

# Wspomaganie Decyzji Biznesowych

modele preferencji w postaci zbioru reguł decyzyjnych i teoria  
zbiorów przybliżonych oparta na dominacji  
elementy teorii społecznego wyboru - systemy głosowania

Jurek Błaszczński

Institute of Computing Science, Poznań University of Technology,  
60-965 Poznań, Poland



Styczeń 2019

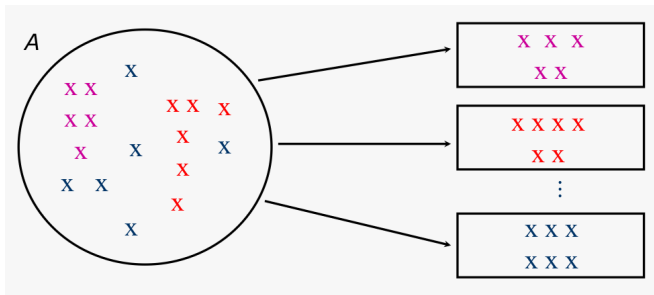
## Problem decyzyjny

- istnieje pewien *cel* lub *cele* do osiągnięcia
- istnieje wiele alternatywnych sposobów osiągnięcia celu (celów) - tworzą one zbiór akcji  $A$  (alternatyw, rozwiązań, wariantów, ...)
- wybór najlepszego sposobu nie jest trywialny

decydent (DM) może postawić następujące pytania dotyczące zbioru  $A$ :

$P_\beta$  - jak *zaklasyfikować* (*przypisać*) akcje do zdefiniowanych wcześniej klas decyzyjnych?

## $P_\beta$ - problematyka sortowania (klasyfikacji)



### przykłady

przydział instrumentów finansowych do klas ryzyka, towarów do klas jakości

## Definicja problemu

### Klasyfikacja porządkowa z ograniczeniami monotonicznymi

- zależność pomiędzy opisem obiektów za pomocą **atrybutów warunkowych** i wartościami **atrybutu decyzyjnego** (klasy)
- wiedza o uporządkowaniu (zgodnym z preferencjami) zbioru wartości atrybutów (**kryteriów**)
- korelacja semantyczna: lepsza ocena obiektu na jednym z atrybutów warunkowych przy pozostałych ocenach na tym samym poziomie nie powinna pogarszać oceny na atrybucie decyzyjnym
- ograniczenia monotoniczne wyrażane są przez korelację semantyczną

## Definicja problemu

### Klasyfikacja porządkowa z ograniczeniami monotonicznymi

- zależność pomiędzy opisem obiektów za pomocą **atrybutów warunkowych** i wartościami **atrybutu decyzyjnego** (klasy)
- wiedza o uporządkowaniu (zgodnym z preferencjami) zbioru wartości atrybutów (**kryteriów**)
- korelacja semantyczna: lepsza ocena obiektu na jednym z atrybutów warunkowych przy pozostałych ocenach na tym samym poziomie nie powinna pogarszać oceny na atrybucie decyzyjnym
- ograniczenia monotoniczne wyrażane są przez korelację semantyczną
- niespójność jest wynikiem łamania ograniczeń monotonicznych

## Przykłady

### ocena ryzyka instrumentów finansowych

akcja, która osiąga lepszą ocenę na jednym ze wskaźników finansowych przy braku zmiany pozostałych wskaźników nie powinna tracić w ocenie ryzyka (“D”, “BBB+”, “A”, “AAA”)

## Przykłady

### ocena ryzyka instrumentów finansowych

akcja, która osiąga lepszą ocenę na jednym ze wskaźników finansowych przy braku zmiany pozostałych wskaźników nie powinna tracić w ocenie ryzyka (“D”, “BBB+”, “A”, “AAA”)

### inne przykłady

- wybór najlepszej trasy do pracy lub do sklepu
- wybór kupowanych produktów

## zdolności predykcyjne

- dokładność predykcji (MAE, % poprawnie klasyfikowanych)
- interpretowalność modelu

## zdolności predykcyjne

- dokładność predykcji (MAE, % poprawnie klasyfikowanych)
- interpretowalność modelu

## podejścia MCDA i ML

- znajdź przekonujące i przejrzyste rozwiązanie, które jest spójne z preferencjami użytkownika (DM)
- zbuduj dokładny model (klasyfikator)

- 1 Dominance-based Rough Set Approach (DRSA) - Teoria zbiorów przybliżonych z relacją dominacji
- 2 Modele regułowe w VC-DRSA
- 3 Klasyfikatory regułowe w VC-DRSA
- 4 Systemy głosowania - SCT

## DRSA - definicje

- klasyfikacja porządkowa do wcześniej zdefiniowanych klas  $X_i$ .
- unie klas decyzyjnych  $X_i^{\geq} = \bigcup_{t \geq i} X_t$ ,  $X_i^{\leq} = \bigcup_{t \leq i} X_t$

## DRSA - definicje

- klasyfikacja porządkowa do wcześniej zdefiniowanych klas  $X_i$ .
- unie klas decyzyjnych  $X_i^{\geq} = \bigcup_{t \geq i} X_t$ ,  $X_i^{\leq} = \bigcup_{t \leq i} X_t$
- obiekt  $x$  dominuje obiekt  $y$  na zbiorze kryteriów  $P \subseteq C$  ( $x D_P y$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego kryterium  $q_i \in P$  spełnione jest  $q_i(x) \succeq q_i(y)$

## DRSA - definicje

- klasyfikacja porządkowa do wcześniej zdefiniowanych klas  $X_i$ .
- unie klas decyzyjnych  $X_i^{\geq} = \bigcup_{t \geq i} X_t$ ,  $X_i^{\leq} = \bigcup_{t \leq i} X_t$
- obiekt  $x$  dominuje obiekt  $y$  na zbiorze kryteriów  $P \subseteq C$  ( $x D_P y$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego kryterium  $q_i \in P$  spełnione jest  $q_i(x) \succeq q_i(y)$
- $P$ -pozytywne i  $P$ -negatywne stożki dominacji:  
 $D_P^+(y) = \{x \in U : x D_P y\}$  and  $D_P^-(y) = \{x \in U : y D_P x\}$ .

## DRSA - definicje

- klasyfikacja porządkowa do wcześniej zdefiniowanych klas  $X_i$ .
- unie klas decyzyjnych  $X_i^{\geq} = \bigcup_{t \geq i} X_t$ ,  $X_i^{\leq} = \bigcup_{t \leq i} X_t$
- obiekt  $x$  dominuje obiekt  $y$  na zbiorze kryteriów  $P \subseteq C$  ( $x D_P y$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego kryterium  $q_i \in P$  spełnione jest  $q_i(x) \succeq q_i(y)$
- $P$ -pozytywne i  $P$ -negatywne stożki dominacji:  
 $D_P^+(y) = \{x \in U : x D_P y\}$  and  $D_P^-(y) = \{x \in U : y D_P x\}$ .
- $P$ -dolne przybliżenie unii klas decyzyjnych  $X_i^{\geq}$  ( $X_i^{\leq}$ ) składa się z tych obiektów  $y$ , których stożki  $D_P^+(y)$  ( $D_P^-(y)$ ) są spójne.

## DRSA - przykłady

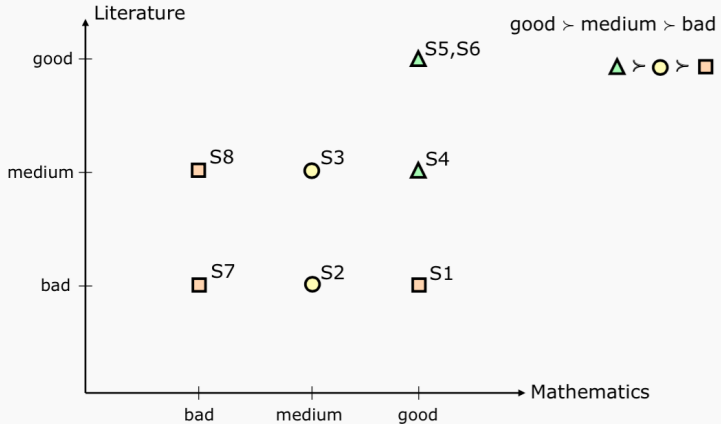
- Example of preference information about students:

| Student   | Mathematics ( <b>M</b> ) | Physics ( <b>Ph</b> ) | Literature ( <b>L</b> ) | Overall class |
|-----------|--------------------------|-----------------------|-------------------------|---------------|
| <b>S1</b> | good                     | medium                | bad                     | bad           |
| <b>S2</b> | medium                   | medium                | bad                     | medium        |
| <b>S3</b> | medium                   | medium                | medium                  | medium        |
| <b>S4</b> | good                     | good                  | medium                  | good          |
| <b>S5</b> | good                     | medium                | good                    | good          |
| <b>S6</b> | good                     | good                  | good                    | good          |
| <b>S7</b> | bad                      | bad                   | bad                     | bad           |
| <b>S8</b> | bad                      | bad                   | medium                  | bad           |

- Examples of classification of **S1** and **S2** are inconsistent

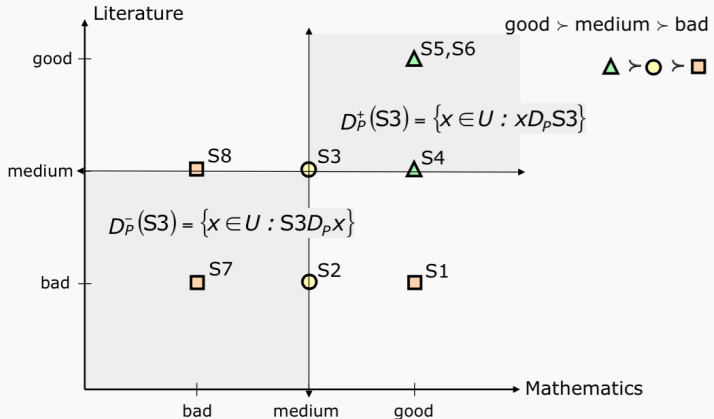
## DRSA - przykłady

- Let us represent the **students** in condition space  $\{M, L\}$  :



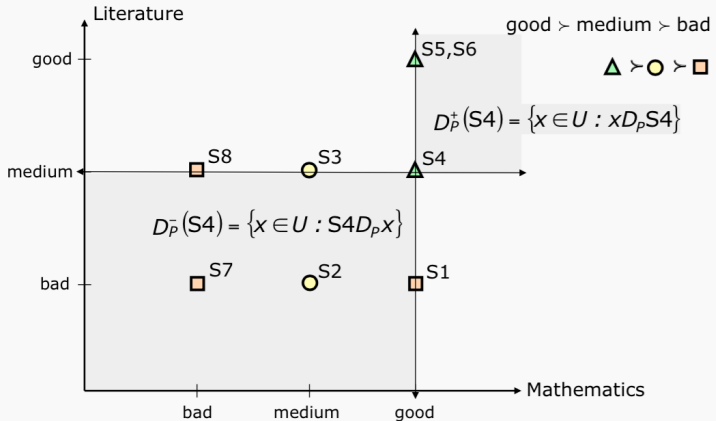
# DRSA - przykłady

## ■ Dominance cones in condition space $\{M, L\}$ :



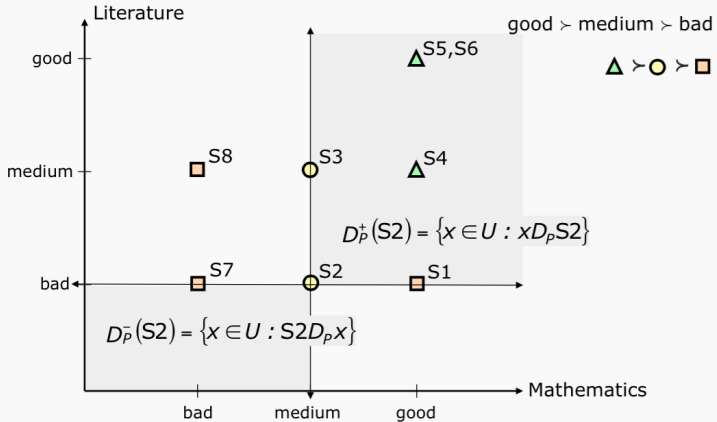
# DRSA - przykłady

- **Dominance cones** in condition space  $\{M, L\}$  :



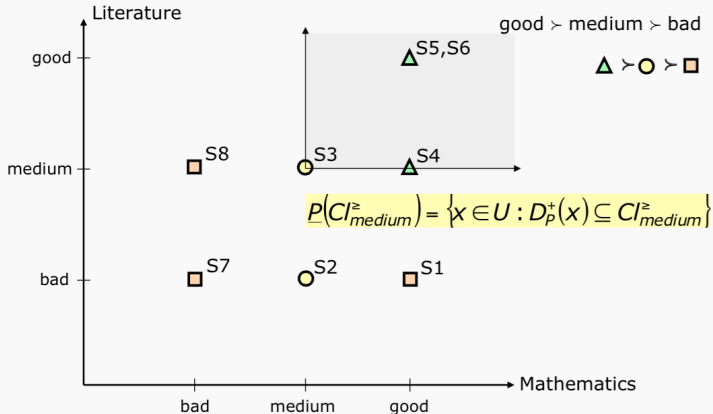
# DRSA - przykłady

## ■ Dominance cones in condition space $\{M, L\}$ :



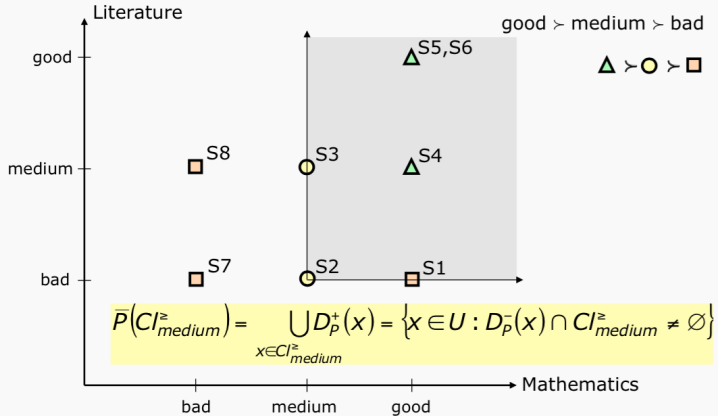
# DRSA - przykłady

- Lower approximation of at least medium students:



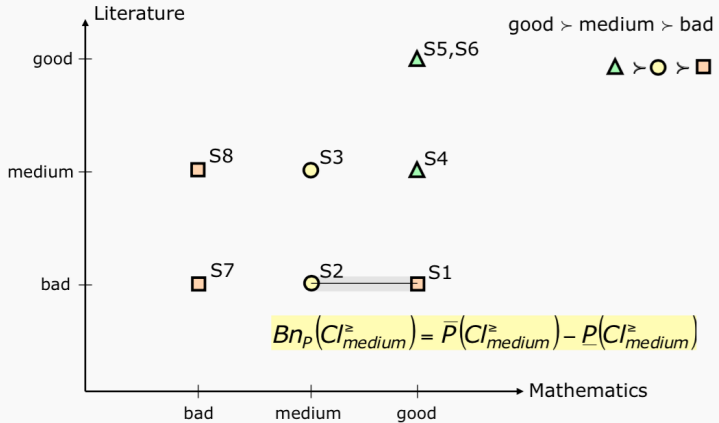
# DRSA - przykłady

- Upper approximation of at least medium students:



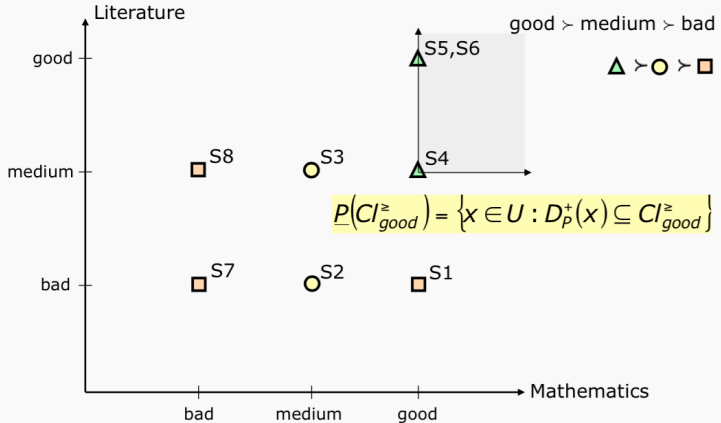
# DRSA - przykłady

- Boundary region of at least medium students:



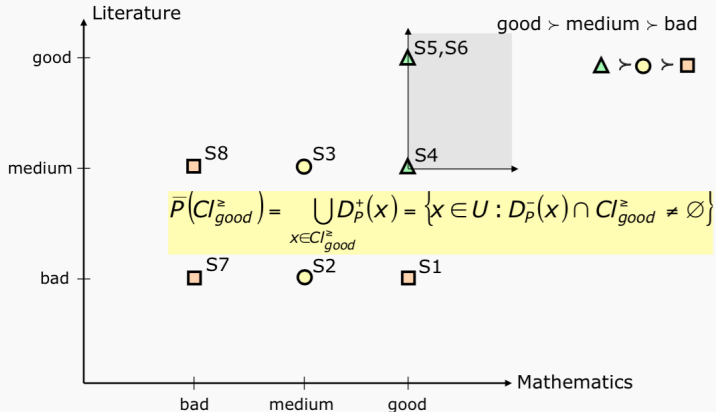
# DRSA - przykłady

- Lower approximation of at least good students:



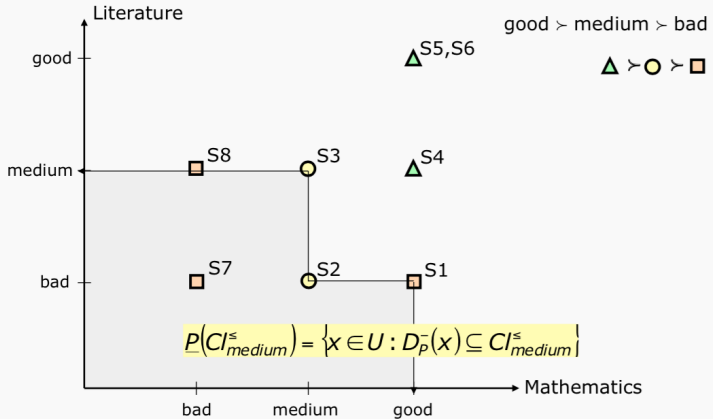
# DRSA - przykłady

- Upper approximation of at least good students:



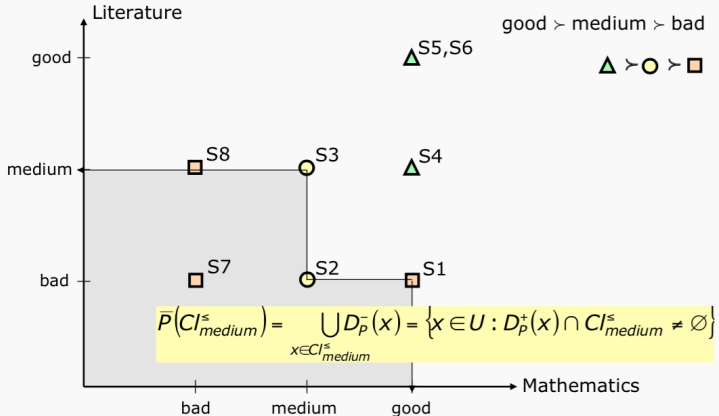
# DRSA - przykłady

- Lower approximation of at most medium students:



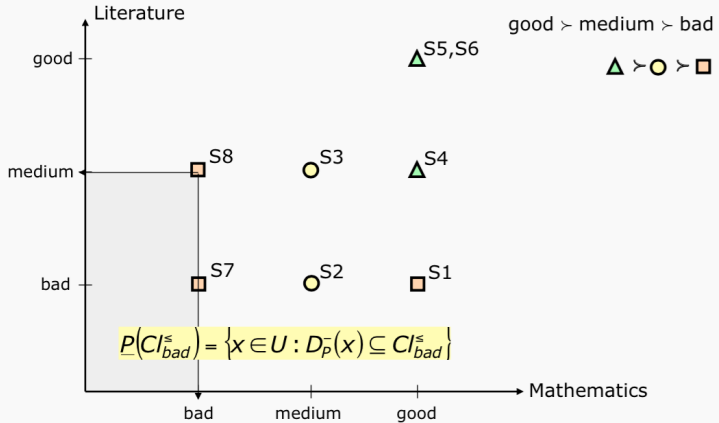
# DRSA - przykłady

- Upper approximation of at most medium students:



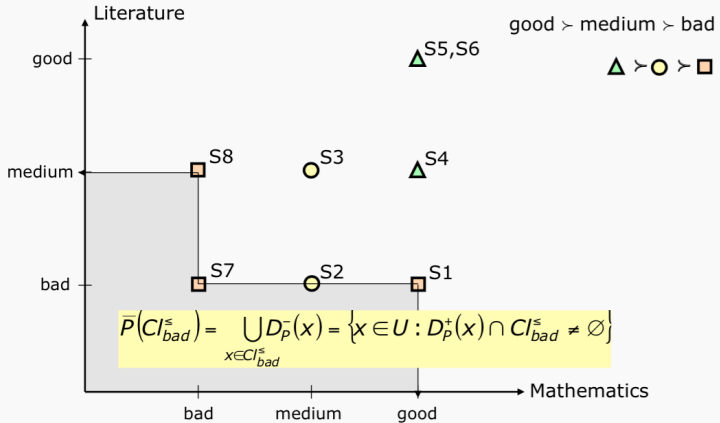
# DRSA - przykłady

- Lower approximation of at most bad students:



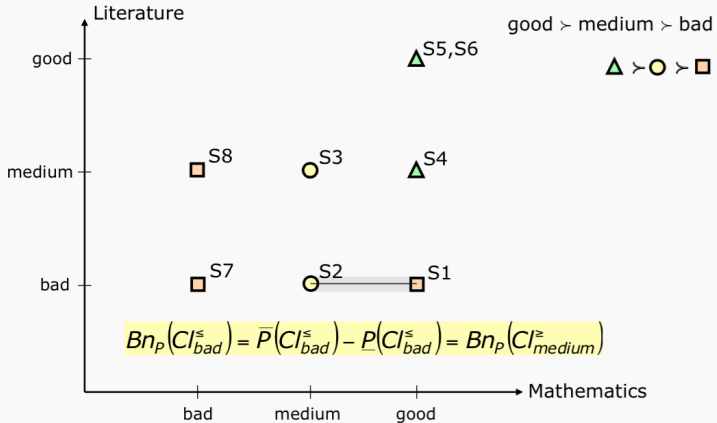
# DRSA - przykłady

- Upper approximation of at most bad students:

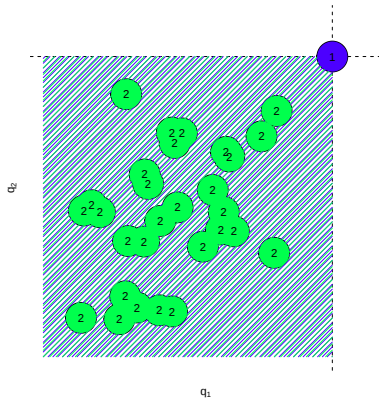
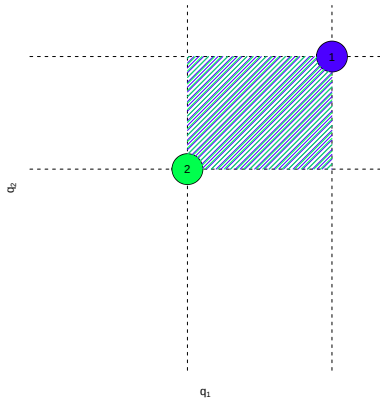


# DRSA - przykłady

- Boundary region of at most bad students:



# Niespójność



## Miary spójności w VC-DRSA

definiujemy dwa rodzaje miar spójności  $f(y)$  i  $g(y)$ , które są pomocne przy definicji rozszerzonego  $P$ -dolnego przybliżenia:

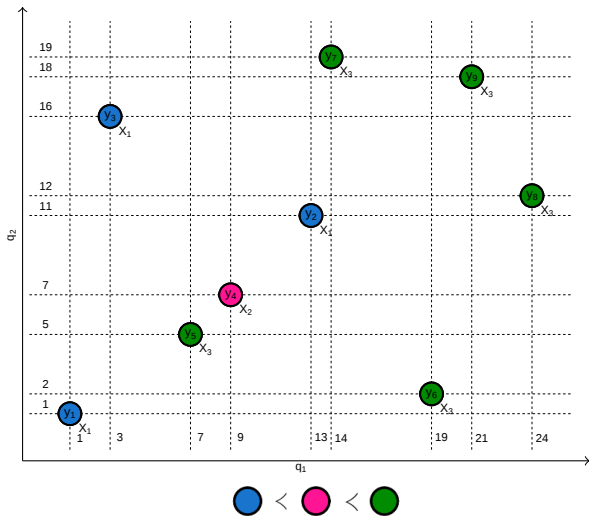
- miary typu zysk:

$$\begin{aligned}\underline{P}^{\alpha_{X_i^{\geq}}}(X_i^{\geq}) &= \{y \in X_i^{\geq} : f_{X_i^{\geq}}^P(y) \geq \alpha_{X_i^{\geq}}\}, \\ \underline{P}^{\alpha_{X_i^{\leq}}}(X_i^{\leq}) &= \{y \in X_i^{\leq} : f_{X_i^{\leq}}^P(y) \geq \alpha_{X_i^{\leq}}\}.\end{aligned}\quad (1)$$

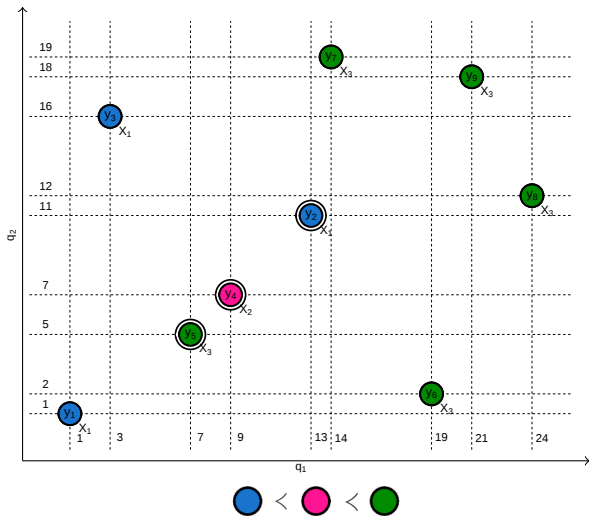
- miary typu koszt:

$$\begin{aligned}\underline{P}^{\beta_{X_i^{\geq}}}(X_i^{\geq}) &= \{y \in X_i^{\geq} : g_{X_i^{\geq}}^P(y) \leq \beta_{X_i^{\geq}}\}, \\ \underline{P}^{\beta_{X_i^{\leq}}}(X_i^{\leq}) &= \{y \in X_i^{\leq} : g_{X_i^{\leq}}^P(y) \leq \beta_{X_i^{\leq}}\}.\end{aligned}\quad (2)$$

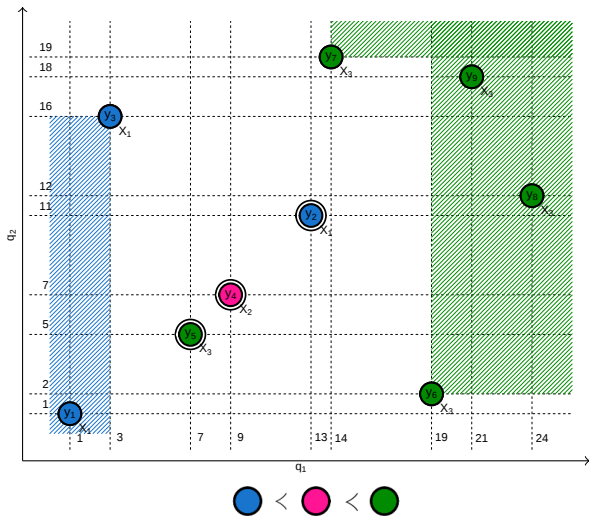
## VC-DRSA - przykład



## VC-DRSA - przykład



## VC-DRSA - przykład



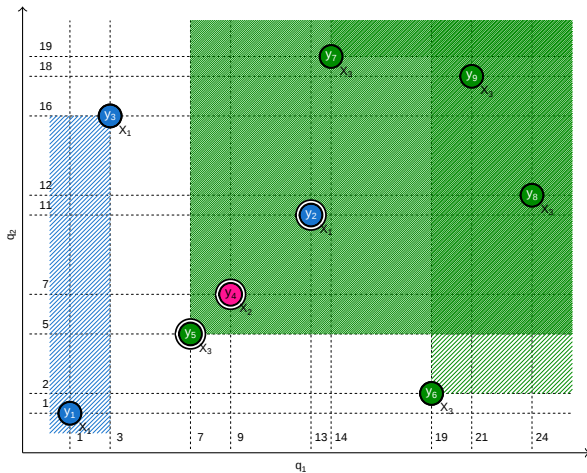
## Miary spójności

Rough membership,  $\mu$  (Pawlak, Skowron, Ziarko)

$$\mu_{X_i^{\geq}}^P(y) = \frac{|D_P^+(y) \cap X_i^{\geq}|}{|D_P^+(y)|}, \quad \mu_{X_i^{\leq}}^P(y) = \frac{|D_P^-(y) \cap X_i^{\leq}|}{|D_P^-(y)|}, \quad (3)$$

- miara typu zysk,
- estymuje prawdopodobieństwo warunkowe:  
 $Pr(x \in X_i^{\geq} | x \in D_P^+(y))$ , i odpowiednio:  
 $Pr(x \in X_i^{\leq} | x \in D_P^-(y))$

# Miary spójności



$$\mu_{X_3}^P(y_5) = \frac{4}{6}$$

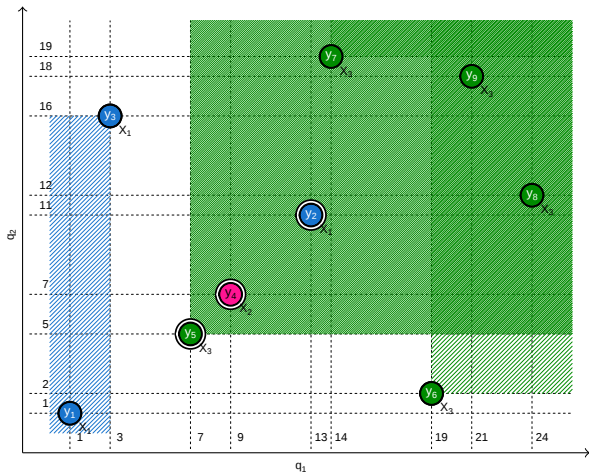
## Miary spójności

∈ (Błaszczynski et al.)

$$\epsilon_{X_i^{\geq}}^P(y) = \frac{|D_P^+(y) \cap \neg X_i^{\geq}|}{|\neg X_i^{\geq}|}, \quad \epsilon_{X_i^{\leq}}^P(y) = \frac{|D_P^-(y) \cap \neg X_i^{\leq}|}{|\neg X_i^{\leq}|}, \quad (3)$$

- miara typu koszt,
- estymuje prawdopodobieństwo warunkowe:  
 $Pr(x \in D_P^+(y) | x \in \neg X_i^{\geq})$  i odpowiednio:  
 $Pr(x \in D_P^-(y) | x \in \neg X_i^{\leq})$

# Miary spójności



$$\epsilon_{X_3}^P(y_5) = \frac{2}{4}$$

- 1 Dominance-based Rough Set Approach (DRSA) - Teoria zbiorów przybliżonych z relacją dominacji
- 2 Modele regułowe w VC-DRSA
- 3 Klasyfikatory regułowe w VC-DRSA
- 4 Systemy głosowania - SCT

## Modele regułowe w VC-DRSA

- Rozszerzone dolne przybliżenia są podstawą indukcji *reguł decyzyjnych*, które są prostą i zarazem zrozumiałą formą reprezentacji:

jeżeli  $ec_1, \dots, ec_m$  to *decyzja* (wskazanie klasy)

## Modele regułowe w VC-DRSA

- Rozszerzone dolne przybliżenia są podstawą indukcji *reguł decyzyjnych*, które są prostą i zarazem zrozumiałą formą reprezentacji:

jeżeli  $ec_1, \dots, ec_m$  to *decyzja* (wskazanie klasy)

- część warunkowa reguły składa się z warunków elementarnych  $ec$

## Modele regułowe w VC-DRSA

- Rozszerzone dolne przybliżenia są podstawą indukcji *reguł decyzyjnych*, które są prostą i zarazem zrozumiałą formą reprezentacji:

jeżeli  $ec_1, \dots, ec_m$  to *decyzja* (wskazanie klasy)

- część warunkowa reguły składa się z warunków elementarnych  $ec$
- reguły są charakteryzowane przez miary (spójności)

## Modelowanie preferencji

rozważamy trzy rodzaje modeli preferencji:

- relacyjne - relacja przewyższania  $S$  lub inna relacja rozmyta (Roy 1968)

## Modelowanie preferencji

rozważamy trzy rodzaje modeli preferencji:

- relacyjne - relacja przewyższania  $S$  lub inna relacja rozmyta (Roy 1968)

$$a S b = „a \text{ jest co najmniej tak dobre jak } b” \quad (3)$$

- funkcyjne - addytywna funkcja użyteczności (Debreu 1960, Luce i Tukey 1964)

$$U(a) = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)] \quad (4)$$

## Modelowanie preferencji

rozważamy trzy rodzaje modeli preferencji:

- relacyjne - relacja przewyższania  $S$  lub inna relacja rozmyta (Roy 1968)

$$a S b = „a \text{ jest co najmniej tak dobre jak } b” \quad (3)$$

- funkcyjne - addytywna funkcja użyteczności (Debreu 1960, Luce i Tukey 1964)

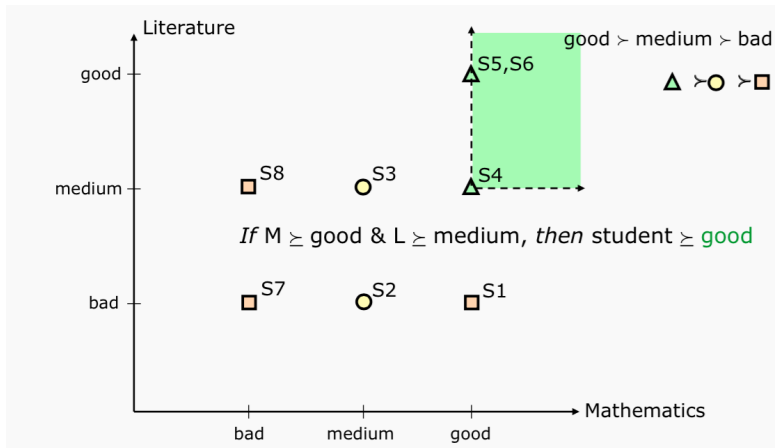
$$U(a) = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)] \quad (4)$$

- zbiór reguł decyzyjnych

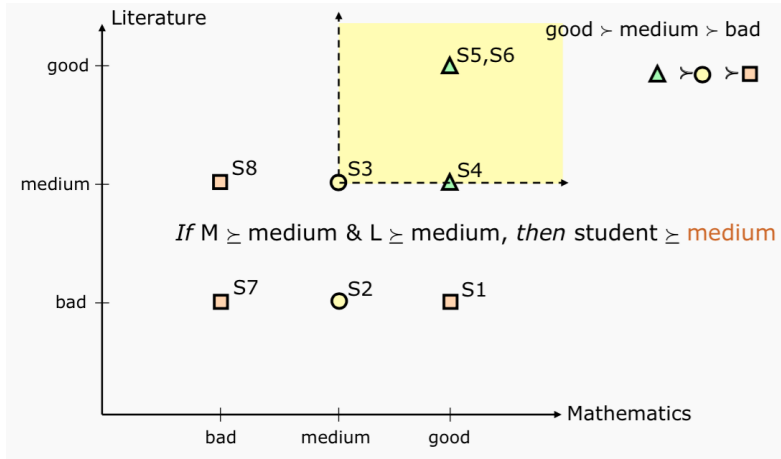
$$\text{jeżeli } \dots \text{ to } \dots \quad (5)$$

zbiór reguł decyzyjnych jest najbardziej ogólnym modelem preferencji (z powyższych trzech)

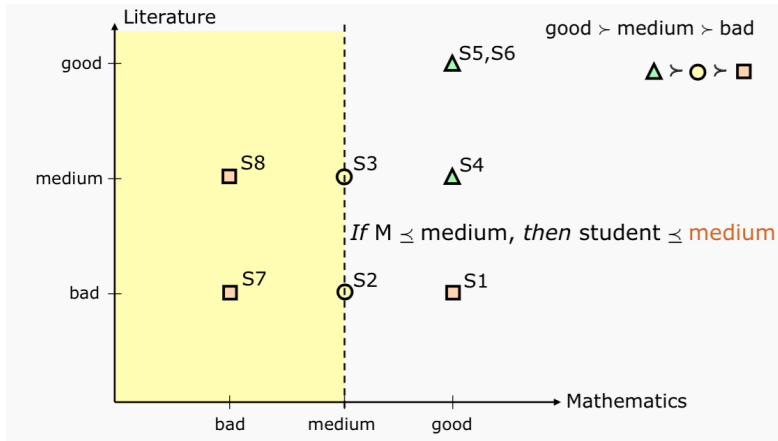
## Reguły decyzyjne - przykłady



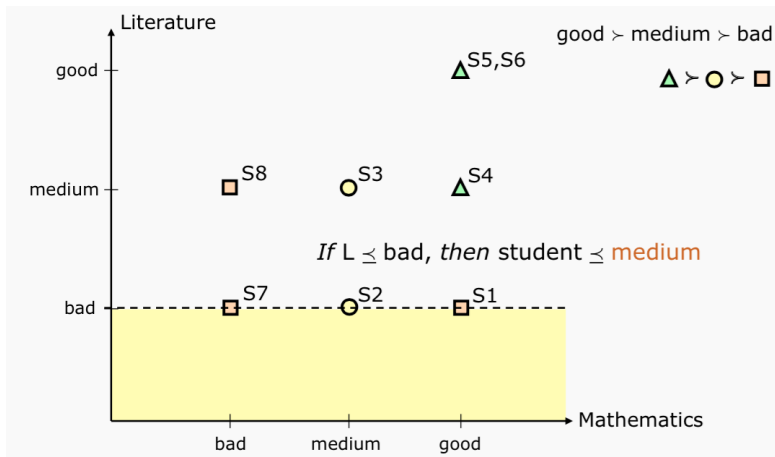
## Reguły decyzyjne - przykłady



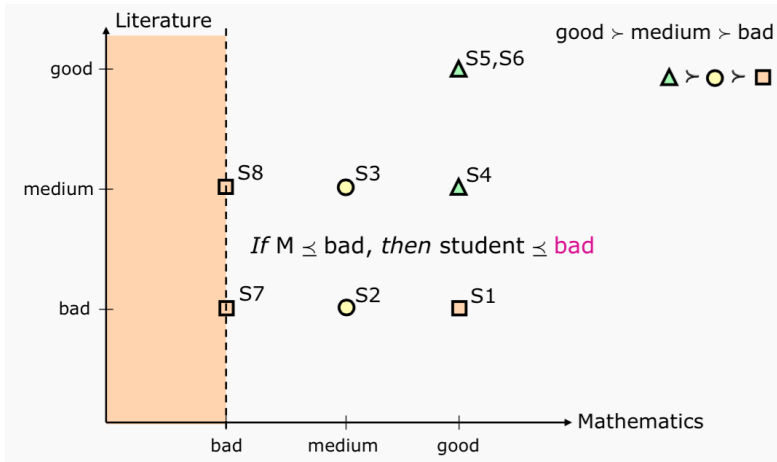
## Reguły decyzyjne - przykłady



## Reguły decyzyjne - przykłady



## Reguły decyzyjne - przykłady



## Modele regułowe w VC-DRSA

- Reguły wyjaśniają decyzje, które występują w danych i mogą służyć do klasyfikacji nowych obiektów

## Modele regułowe w VC-DRSA

- Reguły wyjaśniają decyzje, które występują w danych i mogą służyć do klasyfikacji nowych obiektów
- VC-DomLEM jest algorytmem sekwencyjnego pokrywania, który służy do indukcji silnych reguł spełniających ograniczenia definiowane względem miar spójności

**Input** : set of positive objects  $\underline{P}^{\theta X}(X) \subseteq U$ ,  
 set of objects that can be covered  $AO_P^{\theta X}(X) \subseteq U$ ,  $AO_P^{\theta X}(X) \supseteq \underline{P}^{\theta X}(X)$   
 set of attributes  $P \subseteq C$ ,  
 rule consistency measure  $\hat{\Theta}$ ,  
 rule consistency measure threshold  $\hat{\theta}_X$ .

**Output**: set of rules  $R_X^{\hat{\theta}_X}$  assigning objects to  $X$ .

```

1   $B := \underline{P}^{\theta X}(X)$ ;
2   $R_X^{\hat{\theta}_X} := \emptyset$ ;
3  while  $B \neq \emptyset$  do
4       $r_X^{\hat{\theta}_X} := \emptyset$ ;
5       $EC := \text{ElementaryConditions}(B, P)$ ;
6      while  $(\hat{\Theta}(r_X^{\hat{\theta}_X}) \text{ does not satisfy } \hat{\theta}_X) \text{ or } (\|\Phi_{r_X^{\hat{\theta}_X}}\| \not\subseteq AO_P^{\theta X}(X))$  do
7           $ec := \text{BestElementaryCondition}(EC, r_X^{\hat{\theta}_X}, \hat{\Theta}, \underline{P}^{\theta X}(X))$ ;
8           $r_X^{\hat{\theta}_X} := r_X^{\hat{\theta}_X} \cup ec$ ;
9           $EC := \text{ElementaryConditions}(B \cap \text{supp}(r_X^{\hat{\theta}_X}), P)$ ;
10      $\text{RemoveRedundantElementaryConditions}(r_X^{\hat{\theta}_X}, \hat{\Theta}, \hat{\theta}_X, AO_P^{\theta X}(X))$ ;
11      $R_X^{\hat{\theta}_X} := R_X^{\hat{\theta}_X} \cup r_X^{\hat{\theta}_X}$ ;
12      $B := B \setminus \text{supp}(r_X^{\hat{\theta}_X})$ ;
13  $\text{RemoveRedundantRules}(R_X^{\hat{\theta}_X}, \hat{\Theta}, \underline{P}^{\theta X}(X))$ ;
    
```

## VC-DomLEM

Wybór najlepszego warunku elementarnego  $ec$  dodawanego do reguły

- 1 wartość miary spójności  $r_X^{\hat{\theta}^X} \cup ec$

Wybór najlepszego warunku elementarnego  $ec$  dodawanego do reguły

- ① wartość miary spójności  $r_X^{\hat{\theta}_X} \cup ec$
- ② liczba obiektów z  $P$ -dolnego przybliżenia  
 $|\|\Phi_{r_X^{\hat{\theta}_X} \cup ec} \cap \underline{P}^{\theta_X}(X)|$

Wybór najlepszego warunku elementarnego  $ec$  dodawanego do reguły

- 1 wartość miary spójności  $r_X^{\hat{\theta}_X} \cup ec$
- 2 liczba obiektów z  $P$ -dolnego przybliżenia  
 $||\Phi_{r_X^{\hat{\theta}_X} \cup ec}|| \cap P^{\theta_X}(X)|$

Własności

- wynikiem jest zbiór minimalnych reguł decyzyjnych, które pokrywają wszystkie obiekty z  $P$ -dolnego przybliżenia

Wybór najlepszego warunku elementarnego  $ec$  dodawanego do reguły

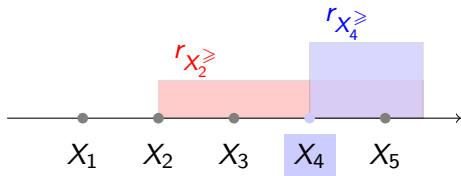
- 1 wartość miary spójności  $r_X^{\hat{\theta}_X} \cup ec$
- 2 liczba obiektów z  $P$ -dolnego przybliżenia  
 $||\Phi_{r_X^{\hat{\theta}_X} \cup ec}|| \cap P^{\theta_X}(X)|$

### Własności

- wynikiem jest zbiór minimalnych reguł decyzyjnych, które pokrywają wszystkie obiekty z  $P$ -dolnego przybliżenia
- własności miar spójności są istotne dla procesu indukcji reguł

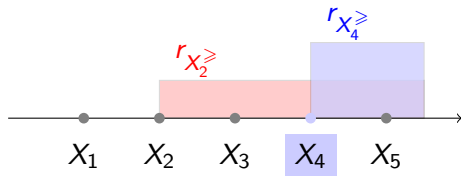
- 1 Dominance-based Rough Set Approach (DRSA) - Teoria zbiorów przybliżonych z relacją dominacji
- 2 Modele regułowe w VC-DRSA
- 3 Klasyfikatory regułowe w VC-DRSA
- 4 Systemy głosowania - SCT

## Standardowy schemat klasyfikacji

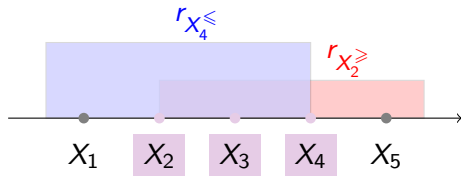


sugestia jest przecięciem  
unii klas sugerowanych  
przez reguły pokrywają-  
ce

## Standardowy schemat klasyfikacji

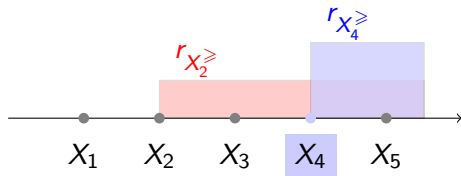


sugestia jest przecięciem  
unii klas sugerowanych  
przez reguły pokrywają-  
ce

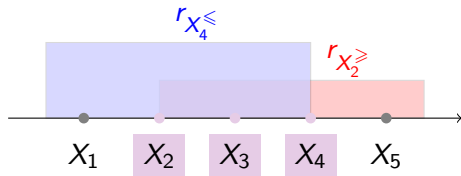


nieprecyzyjna sugestia

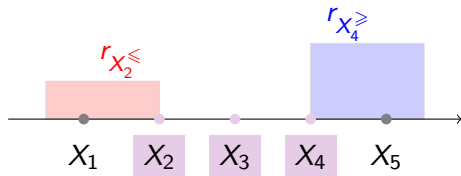
## Standardowy schemat klasyfikacji



sugestia jest przecięciem  
unii klas sugerowanych  
przez reguły pokrywają-  
ce

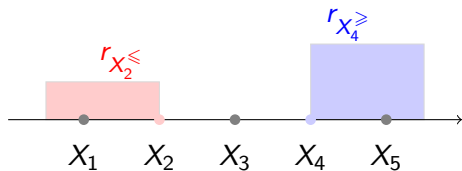


nieprecyzyjna sugestia



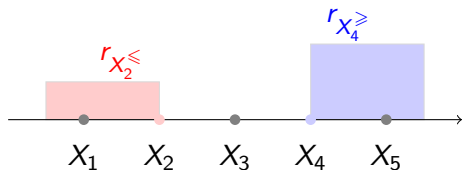
sprzeczna sugestia

## Nowy schemat klasyfikacji



sugestia na podstawie współczynnika score coefficient, który łączy **relatywne wsparcie** i  **pewność**.

## Nowy schemat klasyfikacji



sugestia na podstawie współczynnika score coefficient, który łączy **relatywne wsparcie** i **pewność**.

assign  $y \rightarrow X_t$  if

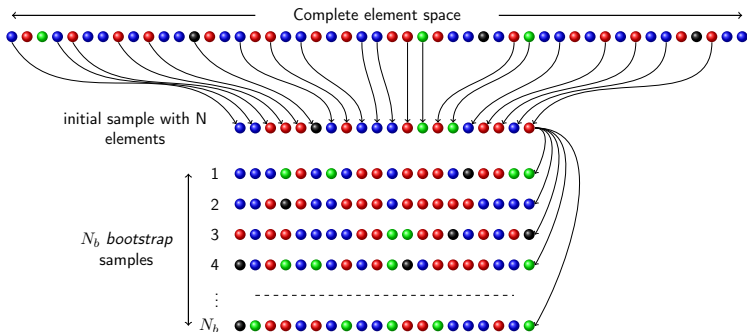
$$X_t = \arg \max_{t=1}^n (\text{score}_{\text{cov}_{X_t}(y)}(X_t, y) - \text{score}_{\text{cov}_{\neg X_t}(y)}(\neg X_t, y))$$

$$\text{score}_{\text{cov}_{X_t}(y)}(X_t, y) = \text{Pr}(r_{X_t}(y)|X_t) \cdot \text{Pr}(X_t|r_{X_t}(y))$$

$$\text{score}_{\text{cov}_{\neg X_t}(y)}(\neg X_t, y) = \text{Pr}(r_{\neg X_t}(y)|\neg X_t) \cdot \text{Pr}(\neg X_t|r_{\neg X_t}(y))$$

$$\text{Pr}(\|\Phi_r\||X_t) = \frac{|\|\Phi_r\| \cap X_t|}{|X_t|}, \quad \text{Pr}(X_t|\|\Phi_r\|) = \frac{|\|\Phi_r\| \cap X_t|}{|\|\Phi_r\||}$$

# Bagging

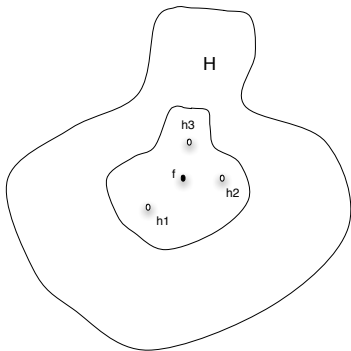


## Theorem (B. Efron, Ann. Statist. 1979)

When  $N$  tend to infinity, the distribution of average values computed from bootstrap samples is equal to the distribution of average values obtained from ALL samples with  $N$  elements which can be constructed from the complete space. Thus the width of the distribution gives an evaluation of the sample quality.

## Dlaczego rodziny klasyfikatorów?

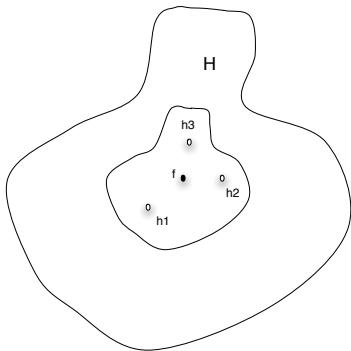
Są trzy sposoby wyjaśnienia: **Statystyczne**



- procedury uczenia przeglądają przestrzeń hipotez  $H$

## Dlaczego rodziny klasyfikatorów?

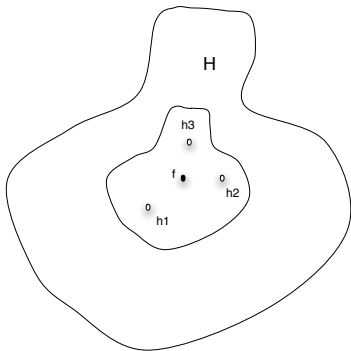
Są trzy sposoby wyjaśnienia: **Statystyczne**



- procedury uczenia przeglądają przestrzeń hipotez  $H$
- wiele spośród rozważanych hipotez zapewnia tą samą trafność

# Dlaczego rodziny klasyfikatorów?

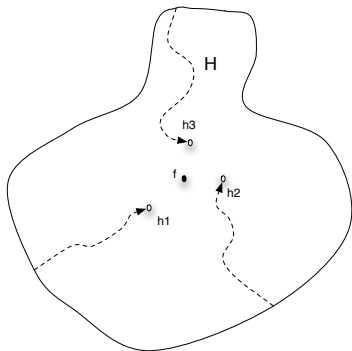
Są trzy sposoby wyjaśnienia: **Statystyczne**



- procedury uczenia przeglądają przestrzeń hipotez  $H$
- wiele spośród rozważanych hipotez zapewnia tą samą trafność
- rodziny klasyfikatorów „uśredniają” głosując i przez to zmniejszają ryzyko wybrania błędnej hipotezy

## Dlaczego rodziny klasyfikatorów?

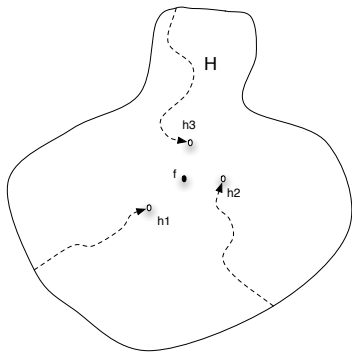
Są trzy sposoby wyjaśnienia: **Obliczeniowe**



- procedury uczenia zwykle wykonują lokalne przeszukiwanie przestrzeni  $H$

## Dlaczego rodziny klasyfikatorów?

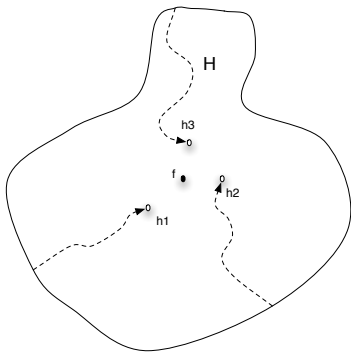
Są trzy sposoby wyjaśnienia: **Obliczeniowe**



- procedury uczenia zwykle wykonują lokalne przeszukiwanie przestrzeni  $H$
- w związku z tym, mogą zatrzymać się w optimum lokalnym

## Dlaczego rodziny klasyfikatorów?

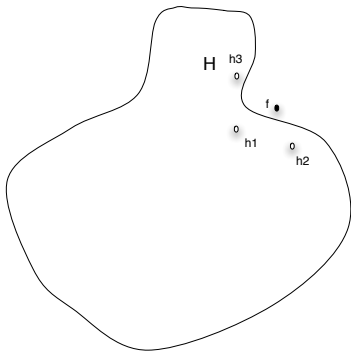
Są trzy sposoby wyjaśnienia: **Obliczeniowe**



- procedury uczenia zwykle wykonują lokalne przeszukiwanie przestrzeni  $H$
- w związku z tym, mogą zatrzymać się w optimum lokalnym
- rodziny wykonujące lokalne przeszukiwanie z wielu punktów startowych osiągają lepsze przybliżenie optimum globalnego

## Dlaczego rodziny klasyfikatorów?

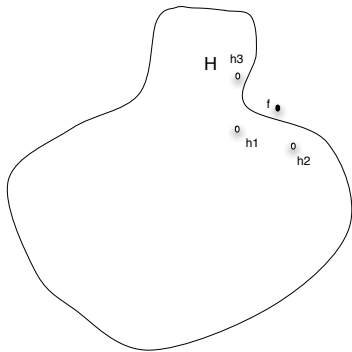
Są trzy sposoby wyjaśnienia: **Reprezentacyjne**



- prawdziwa funkcja, której chcemy się nauczyć jest niemożliwa to wyrażenia poprzez hipotezy z  $H$

## Dlaczego rodziny klasyfikatorów?

Są trzy sposoby wyjaśnienia: **Reprezentacyjne**



- prawdziwa funkcja, której chcemy się nauczyć jest niemożliwa to wyrażenia poprzez hipotezy z  $H$
- poprzez „uśrednianie” możemy rozszerzyć przestrzeń wyrażalnych funkcji

## Sugestia rodziny klasyfikatorów

### Zasada głosowania medianowego

przypisz  $y \rightarrow X_i$  jeżeli

$$X_i = \arg \operatorname{med}_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \operatorname{vote}_j(X_i, y) \right).$$

## Sugestia rodziny klasyfikatorów

### Zasada głosowania medianowego

przypisz  $y \rightarrow X_i$  jeżeli

$$X_i = \arg \operatorname{med}_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \operatorname{vote}_j(X_i, y) \right).$$

- głos  $\operatorname{vote}_j(X_k, y)$  pochodzi od  $j$ -ego klasyfikatora bazowego ( $j = 1, \dots, m$ )

## Sugestia rodziny klasyfikatorów

### Zasada głosowania medianowego

przypisz  $y \rightarrow X_i$  jeżeli

$$X_i = \arg \operatorname{med}_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \operatorname{vote}_j(X_i, y) \right).$$

- głos  $\operatorname{vote}_j(X_k, y)$  pochodzi od  $j$ -ego klasyfikatora bazowego ( $j = 1, \dots, m$ )
- mediana jest miarą tendencji centralnej dla skal porządkowych

- ① Dominance-based Rough Set Approach (DRSA) - Teoria zbiorów przybliżonych z relacją dominacji
- ② Modele regułowe w VC-DRSA
- ③ Klasyfikatory regułowe w VC-DRSA
- ④ Systemy głosowania - SCT

# Głosowanie - teoria społecznego wyboru

- $n$  alternatyw -  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

## Głosowanie - teoria społecznego wyboru

- $n$  alternatyw -  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,
- $k$  głosujących - decydenci:  $DM_1, DM_2, \dots, DM_k$ ,

## Głosowanie - teoria społecznego wyboru

- $n$  alternatyw -  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,
- $k$  głosujących - decydenci:  $DM_1, DM_2, \dots, DM_k$ ,
- każdy z decydentów ma własne preferencje dotyczące alternatyw

## Głosowanie - teoria społecznego wyboru

- $n$  alternatyw -  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,
- $k$  głosujących - decydenci:  $DM_1, DM_2, \dots, DM_k$ ,
- każdy z decydentów ma własne preferencje dotyczące alternatyw
- która z alternatyw powinna zostać wybrana przez grupę?

## Reguła wyboru społecznego - SCR

- preferencje głosującego (decydenta) przedstawiamy w postaci rankingu alternatyw (ranking nie musi być zupełny)

## Reguła wyboru społecznego - SCR

- preferencje głosującego (decydenta) przedstawiamy w postaci rankingu alternatyw (ranking nie musi być zupełny)
- przykładowe profile preferencji decydentów mogą wyglądać tak:

$$DM_1 : A \succ B \succ C$$

$$DM_2 : B \succ C \succ A$$

$$DM_3 : C \succ B \succ A$$

## Reguła wyboru społecznego - SCR

- preferencje głosującego (decydenta) przedstawiamy w postaci rankingu alternatyw (ranking nie musi być zupełny)
- przykładowe profile preferencji decydentów mogą wyglądać tak:

$$DM_1 : A \succ B \succ C$$

$$DM_2 : B \succ C \succ A$$

$$DM_3 : C \succ B \succ A$$

- reguła wyboru społecznego (SCR) agreguje profile preferencji tworząc ranking, na podstawie którego można wskazać najlepszą alternatywę/alternatywy (ranking)
- przykłady: wybory polityczne lub korporacyjne, wybór projektów, selekcja kandydatów w konkursach

## Reguła wyboru społecznego - SCR

- preferencje głosującego (decydenta) przedstawiamy w postaci rankingu alternatyw (ranking nie musi być zupełny)
- przykładowe profile preferencji decydentów mogą wyglądać tak:

$$DM_1 : A \succ B \succ C$$

$$DM_2 : B \succ C \succ A$$

$$DM_3 : C \succ B \succ A$$

- reguła wyboru społecznego (SCR) agreguje profile preferencji tworząc ranking, na podstawie którego można wskazać najlepszą alternatywę/alternatywy (ranking)
- przykłady: wybory polityczne lub korporacyjne, wybór projektów, selekcja kandydatów w konkursach
- reguła wyboru społecznego przekłada się na regułę głosowania

## Reguła większościowa

- każdy z głosujących może oddać jeden głos,
- wygrywa alternatywa, która została wskazana jako najlepsza przez największą liczbę głosujących,

## Reguła większościowa

- każdy z głosujących może oddać jeden głos,
- wygrywa alternatywa, która została wskazana jako najlepsza przez największą liczbę głosujących,

4 :  $A \succ B \succ C$

3 :  $B \succ C \succ A$

2 :  $C \succ B \succ A$

## Reguła większościowa

- każdy z głosujących może oddać jeden głos,
- wygrywa alternatywa, która została wskazana jako najlepsza przez największą liczbę głosujących,

4 :  $A \succ B \succ C$

3 :  $B \succ C \succ A$

2 :  $C \succ B \succ A$

- 4 głosy na  $A$ , 3 na  $B$ , 2 na  $C$  - wygrywa  $A$ ,

## Reguła większościowa

- to jedyna reguła głosowania, która jest:
  - anonimowa - każdy głos ma taką samą wagę,
  - neutralna - etykiety nadane alternatywom nie wpływają na ostateczny wynik,
  - monotoniczna - jeśli głosujący poprawi pozycję (rangę) alternatywy  $x$ , która jest alternatywą wygrywającą w ostatecznym rankingu to  $x$  zawsze pozostanie zwycięzcą

# Reguła większościowa

- to jedyna reguła głosowania, która jest:
  - anonimowa - każdy głos ma taką samą wagę,
  - neutralna - etykiety nadane alternatywom nie wpływają na ostateczny wynik,
  - monotoniczna - jeśli głosujący poprawi pozycję (rangę) alternatywy  $x$ , która jest alternatywą wygrywającą w ostatecznym rankingu to  $x$  zawsze pozostanie zwycięzcą
- Wielka Brytania, USA, Kanada, Kenia, Kuweit, Nepal, Singapur, Południowa Korea, ... - łącznie 40 państw.

## Reguła antywiększościowa

- każda oprócz ostatniej z alternatyw w profilach preferencji jest nagradzana

## Reguła antywiększościowa

- każda oprócz ostatniej z alternatyw w profilach preferencji jest nagradzana

$$4 : A \succ B \succ C$$

$$3 : B \succ C \succ A$$

$$2 : C \succ B \succ A$$

## Reguła antywiększościowa

- każda oprócz ostatniej z alternatyw w profilach preferencji jest nagradzana
  - 4 :  $A \succ B \succ C$
  - 3 :  $B \succ C \succ A$
  - 2 :  $C \succ B \succ A$
- 4 głosy na  $A$ , 9 na  $B$ , 5 na  $C$  - wygrywa  $B$ ,

## Głosowanie aprobowe

- każdy z głosujących oddaje głosy na wybrany przez siebie podzbiór alternatyw
- każda z wybranych alternatyw uzyskuje jeden głos
- wygrywa alternatywa z największą liczbą głosów

## Głosowanie aprobowe

- każdy z głosujących oddaje głosy na wybrany przez siebie podzbiór alternatyw
- każda z wybranych alternatyw uzyskuje jeden głos
- wygrywa alternatywa z największą liczbą głosów
  - 4 : *A*
  - 3 : *B, C*
  - 2 : *C*

## Głosowanie aprobowe

- każdy z głosujących oddaje głosy na wybrany przez siebie podzbiór alternatyw
- każda z wybranych alternatyw uzyskuje jeden głos
- wygrywa alternatywa z największą liczbą głosów
  - 4 :  $A$
  - 3 :  $B, C$
  - 2 :  $C$
- 4 głosy na  $A$ , 3 na  $B$ , 5 na  $C$  - wygrywa  $C$ ,

## Głosowanie aprobowe

- każdy z głosujących oddaje głosy na wybrany przez siebie podzbiór alternatyw
- każda z wybranych alternatyw uzyskuje jeden głos
- wygrywa alternatywa z największą liczbą głosów
  - 4 :  $A$
  - 3 :  $B, C$
  - 2 :  $C$
- 4 głosy na  $A$ , 3 na  $B$ , 5 na  $C$  - wygrywa  $C$ ,
- Conclave (1294-1621), wybór sekretarza generalnego UN

## Wybory eliminujące - większościowe

- wygrywająca alternatywa musi uzyskać ponad 50% głosów
- w przeciwnym wypadku, pozostają dwie najlepsze i głosowanie jest powtarzane

## Wybory eliminujące - większościowe

- wygrywająca alternatywa musi uzyskać ponad 50% głosów
- w przeciwnym wypadku, pozostają dwie najlepsze i głosowanie jest powtarzane

4 :  $A \succ B \succ C$

3 :  $B \succ C \succ A$

2 :  $C \succ B \succ A$

## Wybory eliminujące - większościowe

- wygrywająca alternatywa musi uzyskać ponad 50% głosów
- w przeciwnym wypadku, pozostają dwie najlepsze i głosowanie jest powtarzane
  - 4 :  $A \succ B \succ C$
  - 3 :  $B \succ C \succ A$
  - 2 :  $C \succ B \succ A$
- 4 głosy na  $A$ , 3 na  $B$ , 2 na  $C$  - nie przekroczono progu 50%, zostają  $A$  i  $B$ ,

## Wybory eliminujące - większościowe

- wygrywająca alternatywa musi uzyskać ponad 50% głosów
- w przeciwnym wypadku, pozostają dwie najlepsze i głosowanie jest powtarzane

4 :  $A \succ B \succ C$

3 :  $B \succ C \succ A$

2 :  $C \succ B \succ A$

- 4 głosy na  $A$ , 3 na  $B$ , 2 na  $C$  - nie przekroczono progu 50%, zostają  $A$  i  $B$ ,

4 :  $A \succ B$

3 :  $B \succ A$

2 :  $B \succ A$

- 4 głosy na  $A$ , 5 na  $B$ , wygrywa  $B$ ,

## Wybory eliminujące - większościowe

- wygrywająca alternatywa musi uzyskać ponad 50% głosów
- w przeciwnym wypadku, pozostają dwie najlepsze i głosowanie jest powtarzane
  - 4 :  $A \succ B \succ C$
  - 3 :  $B \succ C \succ A$
  - 2 :  $C \succ B \succ A$
- 4 głosy na  $A$ , 3 na  $B$ , 2 na  $C$  - nie przekroczono progu 50%, zostają  $A$  i  $B$ ,
  - 4 :  $A \succ B$
  - 3 :  $B \succ A$
  - 2 :  $B \succ A$
- 4 głosy na  $A$ , 5 na  $B$ , wygrywa  $B$ ,
- wybory prezydenckie w Polsce, Francji, Brazylii, Portugalii, ...

## Wybory eliminujące - single transferable vote (SVT)

- wygrywająca alternatywa musi uzyskać ponad 50% głosów
- w przeciwnym wypadku, pozostają wszystkie alternatywy oprócz najsłabszej i głosowanie jest powtarzane do skutku

## Wybory eliminujące - single transferable vote (SVT)

- wygrywająca alternatywa musi uzyskać ponad 50% głosów
- w przeciwnym wypadku, pozostają wszystkie alternatywy oprócz najsłabszej i głosowanie jest powtarzane do skutku
- wybory prezydenckie w Australii, Nowej Zelandii, ...

## Wybory eliminujące - SVT

5 :  $A \succ B \succ C \succ D$

7 :  $B \succ D \succ C \succ A$

7 :  $C \succ B \succ A \succ D$

4 :  $D \succ C \succ B \succ A$

## Wybory eliminujące - SVT

5 :  $A \succ B \succ C \succ D$

7 :  $B \succ D \succ C \succ A$

7 :  $C \succ B \succ A \succ D$

4 :  $D \succ C \succ B \succ A$

- 5 głosów na  $A$ , 7 na  $B$ , 7 na  $C$ , 4 na  $D$  - nie przekroczono progu 50%, usuwamy  $D$ ,

## Wybory eliminujące - SVT

5 :  $A \succ B \succ C \succ D$

7 :  $B \succ D \succ C \succ A$

7 :  $C \succ B \succ A \succ D$

4 :  $D \succ C \succ B \succ A$

- 5 głosów na  $A$ , 7 na  $B$ , 7 na  $C$ , 4 na  $D$  - nie przekroczono progu 50%, usuwamy  $D$ ,

5 :  $A \succ B \succ C$

7 :  $B \succ C \succ A$

7 :  $C \succ B \succ A$

4 :  $C \succ B \succ A$

## Wybory eliminujące - SVT

5 :  $A \succ B \succ C \succ D$

7 :  $B \succ D \succ C \succ A$

7 :  $C \succ B \succ A \succ D$

4 :  $D \succ C \succ B \succ A$

- 5 głosów na  $A$ , 7 na  $B$ , 7 na  $C$ , 4 na  $D$  - nie przekroczono progu 50%, usuwamy  $D$ ,

5 :  $A \succ B \succ C$

7 :  $B \succ C \succ A$

7 :  $C \succ B \succ A$

4 :  $C \succ B \succ A$

- 5 głosów na  $A$ , 7 na  $B$ , 11 na  $C$  - nie przekroczono progu 50%, usuwamy  $A$ ,

## Wybory eliminujące - SVT

5 :  $A \succ B \succ C$

7 :  $B \succ C \succ A$

7 :  $C \succ B \succ A$

4 :  $C \succ B \succ A$

- 5 głosów na  $A$ , 7 na  $B$ , 11 na  $C$  - nie przekroczono progu 50%, usuwamy  $A$ ,

5 :  $B \succ C$

7 :  $B \succ C$

7 :  $C \succ B$

4 :  $C \succ B$

- 12 na  $B$ , 11 na  $C$  - wygrywa  $B$

## Paradoksy - zwycięzca przegrywa

- zwycięzca może przegrać pomimo tego, że głosujący poprawili jego pozycję w profilu preferencji

## Paradoksy - zwycięzca przegrywa

- zwycięzca może przegrać pomimo tego, że głosujący poprawili jego pozycję w profilu preferencji

27 :  $A \succ B \succ C$

42 :  $C \succ A \succ B$

24 :  $B \succ C \succ A$

- eliminacja większościowa: w pierwszej rundzie pozostaw  $A$  i  $C$ , potem  $C$  wygrywa z  $A$  w stosunku 66:27,

## Paradoksy - zwycięzca przegrywa

- zwycięzca może przegrać pomimo tego, że głosujący poprawili jego pozycję w profilu preferencji

27 :  $A \succ B \succ C$

42 :  $C \succ A \succ B$

24 :  $B \succ C \succ A$

- eliminacja większościowa: w pierwszej rundzie pozostaw  $A$  i  $C$ , potem  $C$  wygrywa z  $A$  w stosunku 66:27,
- niech 4 głosujących poprawi pozycję  $C$  z 3 na 1:

23 :  $A \succ B \succ C$

46 :  $C \succ A \succ B$

24 :  $B \succ C \succ A$

## Paradoksy - zwycięzca przegrywa

- zwycięzca może przegrać pomimo tego, że głosujący poprawili jego pozycję w profilu preferencji

27 :  $A \succ B \succ C$

42 :  $C \succ A \succ B$

24 :  $B \succ C \succ A$

- eliminacja większościowa: w pierwszej rundzie pozostaw  $A$  i  $C$ , potem  $C$  wygrywa z  $A$  w stosunku 66:27,
- niech 4 głosujących poprawi pozycję  $C$  z 3 na 1:

23 :  $A \succ B \succ C$

46 :  $C \succ A \succ B$

24 :  $B \succ C \succ A$

- eliminacja większościowa: w pierwszej rundzie pozostaw  $B$  i  $C$ , potem  $B$  wygrywa z  $C$  w stosunku 47:46, pomimo tego, że poparcie  $C$  wzrosło!

## Paradoksy - nagły zwycięzca

- alternatywa, która nie była dotychczas zwycięzcą, wygrywa po dodaniu głosów, w których uzyskała najgorszą pozycję (w profilu preferencji)

## Paradoksy - nagły zwycięzca

- alternatywa, która nie była dotychczas zwycięzcą, wygrywa po dodaniu głosów, w których uzyskała najgorszą pozycję (w profilu preferencji)
  - 23 :  $A \succ B \succ C$
  - 46 :  $C \succ A \succ B$
  - 24 :  $B \succ C \succ A$
- eliminacja większościowa: w pierwszej rundzie pozostaw  $B$  i  $C$ , potem  $B$  wygrywa z  $C$  w stosunku 47:46,

## Paradoksy - nagły zwycięzca

- alternatywa, która nie była dotychczas zwycięzcą, wygrywa po dodaniu głosów, w których uzyskała najgorszą pozycję (w profilu preferencji)

23 :  $A \succ B \succ C$

46 :  $C \succ A \succ B$

24 :  $B \succ C \succ A$

- eliminacja większościowa: w pierwszej rundzie pozostaw  $B$  i  $C$ , potem  $B$  wygrywa z  $C$  w stosunku 47:46,
- założmy, że dodatkowych 42 głosujących podało:  $A \succ B \succ C$

65 :  $A \succ B \succ C$

46 :  $C \succ A \succ B$

24 :  $B \succ C \succ A$

- eliminacja większościowa: w pierwszej rundzie pozostaw  $A$  i  $C$ , potem  $C$  wygrywa z  $A$  w stosunku 70:65, pomimo tego, że dodatkowe głosy były przeciwko  $C$ !

## Reguła Bordy

- każdy głosujący oddaje  $n - 1$  głosów na najbardziej preferowaną alternatywę,  $n - 2$  głosy na drugą najbardziej preferowaną, ..., i 0 punktów na najmniej preferowaną alternatywę
- alternatywa z największą liczbą głosów wygrywa

## Reguła Bordy

- każdy głosujący oddaje  $n - 1$  głosów na najbardziej preferowaną alternatywę,  $n - 2$  głosy na drugą najbardziej preferowaną, ..., i 0 punktów na najmniej preferowaną alternatywę
  - alternatywa z największą liczbą głosów wygrywa
- 4 :  $A \succ B \succ C$   
3 :  $B \succ C \succ A$   
2 :  $C \succ B \succ A$

## Reguła Bordy

- każdy głosujący oddaje  $n - 1$  głosów na najbardziej preferowaną alternatywę,  $n - 2$  głosy na drugą najbardziej preferowaną, ..., i 0 punktów na najmniej preferowaną alternatywę
- alternatywa z największą liczbą głosów wygrywa

$$4: A \succ B \succ C$$

$$3: B \succ C \succ A$$

$$2: C \succ B \succ A$$

$$A: 4 \times 2 + 3 \times 0 + 2 \times 0 = 8 \text{ głosów}$$

$$B: 4 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 12 \text{ głosów}$$

$$C: 4 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7 \text{ głosów}$$

## Reguła Bordy

- każdy głosujący oddaje  $n - 1$  głosów na najbardziej preferowaną alternatywę,  $n - 2$  głosy na drugą najbardziej preferowaną, ..., i 0 punktów na najmniej preferowaną alternatywę
- alternatywa z największą liczbą głosów wygrywa

$$4: A \succ B \succ C$$

$$3: B \succ C \succ A$$

$$2: C \succ B \succ A$$

$$A: 4 \times 2 + 3 \times 0 + 2 \times 0 = 8 \text{ głosów}$$

$$B: 4 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 12 \text{ głosów}$$

$$C: 4 \times 0 + 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7 \text{ głosów}$$

- wygrywa  $B$

## Relacja słabego porządku

- opinia głosującego  $DM_i$  o dwóch alternatywach jest nazywana relacją słabego porządku  $R_i$
- $DM_i$  uważa, że  $x$  jest co najmniej tak samo dobry jak  $y$   
 $\iff xR_i y$
- jak ustalić relację  $R$  uwzględniającą wszystkich  $k$  głosujących?

## Relacja słabego porządku

- opinia głosującego  $DM_i$  o dwóch alternatywach jest nazywana relacją słabego porządku  $R_i$
- $DM_i$  uważa, że  $x$  jest co najmniej tak samo dobry jak  $y$   
 $\iff xR_i y$
- jak ustalić relację  $R$  uwzględniającą wszystkich  $k$  głosujących?
- wybór funkcji społecznego wyboru  $f$  takiej, że  
 $R = f(R_1, \dots, R_k)$
- procedury głosowania stanowią kandydatów na funkcję społecznego wyboru  $f$

## Wymagania dla funkcji społecznego wyboru

- 1 nie trywialna: są co najmniej dwaj głosujący i przynajmniej trzy alternatywy

# Wymagania dla funkcji społecznego wyboru

- 1 nie trywialna: są co najmniej dwaj głosujący i przynajmniej trzy alternatywy
- 2 zupełna i przechodnia:  
if  $x \neq y \Rightarrow xR_i y \vee yR_i x$   
if  $xR_i y \wedge yR_i z \Rightarrow xR_i z$

## Wymagania dla funkcji społecznego wyboru

- 1 nie trywialna: są co najmniej dwaj głosujący i przynajmniej trzy alternatywy
- 2 zupełna i przechodnia:  
if  $x \neq y \Rightarrow xR_i y \vee yR_i x$   
if  $xR_i y \wedge yR_i z \Rightarrow xR_i z$
- 3  $f$  jest zdefiniowana dla wszystkich  $R_i$ : cała grupa głosujących ma dobrze zdefiniowane preferencje (niezależnie od indywidualnych preferencji głosujących),

## Wymagania dla funkcji społecznego wyboru

- 4 niezależność od nieistotnych alternatyw: wybór grupy nie zmienia się nawet jeśli dodana zostanie alternatywa, która:
- jest postrzegana jako gorsza w stosunku do wszystkich innych alternatyw przez wszystkich głosujących
  - jest kopią już istniejącej alternatywy

## Wymagania dla funkcji społecznego wyboru

- 4 niezależność od nieistotnych alternatyw: wybór grupy nie zmienia się nawet jeśli dodana zostanie alternatywa, która:
  - jest postrzegana jako gorsza w stosunku do wszystkich innych alternatyw przez wszystkich głosujących
  - jest kopią już istniejącej alternatywy
- 5 zasada pareto: jeśli wszyscy głosujący w grupie preferują  $x$  nad  $y$  to grupa powinna wybrać alternatywę  $x$

## Wymagania dla funkcji społecznego wyboru

- 4 niezależność od nieistotnych alternatyw: wybór grupy nie zmienia się nawet jeśli dodana zostanie alternatywa, która:
  - jest postrzegana jako gorsza w stosunku do wszystkich innych alternatyw przez wszystkich głosujących
  - jest kopią już istniejącej alternatywy
- 5 zasada pareto: jeśli wszyscy głosujący w grupie preferują  $x$  nad  $y$  to grupa powinna wybrać alternatywę  $x$
- 6 brak dyktatora: nie ma takiego głosującego, że  $xR_iy \Rightarrow xRy$

## Twierdzenie Arrow'a

Nie istnieje kompletna i przechodnia funkcja społecznego wyboru  $f$ , która spełnia wszystkie wymagania 1-6

Nagroda Nobla 1972

## Twierdzenie Arrow'a

Zgodnie z regułą Borda

|                      | DM <sub>1</sub> | DM <sub>2</sub> | DM <sub>3</sub> | DM <sub>4</sub> | DM <sub>5</sub> | total     |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------|
| x <sub>1</sub>       | 3               | 3               | 1               | 2               | 1               | 10        |
| <b>x<sub>2</sub></b> | 2               | 2               | 3               | 1               | 3               | <b>11</b> |
| x <sub>3</sub>       | 1               | 1               | 2               | 0               | 0               | 4         |
| x <sub>4</sub>       | 0               | 0               | 0               | 3               | 2               | 5         |

wygrywa x<sub>2</sub>!

Rezygnujemy z nieistotnych wariantów

|                      | DM <sub>1</sub> | DM <sub>2</sub> | DM <sub>3</sub> | DM <sub>4</sub> | DM <sub>5</sub> | total    |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|
| <b>x<sub>1</sub></b> | 1               | 1               | 0               | 1               | 0               | <b>3</b> |
| x <sub>2</sub>       | 0               | 0               | 1               | 0               | 1               | 2        |

wygrywa x<sub>1</sub>!

nie jest spełnione czwarte wymaganie

Pytania?

