10^4 .10^{-8}}) = 10^3 + j.0$

Z obliczeń wynika że $\boldsymbol{X_L = X_C}$ stwierdzamy, że w obwodzie istnieje ***rezonans napięć***. Wartość skuteczna prądu jest zależna tylko od rezystancji: $I = \frac{U}{R} = 5\,mA$ a kąt przesunięcia fazowego między prądem i napięciem zasilającym φ=0. Wartość chwilowa prądu zatem: $i = 5\sqrt{2}\sin 10^4 t \quad [\mathrm{mA}]$

Wartości skuteczne napięć na cewce, kondensatorze i rezystorzy oraz wartości chwilowe ich napięc wynoszą odpowiednio:

$$U_L = X_L I = \omega L I = 10^4 .5.10^{-3} \Leftrightarrow u_L = 50\sqrt{2}\sin(10^4 t + 90^0),$$

$$U_C = X_C I = \frac{1}{\omega C} I = \frac{1}{10^4 .10^{-8}} .5.10^{-3} \Leftrightarrow u_L = 50\sqrt{2}\sin(10^4 t - 90^0),$$

$$U_R = RI = \omega L = 10^3 .5.10^{-3} \Leftrightarrow u_L = 5\sqrt{2}\sin 10^4 t$$

częstotl. Rezonans. oraz dobroć wynoszą

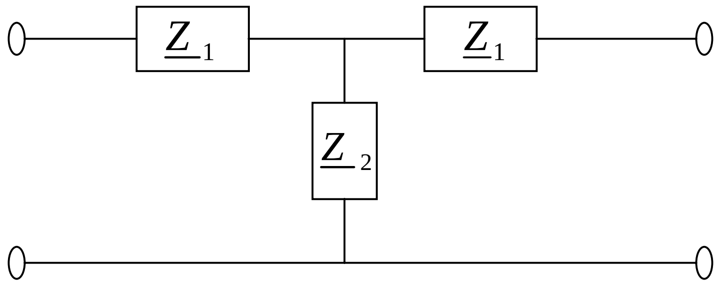
$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2.\pi\sqrt{1.10^{-8}}} = 1{,}593 \quad [\mathrm{kHz}] \approx 1{,}6 \quad [\mathrm{kHz}]$$

$$Q_L = \frac{\omega L}{R} = \frac{1{,}593 .10^3 .2.3.14.1}{10^3} \approx 10$$

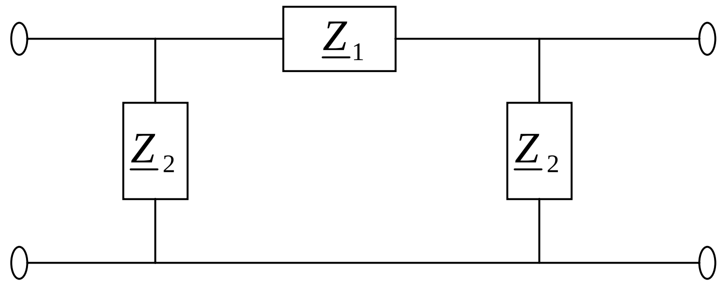
$$Q_C = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{2\pi .1{,}593 .10^3 .10^{-8} .10^3} \approx 10$$

Filtry elektryczne

Filtr elektryczny jest to liniowy czwórnik pasywny (posiadający cztery końcówki i charakteryzujące równość prądu wejściowego i wyjściowego). Filtry stosowany są do tłumienia (przepuszczania) określonego pasma częstotliwości.



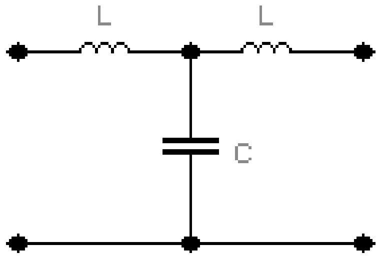
Filtr typu T



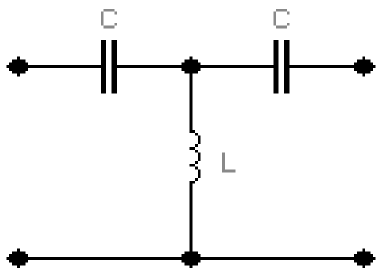
Filtr typu π

Przy wielkich częstotliwościach w obwodach elektronicznych, reaktancja cewki jest wielokrotnie większa od jej rezystancji i dlatego że ogólnie filtry składają się jedynie z elementów reaktancyjnych. Właściwości filtrów opierają się fizycznie na powstaniu w nich zjawisk rezonansowych.

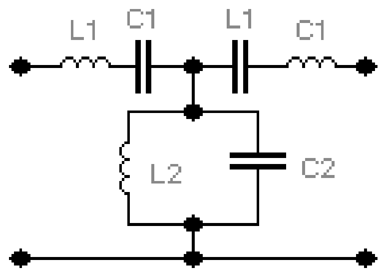
W zależności od usytuowaniu elementów reaktancyjnych rozróżnia się następujące rodzaje filtrów:



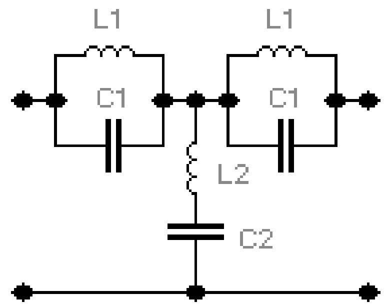
dolnoprzepustowe



górnoprzepustowe



pasmowe



zaporowe

Filtry dolnoprzepustowy: przepuszczają mały częstotliwości począwszy od $f_1 = 0$ do częstotliwości granicznej f_g, a tłumiący częstotliwości w przedziale od f_g do ∞ .

Filtry górnoprzepustowy: przepuszczają częstotliwości od częstotliwości granicznej f_g do ∞ .

Filtry pasmowy - (środkowoprzepustowy) przepuszczają częstotliwości zawarte w określonym paśmie od f_1 do f_2

Filtry pasmowy - (środkowozaporowy) nie przepuszczają pewnego określonego pasma zawartego między f_1 do f_2 .

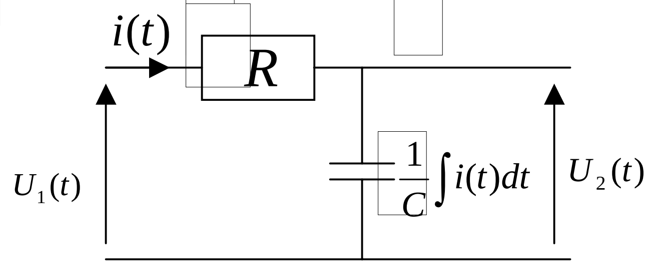
Do wyznaczenie charakterystyki częstotliwościowej i fazowej filtra wykorzystuje się metodą operatorową oparta na transformacji Laplace'a. Transformacja Laplace'a transformuje liniowe równania różniczkowe w równania algebraiczne (przeszkształcenie funkcji zależnej od czasu na pewną funkcję zależną od częstotliwości ogólnej $s = \sigma + j\omega$ gdzie σ - opisuje wzrost lub zanik amplitudy a ω- częstotliwością kątową fali). Przekształcenie polega na mnożeniu funkcji transformowanej przez e^{-st}:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$ Np. dla funkcji jednostkowej $$F(s) = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}\left|e^{-st}\right|_0^\infty = -\frac{1}{s}\left|0-1\right| = \frac{1}{s}$$

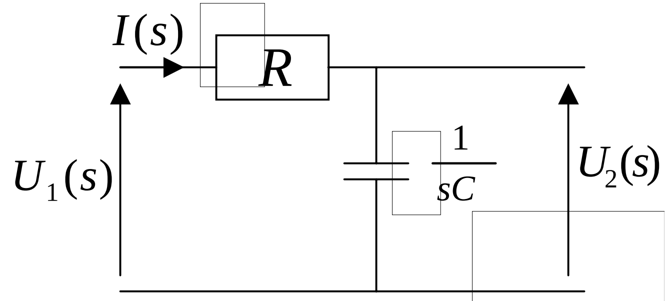
Zastosowanie powyższej procedury do różnych kształtów funkcji czasu pozwala uzyskać następujących par transformacji Laplace'a

f(t)	U	Ue^{-at}	$U(1-e^{-at})$	$U\sin\omega t$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$
F(s)	$\frac{U}{s}$	$\frac{U}{s+a}$	$\frac{Ua}{s(s+a)}$	$\frac{U\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{Ts+1}$

charakterystyki częstotl. i fazowej na np. filtra dolnoprz.



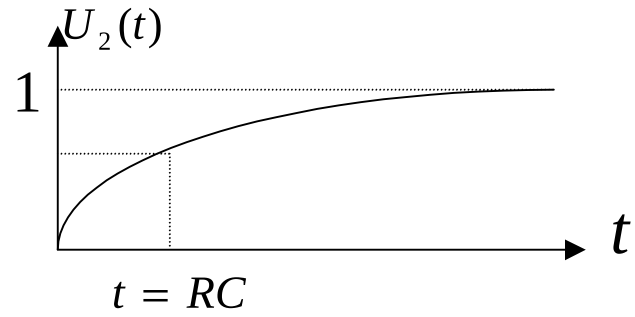
$$\begin{cases} Ri(t) + \dfrac{1}{C}\int i(t)dt = U_1(t) \\ \dfrac{1}{C}\int i(t)dt = U_2(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} RI(s) + \dfrac{1}{sC}I(s) = U_1(s) \\ \dfrac{1}{sC}I(s) = U_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I(s)(R + \dfrac{1}{sC}) = U_1(s) \\ I(s)\dfrac{1}{sC} = U_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I(s) = \dfrac{U_1(s)}{R + \dfrac{1}{sC}} \\ \dfrac{U_1(s)}{R + \dfrac{1}{sC}}\dfrac{1}{sC} = U_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{RCs + 1}U_1(s) = U_2(s) \Leftrightarrow \begin{cases} U_1(t) = 1(t) \Rightarrow U_1(s) = \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{RCs + 1} \bullet \dfrac{1}{s} = U_2(s) = \dfrac{1}{s(RCs + 1)} \end{cases}$$

$$U_2(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} = \frac{a}{s(s + a)} \Leftrightarrow U_2(t) = 1 - e^{-\frac{1}{RC}t}$$



charakterystyki częstotl. i fazowej na np. filtra dolnoprz.C.D

Do obliczanie charakterystyki częstotliwościowej i fazowej filtra potrzebne jest wyznaczenie transmitancji widmowej (stosunek wyjście filtru i jego wejście)

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \Leftrightarrow \text{ jesli za } s = j\omega \text{ to } \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCj\omega + 1} \bullet \frac{(-RCj\omega + 1)}{(-RCj\omega + 1)} = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} + j\frac{-RC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

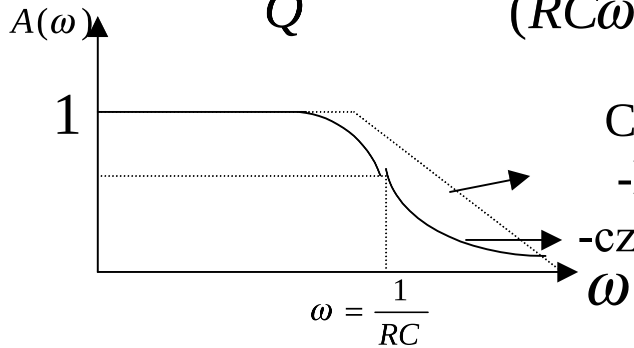
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = Q(\omega) + jP(\omega) = Z = |Z| e^{j\arg(z)} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} e^{jarctg(-RC\omega)}$$

$$|Z| = \sqrt{Q^2 + P^2} = \sqrt{\frac{1}{((RC\omega)^2 + 1)^2} + \frac{(-RC\omega)^2}{((RC\omega)^2 + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}} \longrightarrow$$

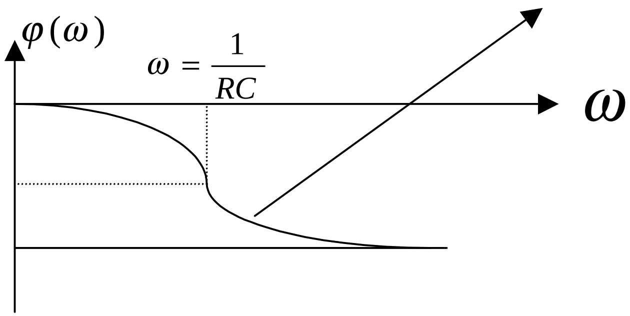
Charakterystyka częstotliwościowa

$$\arg(Z) = arctg\left(\frac{P}{Q}\right) = arctg\left(\frac{-RC\omega}{(RC\omega)^2 + 1} \bullet \frac{(RC\omega)^2 + 1}{1}\right) = arctg(-RC\omega) \longrightarrow$$

Charakterystyka fazowa

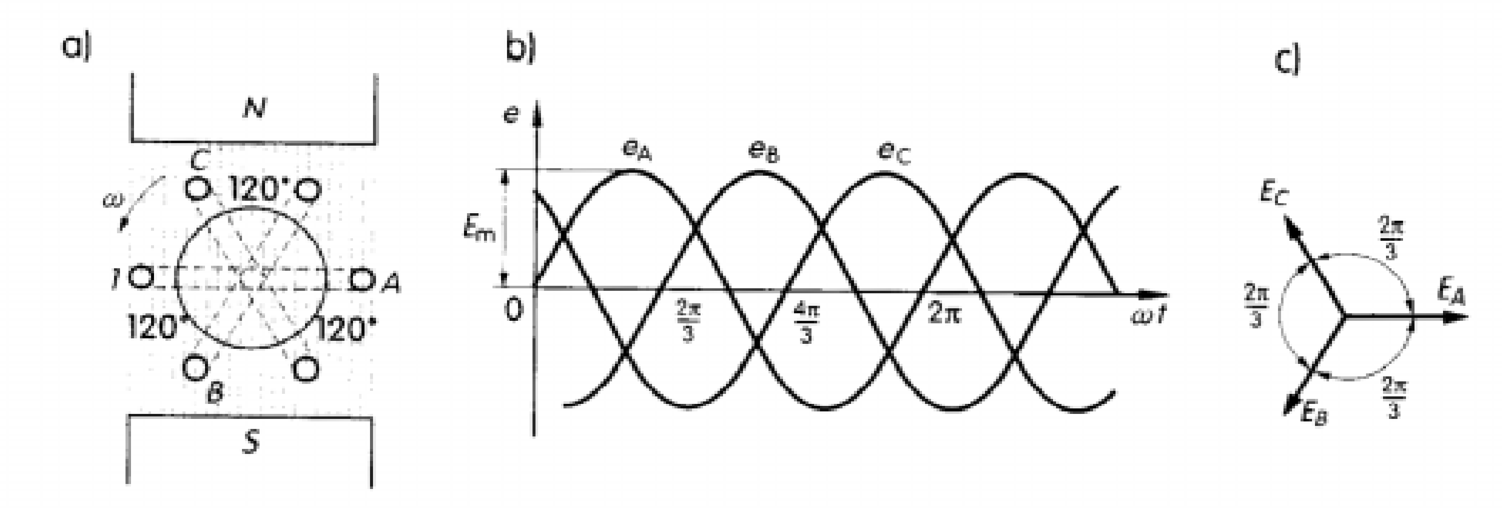


Charakterystyka -logarytmiczna -częstotliwościowa



Prąd trójfazowe

Prąd trójfazowe wytwarza się w prądnicach trójfazowych, jest to układ trzech sinusoidalnych prądów jednofazowych o tej samej częstotliwości i amplitudzie, przesuniętych między sobą w fazie o kąt 120°.



Podczas obrotu ramek ze stałą prędkością kątową w przewodzie A, B, C indukuje się siły elektromotoryczne.

$$\begin{cases} e_A = E_m \sin \omega t \\ e_B = E_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \Leftrightarrow gdzie\ \ faza\ \ począocząt\ \ e_A = 0 \\ e_C = E_m \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

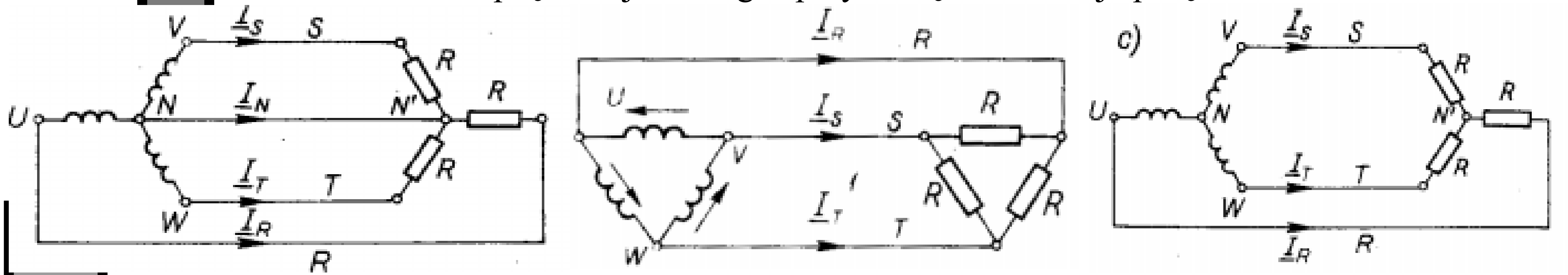
Gdy do trzech zwojów zostaną przyłączone odbiorniki to popłynie trzech prądów o takich samych przesunięcie fazowe

Podstawową zasadą układów trójfazowych jest zależność: $\sin \omega t + \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) = 0$

Jak widać ze wzoru u układzie trójfazowym suma napięć źródłowych lub prądów wynosi zero. Układ taki nazywa się symetryczne układ trójfazowe

Symetryczne układy trójfazowe

W obwodach prądu trójfazowego spotyka się dwa rodzaje połączeń:



Obwód / Układ gwiazdowy czteroprzewodowy, polega na tym, że oprócz trzech przewodów połączonych z początkami faz uzwojeń istnieje przewód czwarty zwany przewodem zerowym lub neutralnym łączącym wspólny (środek N/N') obciążenie i fazy.

$$\underline{I}_N = \underline{I}_U + \underline{I}_V + \underline{I}_W$$

W obwodach symetrycznych przy równości obciążeń wszystkich faz $\boldsymbol{I_N}$=0 w praktyce symetria obciążeń rzadko wstępuje i prąd niewielkie w porównaniu do prądów w przewodach fazowych płynie.

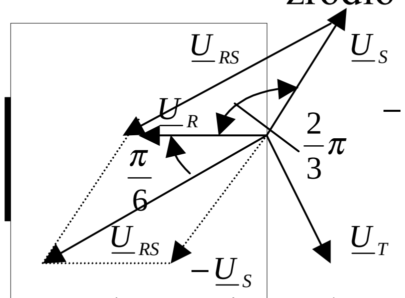
Obwód / Układ gwiazdowy trójprzewodowy, polega na tym, że prąd każdej fazy zamyka się przez fazy pozostałe wobec czego suma prądów fazowych jest równa zero i jest niezależne od równości lub nierówności obciążeń poszczególnych faz. $\underline{I}_U + \underline{I}_V + \underline{I}_W = 0$

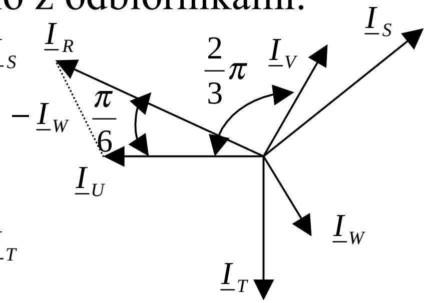
Obwód / Układ trójkątowi, powstaje on gdy wszystkie trzy uzwojenia połączone są w szereg (początek fazy łączy się z końcem fazy następnej).w obwodach trójkątowych przy idealnej symetrii suma napięć źródłowych równa zero.

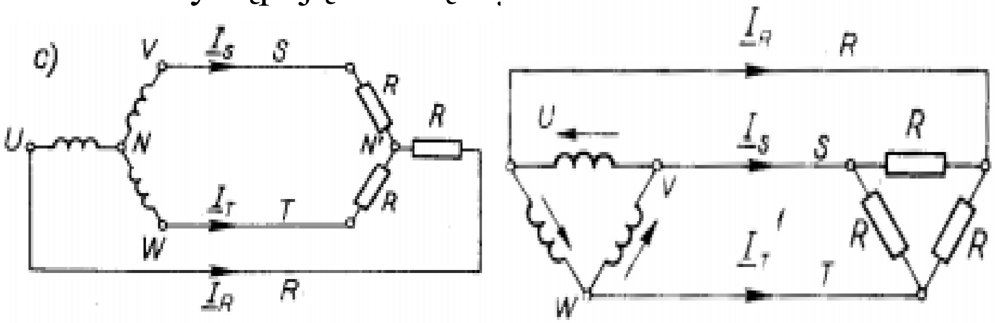
Uwaga: układy czteroprzewodowe prądu trójfazowego stosuje się powszechnie w sieciach niskiego napięcia (napięcie fazowe $U_f = 220V$ a przewodowe $U = \sqrt{3}.220 = 380V$ .Układy trójprzewodowe stosuje się w sieciach wysokiego napięcia gdzie w przewodach łączące prądnice z odbiornikami panuje tylko napięcie przewodowe U.

Obliczanie prądów trójfazowe

Wykresy wektorowe napięć i prądów: budowa wykresu polega na rozróżnieniu z jednej strony napięcia i prądy fazowe na zaciskach generatora i uzwojeniach a z drugiej strony napięcia i prądy przewodowe występujące między przewodami linii łączącej źródło z odbiornikami.







Wykres napięć „połącz.w gwiazdę” Wykres prądów „połącz. w trójkąt” Układ trójprzewodowy „połącz. W gwiazdę i trójkąt”

Przy połączeniu w gwiazdę, prądy fazowe równe są prądom przewodowym, a napięć przewodowych powstają z różnic dwóch kolejnych napięć fazowych.

$$\underline{I}_U = \underline{I}_R, \quad \underline{I}_V = \underline{I}_S, \quad \underline{I}_W = \underline{I}_T$$

$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_R - \underline{U}_S, \quad \underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T, \quad \underline{U}_{TR} = \underline{U}_T - \underline{U}_R$$

Przy połączeniu w trójkąt, napięcia fazowe są równe napięciom przewodowym, a prądy przewodowy powstają z różnic dwóch kolejnych prądów fazowych.

$$\underline{U}_U = \underline{U}_{RS}, \quad \underline{U}_V = \underline{U}_{ST}, \quad \underline{U}_W = \underline{U}_{TR}$$

$$\underline{I}_R = \underline{I}_U - \underline{I}_W, \quad \underline{I}_S = \underline{I}_V - \underline{I}_U, \quad \underline{I}_T = \underline{I}_W - \underline{I}_V$$

Z wykresów wektorowych dla napięć i prądów wynika, że:

$$U_{RS} = 2U_R \cos 30^\circ = 2U_R \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_R \quad a \quad I_R = 2I_U \cos 30^\circ = 2I_U \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}I_U$$

Dla układu gwiazdowego i trojkątowego obowiązuje zależności: $I = I_f,\ U = \sqrt{3}U_f$ a $U = U_f,\ I = \sqrt{3}I_f$

Moc prądu trójfazowego

W układach trójfazowych całkowita moc jest równa sumie mocy poszczególnych faz niezależnie od rodzaju połączeń.

$P = 3U_f I_f \cos\varphi$ gdzie φ jest przesunięciem między $\boldsymbol{U_f}$ i $\boldsymbol{I_f}$

Jeżeli moc wyrażami przez napięcie i prąd przewodowy to:

Dla układu gwiazdowego:

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi = 3\frac{U}{\sqrt{3}} I co\varphi = \sqrt{3} UI \cos\varphi \quad \text{gdzie} : U_f = \frac{U}{\sqrt{3}}, \ I_f = I$$

Dla układu trójkątowego:

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi = 3U\frac{I}{\sqrt{3}} co\varphi = \sqrt{3} UI \cos\varphi \quad \text{gdzie} : U_f = U, \ I_f = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

Moc wyrażona przez napięcie i prąd przewodowe jest określona zależnością:

$$P = \sqrt{3} UI \cos\varphi$$

Moc bierna symetrycznego układu trójfazowego jest:

$$Q = \sqrt{3} UI \sin\varphi$$

Moc pozorna symetrycznego układu trójfazowego jest:

$$S = \sqrt{3} UI$$