

# Algorytmika

## Maszyna Turinga

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Poznań, rok akademicki 2008/2009

# Plan wykładu

- 1 Plan wykładu
- 2 Uogólnienie pojęcia algorytmu
  - Skąd się wzięła maszyna Turinga?
  - Definicja maszyny Turinga
  - Przykład
- 3 Teza Churcha-Turinga
  - Warianty maszyny Turinga
- 4 Pytania

# Problem Hilberta - 1900 r.

Czy istnieje ogólna mechaniczna procedura, która w zasadzie pozwoliłaby nam po kolei rozwiązać wszystkie matematyczne problemy (należące do odpowiednio zdefiniowanej klasy)?  
**Maszyna Turinga** jest matematyczną idealizacją urządzenia wykonującego pewne (zdefiniowane w skończony sposób) obliczenia.



# Algorytm

W pewnym uproszczeniu możemy na program (algorytm) komputerowy popatrzeć jak na rodzaj urządzenia posiadającego jedynie skończoną liczbę stanów.  
 Każdy program można zapisać w postaci zestawu **stanów** i odpowiednich **przejęć** między nimi (sterowanych danymi).



## Elementy maszyny Turinga

- skończony zbiór stanów z wyróżnionymi stanami końcowymi,
- skończony alfabet symboli,
- nieskończona taśma z zaznaczonymi kwadratami, z których każdy może zawierać pojedynczy symbol alfabetu,
- ruchoma głowica odczytująco-zapisująca, która może wędrować wzdłuż taśmy przesuając się na raz o jeden kwadrat,
- diagram przejść między stanami zawierający instrukcje, które powodują, że zmiany następują przy każdym zatrzymaniu się.



## Instrukcja maszyny Turinga

Instrukcja maszyny Turinga ma postać  $\langle q, a, q', a', \Delta \rangle$  gdzie:

- $q$  - oznacza bieżący stan maszyny (sterowania),
- $a$  - oznacza symbol przeczytany przez głowicę,
- $q'$  - oznacza stan maszyny (sterowania) po wykonaniu instrukcji,
- $a'$  - oznacza symbol zapisany przez głowicę w wyniku wykonania instrukcji,
- $\Delta$  - oznacza kierunek ruchu głowicy.



## Diagram przejść maszyny Turinga

Diagram przejść to graf skierowany, którego wierzchołki reprezentują stany.

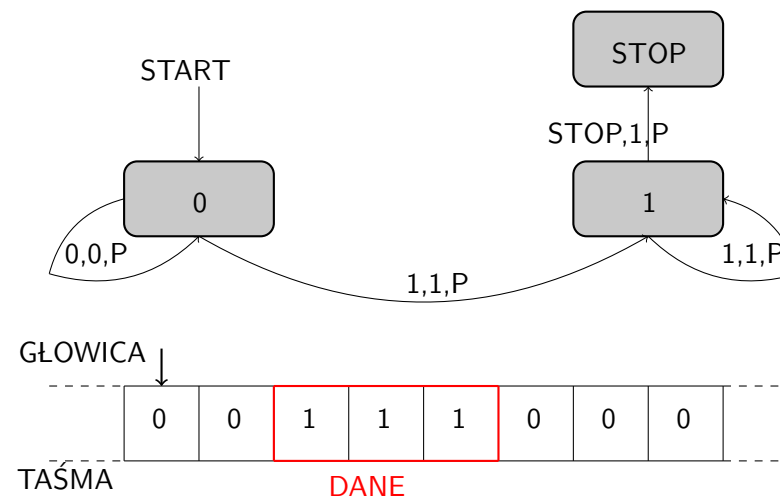
Krawędź prowadząca ze stanu  $q$  do  $q'$  nazywa się **przejściem** i etykietuje kodem postaci:  $a, a', \Delta$ , gdzie  $a$  i  $a'$  są symbolami (alfabetu), a  $\Delta$  to kierunek: "w prawo" albo "w lewo" (P, L). Część  $a$  jest **wyzwalaczem**<sup>1</sup> przejścia, a część  $a', \Delta$  - **akcją**<sup>2</sup>.

1) "jeżeli na taśmie spotkasz  $a$ "

2) "to zapisz w kratce  $a'$  i przesuń się w kierunku  $\Delta$ "



## Schemat maszyny Turinga





## Przykład działania maszyny Turinga

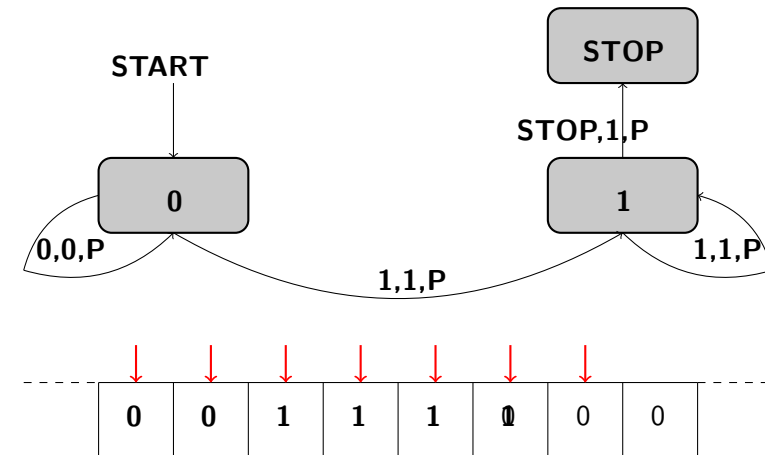
Przykładowa maszyna Turinga.

- zbiór stanów:  $\{0, 1, \text{STOP}\}$ ,
- skończony alfabet symboli  $\{0, 1\}$ ,
- diagram przejść między stanami zawierający instrukcje, które powodują, że zmiany następują przy każdym zatrzymaniu się.

$q$	$a$	$q'$	$a'$	$\Delta$
0	0	0	0	P
0	1	STOP	1	P
1	0	0	0	P
1	1	1	1	P



## Przykład maszyny Turinga



## Formalna definicja maszyny Turinga

Maszynę Turinga definiuje się jako piątkę uporządkowaną  $T = (Q, A, B, \delta, q_0)$  gdzie:

- $Q$  - zbiór stanów,
- $A$  - skończony alfabet symboli,
- $B \in A$  - wyróżniony symbol pusty,
- $\delta$  - funkcja przejść (zbiór instrukcji),
  - $\delta : Q \times A \rightarrow Q \times A \times \{P, L\}$ ,
  - $\delta(q, a) = (q', a', \Delta)$ .



## Warianty maszyny Turinga

- Taśma "jednostronnie" nieskończona (ma początek, nie ma końca).
- Dwie taśmy ("wejściowa" i "wyjściowa").
- Taśma dwuwymiarowa.
- Maszyna niedeterministyczna (w wariacie deterministycznym określony wyzwalacz w danym stanie powoduje zawsze taką samą reakcję; w wariacie niedeterministycznym dopuszcza się dla jednego wyzwalacza kilka akcji wybieranych losowo).

**Wszystkie tak zmodyfikowane maszyny Turinga są sobie równoważne!**



## Teza Churcha-Turinga

Każdy problem algorytmiczny, dla którego możemy znaleźć algorytm dający się zaprogramować w pewnym, dowolnym języku, wykonujący się na pewnym, dowolnym komputerze, nawet na takim, którego jeszcze nie zbudowano, ale można zbudować, i nawet na takim, który wymaga nieograniczonej ilości czasu i pamięci dla coraz większych danych, jest także rozwiązywalny przez maszynę Turinga.



## Możliwości maszyny Turinga

- Każdy problem, który można rozwiązać na jednej z nich można rozwiązać na każdej innej; albo inaczej: każda z maszyn Turinga może emulować każdą inną).
- Domowy komputer jest równoważny superkomputerowi z wielkiego centrum obliczeniowego (co nie znaczy, że rozwiąże ten sam problem w tym samym czasie!).
- Wszystkie języki programowania są sobie równoważne (to znaczy to co można zaprogramować w jednym - można w każdym innym).
- Pokazano, że komputer zaprojektowany przez Babbage'a "maszyna analityczna" jest równoważny z maszyną Turinga.



## Pytania

- 1 Podać definicję deterministycznej maszyny Turinga.
- 2 Co to znaczy, że funkcja jest obliczalna w sensie Turinga?
- 3 Jaki jest wynik działania maszyny Turinga  $T = (Q, A_2, 0, I, q_0)$  dla ciągu wejściowego: 11110111?  
 $A_2 = \{0, 1\}$   
 $Q = \{q_0, q_1, q_{10}, q_{11}, q_{100}, q_{101}, q_{110}, q_{111}, q_{1000}, q_{1001}, q_{1010}, STOP\}$   
 $I = \{q_0 0 q_0 0 P, q_0 1 q_1 1 L, q_1 0 q_{10} 1 P, q_1 1 q_1 1 L, q_{10} 0 q_{1010} 0 P, q_{10} 1 q_{11} 0 P, q_{11} 0 q_{100} 0 P, q_{11} 1 q_{11} 1 P, q_{100} 0 q_{100} 0 P, q_{100} 1 q_{101} 0 P, q_{101} 0 q_{111} 0 L, q_{101} 1 q_{110} 1 L, q_{110} 0 q_{110} 0 L, q_{110} 1 q_1 1 L, q_{111} 0 q_{111} 0 L, q_{111} 1 q_{1000} 1 L, q_{1000} 0 q_{1001} 0 L, q_{1000} 1 q_{1000} 1 L, q_{1001} 0 q_{10} 0 P, q_{1001} 1 q_1 1 L, q_{1010} 0 q_0 0 STOP, q_{1010} 1 q_{1010} 1 P\}$