

Wspomaganie Decyzji Biznesowych

Modele preferencji w postaci relacji przewyższania

Jurek Błaszczyński

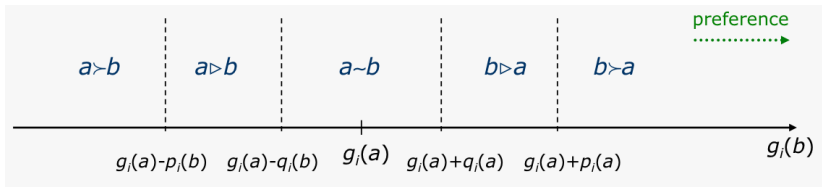


Institute of Computing Science, Poznań University of Technology,
60-965 Poznań, Poland

Grudzień 2018

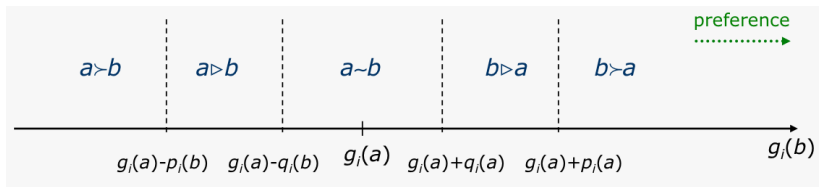
Cztery podstawowe relacje preferencji i relacja przewyższania S

- cztery podstawowe relacje: nierozróżnialności, ścisłej preferencji, słabej preferencji i nieporównywalności wystarczają, aby odzwierciedlić w sposób realistyczny model preferencji DM



Cztery podstawowe relacje preferencji i relacja przewyższania S

- cztery podstawowe relacje: nierozróżnialności, ścisłej preferencji, słabej preferencji i nieporównywalności wystarczają, aby odzwierciedlić w sposób realistyczny model preferencji DM



- kryterium z określonymi progami $p_i(a) \geq q_i(a) \geq 0$ jest nazywane *pseudo-kryterium*

Cztery podstawowe relacje preferencji i relacja przewyższania S

aksjomat ograniczonej porównywalności (*Roy 1985*)

do stworzenia zadowalającego modelu preferencji DM, bez względu na to jakie akcje, kryteria są używane do porównani i dostępne informacje, wystarczy przypisanie każdej parze akcji jednej, dwóch lub trzech z podstawowych czterech relacji

Cztery podstawowe relacje preferencji i relacja przewyższania S

relacja przewyższania S grupuje trzy podstawowe relacje preferencji:

- $S = \{\sim, \triangleright, \succ\}$ - jest relacją zwrotną (aSa) i nie jest relacją przechodnią (nieprawda, że $aSb \wedge bSc \Rightarrow aSc$)
- aSb oznacza akcja a jest co najmniej tak dobra (nie gorsza) jak akcja b

Cztery podstawowe relacje preferencji i relacja przewyższania S

dla każdej pary $a, b \in A$ określamy:

$$aSb \wedge \neg bSa \Leftrightarrow a \triangleright b \vee a \succ b \quad (1)$$

$$aSb \wedge bSa \Leftrightarrow a \sim b \quad (2)$$

$$\neg aSb \wedge \neg bSa \Leftrightarrow a ? b \quad (3)$$

① Metoda ELECTRE Is

② Metoda ELECTRE TRI

③ Metoda ELECTRE III

ELECTRE Is - informacje wstępne

ELECTRE Is rozwiązuje problematykę P_α

dane wejściowe:

- skończony zbiór akcji $A = \{a, b, c, d, \dots, h\}$
- spójna rodzina kryteriów $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

ELECTRE Is - informacje wstępne

ELECTRE Is rozwiązuje problematykę P_α

dane wejściowe:

- skończony zbiór akcji $A = \{a, b, c, d, \dots, h\}$
- spójna rodzina kryteriów $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

informacja preferencyjna ($i = 1, \dots, n$):

- wewnątrz-kryterialna
 - progi nierozróżnialności $q_i(a) = \beta_i^q$
 - progi preferencji $p_i(a) = \beta_i^p$
- między-kryterialna
 - wagi kryteriów k_i
 - progi weta $v_i(a) = \beta_i^v$

ELECTRE Is - informacje wstępne

ELECTRE Is rozwiązuje problematykę P_α

dane wejściowe:

- skończony zbiór akcji $A = \{a, b, c, d, \dots, h\}$
- spójna rodzina kryteriów $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

informacja preferencyjna ($i = 1, \dots, n$):

- wewnątrz-kryterialna
 - progi nierozróżnialności $q_i(a) = \alpha_i^q \times g_i(a) + \beta_i^q$
 - progi preferencji $p_i(a) = \alpha_i^p \times g_i(a) + \beta_i^p$
- między-kryterialna
 - wagi kryteriów k_i
 - progi weta $v_i(a) = \alpha_i^v \times g_i(a) + \beta_i^v$

ELECTRE Is - informacje wstępne

informacja preferencyjna ($i = 1, \dots, n$):

- wewnątrz-kryterialna
 - progi nierozróżnialności $q_i(a) = \alpha_i^q \times g_i(a) + \beta_i^q$
 - progi preferencji $p_i(a) = \alpha_i^p \times g_i(a) + \beta_i^p$
- między-kryterialna
 - wagi kryteriów k_i
 - progi weta $v_i(a) = \alpha_i^v \times g_i(a) + \beta_i^v$
- $0 \leq q_i(a) \leq p_i(a) \leq v_i(a)$ są funkcjami *gorszej* z dwóch akcji, które są porównywane

ELECTRE Is - informacje wstępne

- jak wyznaczyć wartości wag k_i ?

ELECTRE Is - informacje wstępne

- jak wyznaczyć wartości wag k_i ?
- *metoda kart*

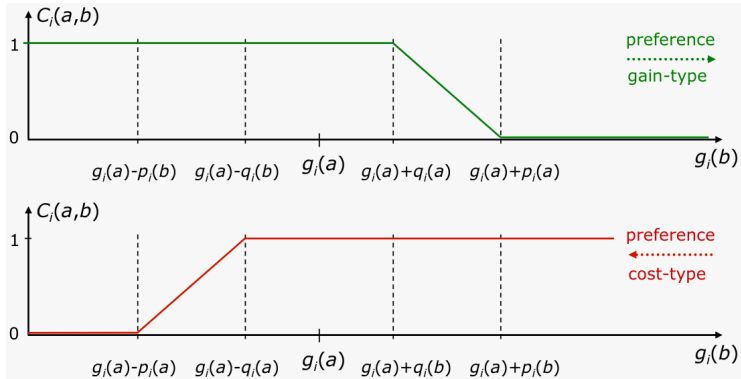
Level of preference	Score	Preference of the participant x
1	5	C1 C5
2	4.4	
3	3.9	C7
4	3.3	C3 C4 C2
5	2.7	
6	2.1	
7	1.6	
8	1	C6

ELECTRE Is - informacje wstępne

- *model preferencji* - czyli relacja przewyższania S na zbiorze A jest konstruowany w testach *zgodności* i *niezgodności*

ELECTRE Is - test zgodności

- test *zgodności* ustala siłę koalicji kryteriów zgodnych z hipotezą aSb (dla każdej z par $a, b \in A$)
- odbywa się to poprzez obliczanie wartości *współczynnika zgodności* $C_i(a, b)$, dla każdego z kryteriów g_i :



ELECTRE Is - test zgodności

- wartości współczynników zgodności obliczone dla poszczególnych kryteriów są następnie agregowane do jednego współczynnika dla każdej z par $a, b \in A$:

$$C(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i C_i(a, b)}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (4)$$

ELECTRE Is - test zgodności

- wartości współczynników zgodności obliczone dla poszczególnych kryteriów są następnie agregowane do jednego współczynnika dla każdej z par $a, b \in A$:

$$C(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i C_i(a, b)}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (4)$$

- $C(a, b) \in [0, 1]$

ELECTRE Is - test zgodności

- wartości współczynników zgodności obliczone dla poszczególnych kryteriów są następnie agregowane do jednego współczynnika dla każdej z par $a, b \in A$:

$$C(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i C_i(a, b)}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (4)$$

- $C(a, b) \in [0, 1]$
- test zgodności ma wynik pozytywny jeśli $C(a, b) \geq \lambda$, gdzie λ jest *poziomem odcięcia*, takim, że:

$$0.5 \leq \lambda \leq \min_{i=1, \dots, n} \frac{k_i}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (5)$$

ELECTRE Is - test niezgodności

- test *niezgodności* ustala, czy któreś spośród kryteriów niezgodnych z hipotezą aSb niesie tak silną informację negatywną wobec aSb , że należy tą hipotezę zawetować

ELECTRE Is - test niezgodności

- test *niezgodności* ustala, czy któreś spośród kryteriów niezgodnych z hipotezą aSb niesie tak silną informację negatywną wobec aSb , że należy tą hipotezę zawetować
- dla $a, b \in A$ takich, że $C(a, b) \geq \lambda$, kryterium g_i wetuje aSb jeśli:
 - dla kryteriów typu zysk $g_i(b) - g_i(a) \geq v_i(a)$
 - dla kryteriów typu koszt $g_i(a) - g_i(b) \geq v_i(a)$

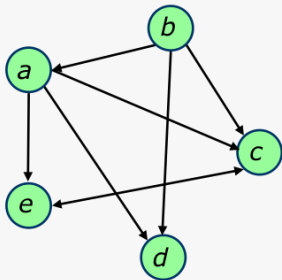
ELECTRE Is - test niezgodności

- test *niezgodności* ustala, czy któreś spośród kryteriów niezgodnych z hipotezą aSb niesie tak silną informację negatywną wobec aSb , że należy tą hipotezę zawetować
- dla $a, b \in A$ takich, że $C(a, b) \geq \lambda$, kryterium g_i wetuje aSb jeśli:
 - dla kryteriów typu zysk $g_i(b) - g_i(a) \geq v_i(a)$
 - dla kryteriów typu koszt $g_i(a) - g_i(b) \geq v_i(a)$
- aSb jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy $C(a, b) \geq \lambda$ i nie ma kryteriów, które wetują aSb

ELECTRE Is - relacja przewyższania

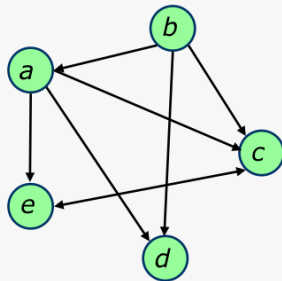
- w wyniku przeprowadzonych testów, dla każdej pary $a, b \in A$, otrzymujemy informację o tym, że S jest prawdziwa (1) lub nieprawdziwa (0)
- struktura preferencji na zbiorze A może zostać wyrażona jako graf, którego wierzchołkami są akcje, a łuki reprezentują S

S	a	b	c	d	e
a	1	0	1	1	1
b	1	1	1	1	0
c	0	0	1	0	1
d	0	0	0	1	0
e	0	0	1	0	1



ELECTRE Is - relacja przewyższania

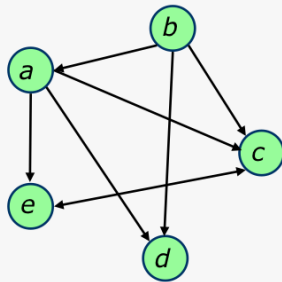
S	a	b	c	d	e
a	1	0	1	1	1
b	1	1	1	1	0
c	0	0	1	0	1
d	0	0	0	1	0
e	0	0	1	0	1



- wracając do problematyki P_α - jak wybrać najlepsze akcje?

ELECTRE Is - relacja przewyższania

S	a	b	c	d	e
a	1	0	1	1	1
b	1	1	1	1	0
c	0	0	1	0	1
d	0	0	0	1	0
e	0	0	1	0	1



- wracając do problematyki P_α - jak wybrać najlepsze akcje?
- jądro K grafu przewyższania jest definiowane jako zbiór wierzchołków takich, że:
 - akcje (wierzchołki) należące do K *nie przewyższają siebie nawzajem*
 - każda akcja, które nie należy do K jest bezpośrednio przewyższana przez co najmniej jedną akcję należącą do K

ELECTRE Is - wyznaczanie jądra K grafu przewyższania

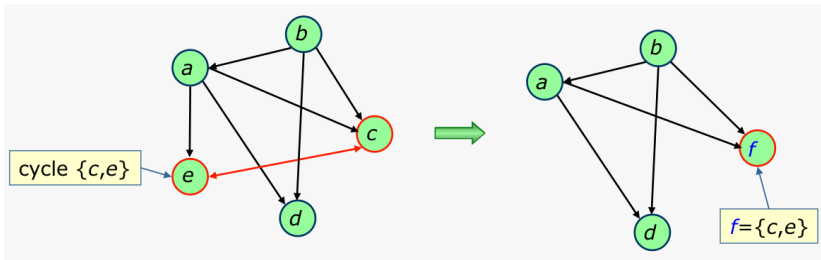
- tylko grafy acykliczne zawierają pojedyncze jądro

ELECTRE Is - wyznaczanie jądra K grafu przewyższania

- cykle w grafie przewyższania powinny zostać usunięte na jeden z dwóch sposobów:

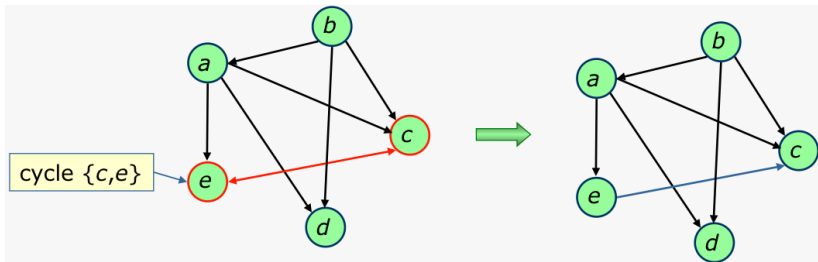
ELECTRE Is - wyznaczanie jądra K grafu przewyższania

- cykle w grafie przewyższania powinny zostać usunięte na jeden z dwóch sposobów
 - zastąpienie wierzchołków, pomiędzy którymi występuje cykl, jednym sztucznym wierzchołkiem reprezentującym klasę równoważnych wierzchołków (klikę)



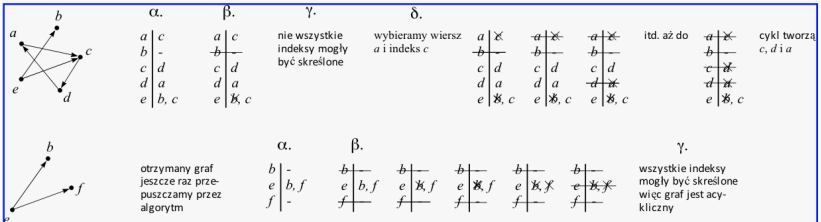
ELECTRE Is - wyznaczanie jądra K grafu przewyższania

- cykle w grafie przewyższania powinny zostać usunięte na jeden z dwóch sposobów
 - przecięcie cyklu poprzez usunięcie naj słabszego łuku



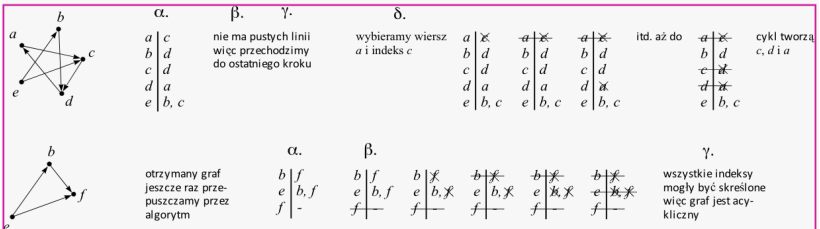
Algorytm wykrywania cykli w grafie

- α. Utworzyć tablicę z jednym wejściem. W każdym wierszu wpisać indeksy bezpośrednich **następników** danego wierzchołka x_i (tzw. **listę ZA**).
- β. Poszukać linii pustą i skreślić numer tej linii wszędzie tam gdzie występuje w tablicy. Linie z samymi skreślonymi indeksami traktować jak puste. Skreślanie kontynuować aż do wyczerpania możliwości.
- γ. Jeśli wszystkie indeksy mogły być skreślone, to graf nie ma cykli. W przeciwnym razie ma co najmniej jeden cykl.
- δ. Wybrać indeks dowolnej linii niepustej a w niej dowolny nie skreślony indeks i skreślić go. Skreślanie kontynuować do momentu, gdy sekwencja skreślonych indeksów utworzy **cykl**.



Algorytm wykrywania cykli w grafie

- Utworzyć tablicę z jednym wejściem. W każdym wierszu wpisać indeksy bezpośrednich **następników** danego wierzchołka x_i (tzw. **listę ZA**).
- Poszukać linii pustą i skreślić numer tej linii wszędzie tam gdzie występuje w tablicy. Linie z samymi skreślonymi indeksami traktować jak puste. Skreślanie kontynuować aż do wyczerpania możliwości.
- Jeśli wszystkie indeksy mogły być skreślone, to graf nie ma cykli. W przeciwnym razie ma co najmniej jeden cykl.
- Wybrać indeks dowolnej linii niepustej a w niej dowolny nie skreślony indeks i skreślić go. Skreślanie kontynuować do momentu, gdy sekwencja skreślonych indeksów utworzy **cykl**.



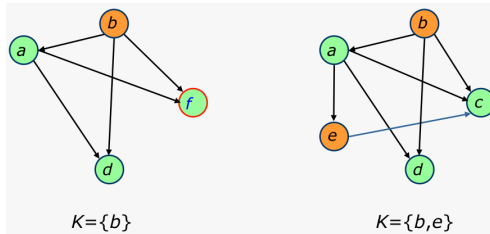
Algorytm wyznaczania jądra w grafie acyklicznym

- α. Utworzyć tablicę z jednym wejściem. W każdym wierszu wpisać indeksy bezpośrednich **poprzedników** danego wierzchołka x_i (tzw. **listę PRZED**).
- β. Zaznaczyć linię pustą (znacznikiem ×). Skreślić całe linie, w których występuje wierzchołek z indeksem zaznaczonej linii pustej.
Skreślić indeks skreślonego wiersza gdziekolwiek pojawia się w tablicy.
Każda linia z samymi skreślonymi indeksami jest uznawana za pustą.
Iterować aż do wyczerpania możliwości.
- γ. Jeśli wszystkie indeksy mogły być zaznaczone lub skreślone, to graf ma **pojedyncze jądro** złożone z wierzchołków odpowiadających zaznaczonym (×) wierszom.

	α.	β.					γ.
	$\begin{array}{c c} a & - \\ b & d \\ c & a, d, e \\ d & a \\ e & b \end{array}$	$\begin{array}{c c} \times a & - \\ b & d \\ c & a, d, e \\ d & a \\ e & b \end{array}$	$\begin{array}{c c} \times a & - \\ b & d \\ \times c & \cancel{a, d, e} \\ d & \cancel{a} \\ e & b \end{array}$	$\begin{array}{c c} \times a & - \\ b & \cancel{d} \\ \times c & \cancel{a, d, e} \\ d & \cancel{a} \\ e & b \end{array}$	$\begin{array}{c c} \times a & - \\ \times b & \cancel{d} \\ \times c & \cancel{a, d, e} \\ d & \cancel{a} \\ e & b \end{array}$	$\begin{array}{c c} \times a & - \\ \times b & \cancel{d} \\ \times c & \cancel{a, d, e} \\ d & \cancel{a} \\ \times e & \cancel{b} \end{array}$	wszystkie wiersze mogły zostać zaznaczone lub skreślone, więc graf ma pojedyncze jądro: $N = \{a, b\}$

ELECTRE Is - wynik

- najlepsze akcje to te, które należą do jądra grafu przewyższania



- spośród akcji (wierzchołków) należących do jądra grafu przewyższania możemy wyróżnić następujące typy:
 - *początkowy* (bez poprzedników)
 - *izolowany* (nieporównywalny)
 - *pośredni* (przewyższany i przewyższający)
 - *końcowy* (bez następników)

ELECTRE Is - przykład

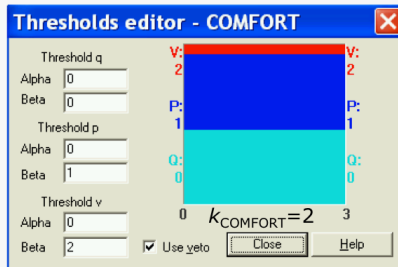
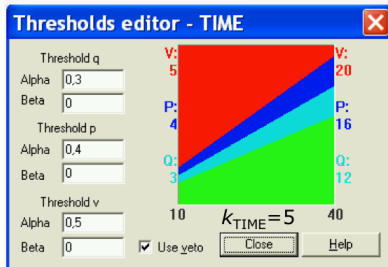
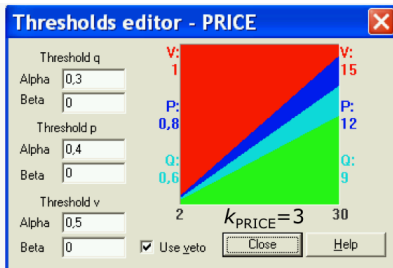
Electre 1s 2002 - Current project

File View Alternatives Attributes Electre1s Options Window

■ "Metro" Metro.xml

Alternatives Concordance Discordance Robustness Outranking

	PRICE	TIME	COMFORT	
RER	3	10		1
METRO_1	4	20		2
METRO_2	2	20		0
BUS	6	40		0
TAXI	30	30		3
SNCF	3	20		2



ELECTRE Is - przykład

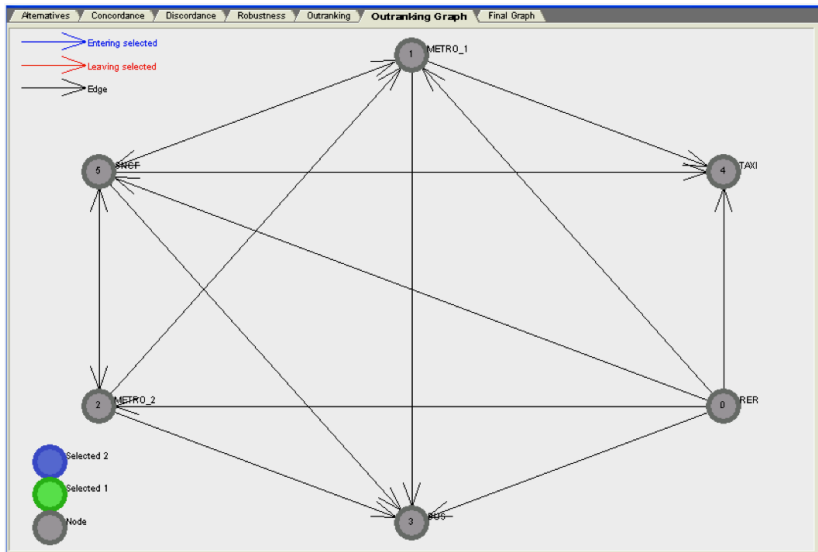
Alternatives	Concordance	Discordance	Robustness	Outranking	Outranking Graph	Final Graph
	RER	METRO_1	METRO_2	BUS	TAXI	SNCF
RER	1	0,8	0,9	1	0,8	0,8
METRO_1	0,5	1	0,7	1	0,8	1
METRO_2	0,3	0,8	1	1	0,8	0,8
BUS	0	0,2	0,2	1	0,8	0
TAXI	0,2	0,5333333333	0,5333333333	0,7	1	0,5333333333
SNCF	0,5	1	0,9	1	0,8	1

$$\lambda=0.75$$

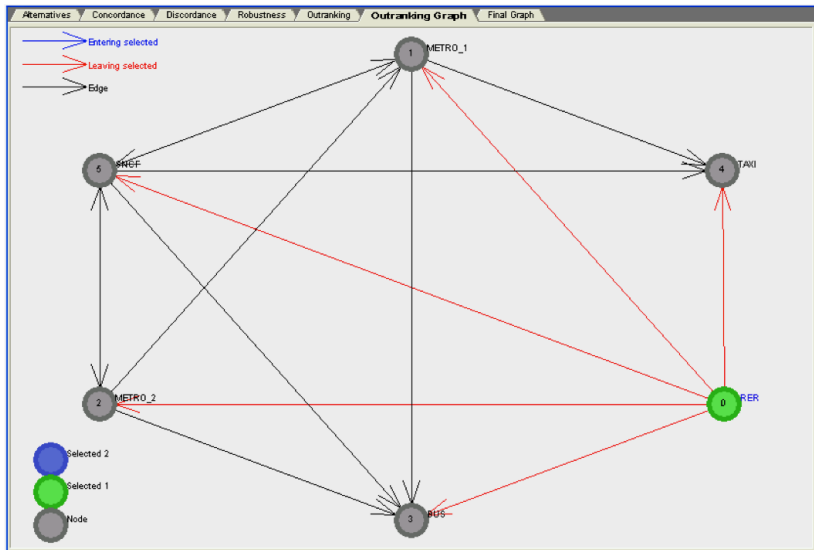
Alternatives	Concordance	Discordance	Robustness	Outranking	Outranking Graph	Final Graph
	RER	METRO_1	METRO_2	BUS	TAXI	SNCF
RER	0	0	0	0	0	0
METRO_1	-	0	-	0	0	0
METRO_2	-	0	0	0	1	0
BUS	-	-	-	0	1	-
TAXI	-	-	-	-	0	-
SNCF	-	0	0	0	0	0

Alternatives	Concordance	Discordance	Robustness	Outranking	Outranking Graph	Final Graph
	RER	METRO_1	METRO_2	BUS	TAXI	SNCF
RER	1	1	1	1	1	1
METRO_1	0	1	0	1	1	1
METRO_2	0	1	1	1	0	1
BUS	0	0	0	1	0	0
TAXI	0	0	0	0	1	0
SNCF	0	0	0	0	0	1

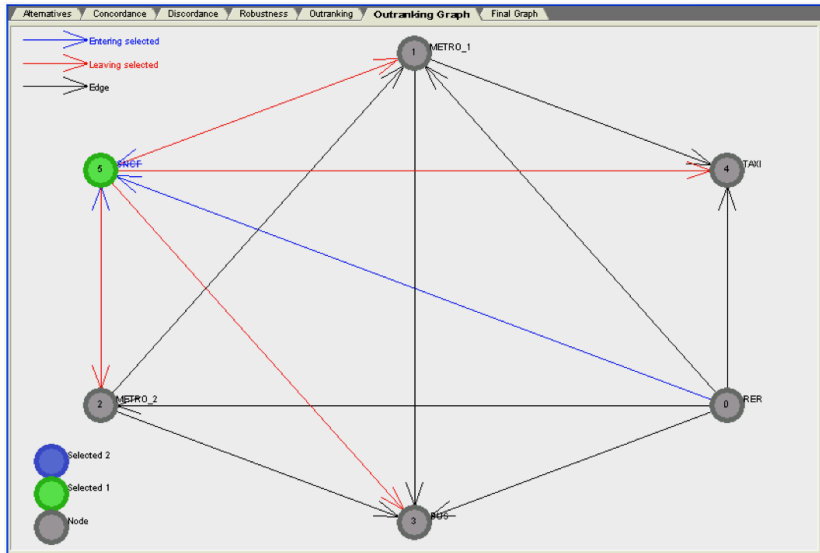
ELECTRE Is - przykład



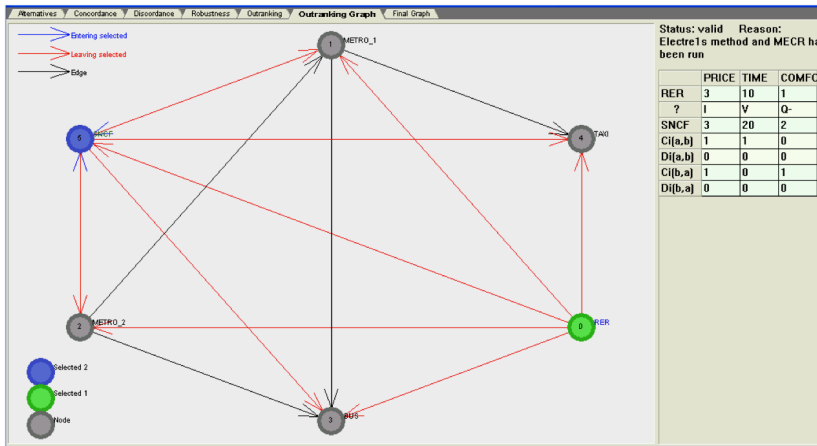
ELECTRE Is - przykład



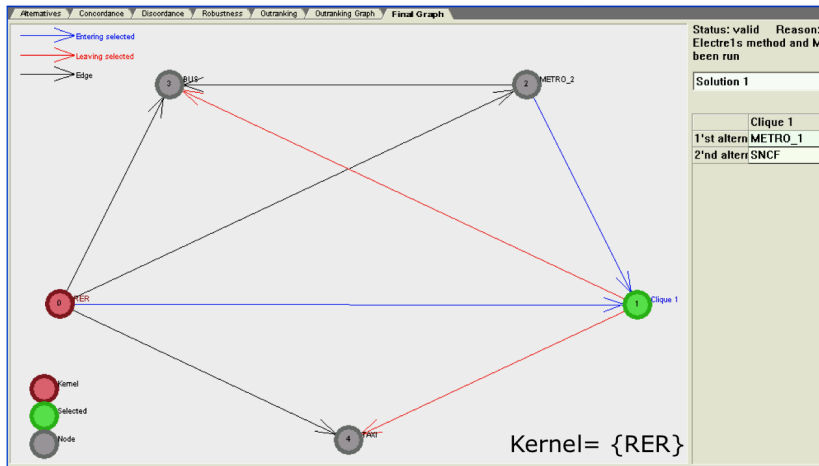
ELECTRE Is - przykład



ELECTRE Is - przykład



ELECTRE Is - przykład



- ① Metoda ELECTRE Is
- ② Metoda ELECTRE TRI
- ③ Metoda ELECTRE III

ELECTRE TRI - informacje wstępne

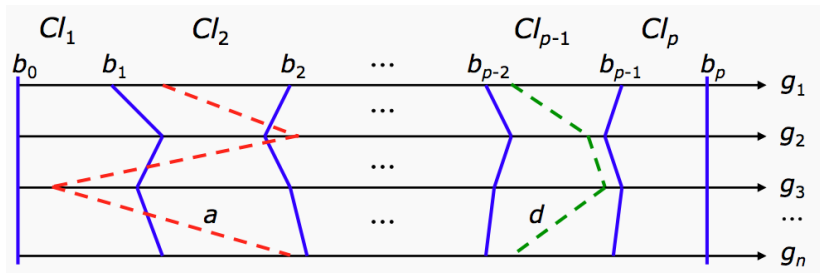
ELECTRE TRI rozwiązuje problematykę P_β

dane wejściowe:

- skończony zbiór akcji $A = \{a, b, c, d, \dots, h\}$
- spójna rodzina kryteriów $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$
- uporządkowane (zgodnie z preferencją DM) klasy decyzyjne $Cl_t, t = 0, 1, \dots, p$

ELECTRE TRI - informacje wstępne

- klasy decyzyjne charakteryzowane są poprzez *profile*
 $b_t, t = 0, 1, \dots, p$



- konstruowany jest model preferencji w postaci relacji przewyższania S pomiędzy każdą parą (a, b_t) , gdzie $a \in A$, $t = 0, 1, \dots, p$

ELECTRE TRI - informacje wstępne

informacja preferencyjna ($i = 1, \dots, n$):

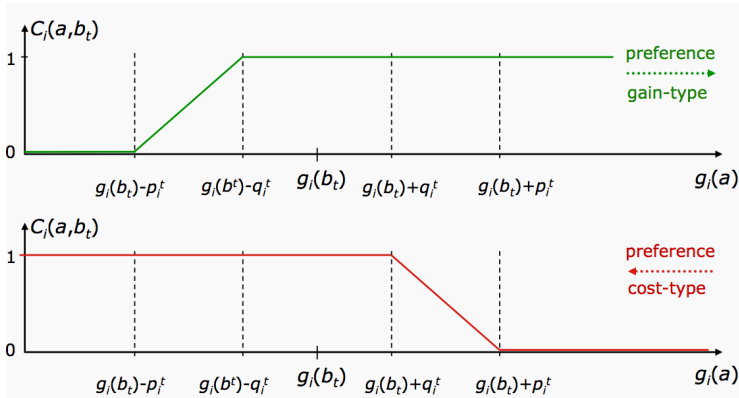
- wewnątrz-kryterialna
 - progi nierozróżnialności q_i^t
 - progi preferencji p_i^t
- między-kryterialna
 - wagi kryteriów k_i
 - progi weta v_i^t
- $0 \leq q_i^t \leq p_i^t \leq v_i^t$ są stałymi zdefiniowanymi dla każdego progu b_t , $t = 0, 1, \dots, p$

ELECTRE TRI - informacje wstępne

- podobnie jak w przypadku ELECTRE Is, przeprowadza się testy zgodności i niezgodności, które mają zweryfikować asercje aSb_t i b_tSa

ELECTRE TRI - test zgodności

- test *zgodności* ustala siłę koalicji kryteriów zgodnych z hipotezą aSb_t (dla każdej z par (a, b_t) , $a \in A$, $t = 0, 1, \dots, p$)
- odbywa się to poprzez obliczanie wartości *współczynnika zgodności* $C_i(a, b_t)$, dla każdego z kryteriów g_i :



ELECTRE TRI - test zgodności

- wartości współczynników zgodności obliczone dla poszczególnych kryteriów są następnie agregowane do jednego współczynnika dla każdej z par (a, b_t) , $a \in A$, $t = 0, 1, \dots, p$:

$$C(a, b_t) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i C_i(a, b_t)}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (6)$$

ELECTRE TRI - test zgodności

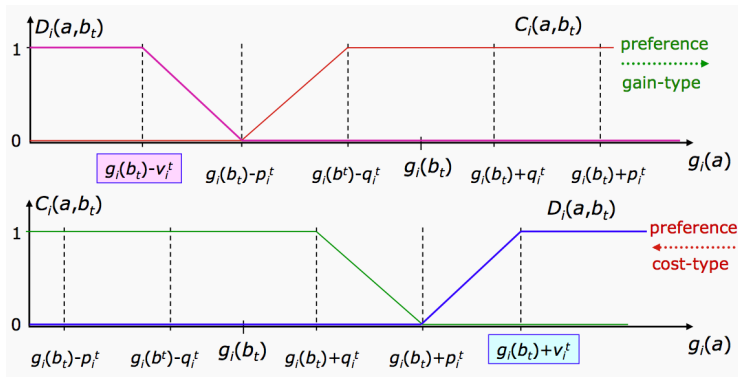
- wartości współczynników zgodności obliczone dla poszczególnych kryteriów są następnie agregowane do jednego współczynnika dla każdej z par (a, b_t) , $a \in A$, $t = 0, 1, \dots, p$:

$$C(a, b_t) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i C_i(a, b_t)}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (6)$$

- $C(a, b_t) \in [0, 1]$

ELECTRE TRI - test niezgodności

- test *niezgodności* ustala siłę koalicji kryteriów niezgodnych z hipotezą aSb_t (dla każdej z par (a, b_t) , $a \in A$, $t = 0, 1, \dots, p$)
- odbywa się to poprzez obliczanie wartości *współczynnika niezgodności* $D_i(a, b_t)$, dla każdego z kryteriów g_i :



ELECTRE TRI - wiarygodność relacji przewyższania

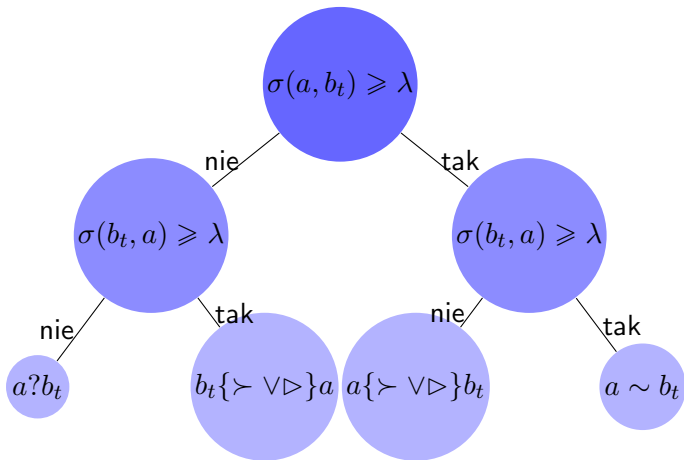
- współczynnikiem łączącym wyniki testów *zgodności* i *niezgodności* jest *współczynnik wiarygodności relacji przewyższania*:

$$\sigma(a, b_t) = C(a, b_t) \prod_{i \in F} \frac{1 - D_i(a, b_t)}{1 - C(a, b_t)} \quad (7)$$

where $F = \{i : D_i(a, b_t) > C(a, b_t)\}$

- $\sigma(a, b_t) \in [0, 1]$

ELECTRE TRI - wiarygodność relacji przewyższania



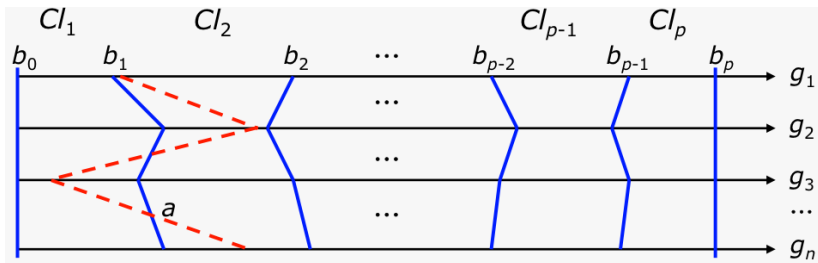
- jak przypisać akcje do klas decyzyjnych?

ELECTRE TRI - eksploracja relacji S i końcowa rekomendacja

- przypisanie akcji do klas decyzyjnych opiera się na dwóch procedurach porównywania akcji $a \in A$ z profilami $b_t, t = 0, 1, \dots, p$

ELECTRE TRI - eksploracja relacji S i końcowa rekomendacja

- procedura *pesymistyczna* polega na porównaniu akcji a po kolei z każdym profilem b_t , $t = p - 1, \dots, 1, 0$; przy pierwszym profilu b_t takim, że aSb_t przypisujemy a do klasy Cl_{t+1}



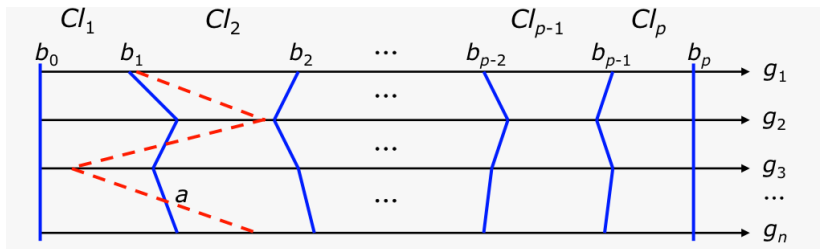
ELECTRE TRI - eksploracja relacji S i końcowa rekomendacja

- procedura *pesymistyczna* polega na porównaniu akcji a po kolei z każdym profilem b_t , $t = p - 1, \dots, 1, 0$; przy pierwszym profilu b_t takim, że aSb_t przypisujemy a do klasy Cl_{t+1}

	b_1	b_2	b_3	b_4	0	p
a	$\succ$	$\succ$	$\prec$	$\prec$		3
b	$\succ$	$\succ$	$\equiv$	$\prec$		4
c	$\succ$	$\succ$	$?$	$\prec$		3
d	$\succ$	$\equiv$	$?$	$\prec$		3
e	$\succ$	$?$	$?$	$\prec$		2

ELECTRE TRI - eksploracja relacji S i końcowa rekomendacja

- procedura *optymistyczna* polega na porównaniu akcji a po kolei z każdym profilem b_t , $t = 1, \dots, p$; przy pierwszym profilu b_t takim, że $b_t \{ \succ \vee \triangleright \} a$ przypisujemy a do klasy Cl_t



ELECTRE TRI - eksploracja relacji S i końcowa rekomendacja

- procedura *optymistyczna* polega na porównaniu akcji a po kolei z każdym profilem b_t , $t = 1, \dots, p$; przy pierwszym profilu b_t takim, że $b_t \{ \succ \vee \triangleright \} a$ przypisujemy a do klasy Cl_t

	b_1	b_2	b_3	b_4	ϕ	p
a	$\succ$	$\succ$	$\prec$	$\prec$	3	
b	$\succ$	$\succ$	$\triangleright$	$\prec$	4	
c	$\succ$	$\succ$	?	$\prec$	4	
d	$\succ$	$\triangleright$	?	$\prec$	4	
e	$\succ$	?	?	$\prec$	4	

ELECTRE TRI - przykład

Edit Project

- Project
 - Criteria
 - PRICE
 - TIME
 - COMFORT
 - Profiles
 - M-G
 - B-M
 - Alternatives
 - RER
 - METRO_1
 - METRO_2
 - BUS
 - TAXI
 - SNCF

Information Categories

Good

Category 3	Good
Category 2	Medium
Category 1	Bad

Edit Project

- Project
 - Criteria
 - PRICE
 - TIME
 - COMFORT
 - Profiles
 - M-G
 - B-M
 - Alternatives
 - RER
 - METRO_1
 - METRO_2
 - BUS
 - TAXI
 - SNCF

Definition Performances Thresholds

$\text{Min}(g_j) = 2$
 $\text{Max}(g_j) = 30$
 $\text{Min}(\Delta g_j) = 1$

Indifference Threshold: 0

Preference Threshold: 1

Veto Threshold: 5

☐ Disable Veto

PRICE	3
TIME	20
COMFORT	3

Performances of Alternatives

	PRICE	TIME	COMFORT
RER	3	10	1
METRO_1	4	20	2
METRO_2	2	20	0
BUS	6	40	0
TAXI	30	30	3
SNCF	3	20	2

$$k_{\text{PRICE}} = 3$$

$$k_{\text{TIME}} = 5$$

$$k_{\text{COMFORT}} = 2$$

$$\lambda = 0.75$$

Edit Project

- Project
 - Criteria
 - PRICE
 - TIME
 - COMFORT
 - Profiles
 - M-G
 - B-M
 - Alternatives
 - RER
 - METRO_1
 - METRO_2
 - BUS
 - TAXI
 - SNCF

Definition Performances Thresholds

$\text{Min}(g_j) = 2$
 $\text{Max}(g_j) = 30$
 $\text{Min}(\Delta g_j) = 1$

Indifference Threshold: 0

Preference Threshold: 1

Veto Threshold: 5

☐ Disable Veto

PRICE	10
TIME	30
COMFORT	1

ELECTRE TRI - przykład

Comparison to Profile		
	B-M	M-G
RER	>	>
METRO_1	>	<
METRO_2	>	R
BUS	R	<
TAXI	<	<
SNCF	>	I

Assignment by Category		
Category Name	Pessimistic Assignment	Optimistic Assignment
Good	RER	RER
Medium	SNCF	METRO_2
Bad		SNCF
Good	METRO_1	METRO_1
Medium	METRO_2	BUS
Bad		
Good	BUS	TAXI
Medium	TAXI	
Bad		

Statistics of Assignment		
Category Name	Pessimistic Assignment	Optimistic Assignment
Good	33 % (2 of 6)	50 % (3 of 6)
Medium	33 % (2 of 6)	33 % (2 of 6)
Bad	33 % (2 of 6)	17 % (1 of 6)

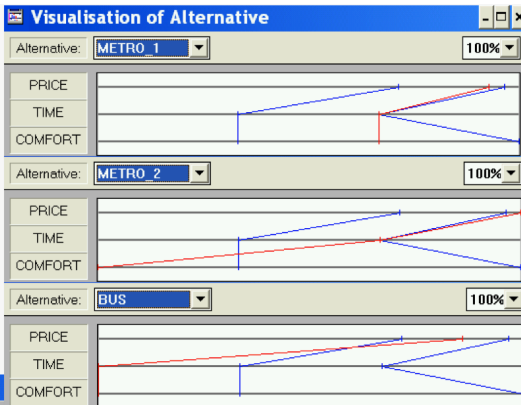
ELECTRE TRI - przykład

Degrees of Credibility		
	B-M	M-G
RER	1.000 0.000	0.800 0.500
METRO_1	1.000 0.000	0.700 1.000
METRO_2	1.000 0.000	0.000 0.700
BUS	0.500 0.583	0.000 1.000
TAXI	0.000 0.800	0.000 1.000
SNCF	1.000 0.000	1.000 1.000

$$\lambda = 0.75$$

Assignment by Alternative

Alternative Name	Pessimistic Assignment	Optimistic Assignment
RER	Good	Good
METRO_1	Medium	Medium
METRO_2	Medium	Good
BUS	Bad	Medium
TAXI	Bad	Bad
SNCF	Good	Good



- 1 Metoda ELECTRE Is
- 2 Metoda ELECTRE TRI
- 3 Metoda ELECTRE III

ELECTRE III - informacje wstępne

ELECTRE III rozwiązuje problematykę P_γ

dane wejściowe:

- skończony zbiór akcji $A = \{a, b, c, d, \dots, h\}$
- spójna rodzina kryteriów $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

ELECTRE III - informacje wstępne

informacja preferencyjna ($i = 1, \dots, n$):

- wewnątrz-kryterialna
 - progi nierozróżnialności $q_i(a) = \beta_i^q$
 - progi preferencji $p_i(a) = \beta_i^p$
- między-kryterialna
 - wagi kryteriów k_i
 - progi weta $v_i(a) = \beta_i^v$

ELECTRE III - informacje wstępne

informacja preferencyjna ($i = 1, \dots, n$):

- wewnątrz-kryterialna
 - progi nierozróżnialności $q_i(a) = \alpha_i^q \times g_i(a) + \beta_i^q$
 - progi preferencji $p_i(a) = \alpha_i^p \times g_i(a) + \beta_i^p$
- między-kryterialna
 - wagi kryteriów k_i
 - progi weta $v_i(a) = \alpha_i^v \times g_i(a) + \beta_i^v$

ELECTRE III - informacje wstępne

informacja preferencyjna ($i = 1, \dots, n$):

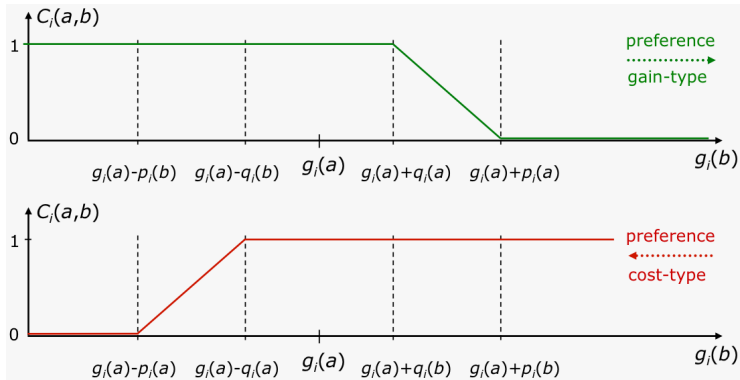
- wewnątrz-kryterialna
 - progi nierozróżnialności $q_i(a) = \alpha_i^q \times g_i(a) + \beta_i^q$
 - progi preferencji $p_i(a) = \alpha_i^p \times g_i(a) + \beta_i^p$
- między-kryterialna
 - wagi kryteriów k_i
 - progi weta $v_i(a) = \alpha_i^v \times g_i(a) + \beta_i^v$
- $0 \leq q_i(a) \leq p_i(a) \leq v_i(a)$ są funkcjami *gorszej* z dwóch akcji, które są porównywane

ELECTRE III - informacje wstępne

- podobnie jak w przypadku ELECTRE Is oraz ELECTRE TRI, przeprowadza się testy zgodności i niezgodności, które mają zweryfikować asercje aSb i bSa

ELECTRE III - test zgodności

- test *zgodności* ustala siłę koalicji kryteriów zgodnych z hipotezą aSb (dla każdej z par (a,b) , $a \in A$),
- odbywa się to poprzez obliczanie wartości *współczynnika zgodności* $C_i(a,b)$ dla każdego z kryteriów g_i :



ELECTRE III - test zgodności

- wartości współczynników zgodności obliczone dla poszczególnych kryteriów są następnie agregowane do jednego współczynnika dla każdej z par (a,b) , $a \in A$:

$$C(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i C_i(a, b)}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (7)$$

ELECTRE III - test zgodności

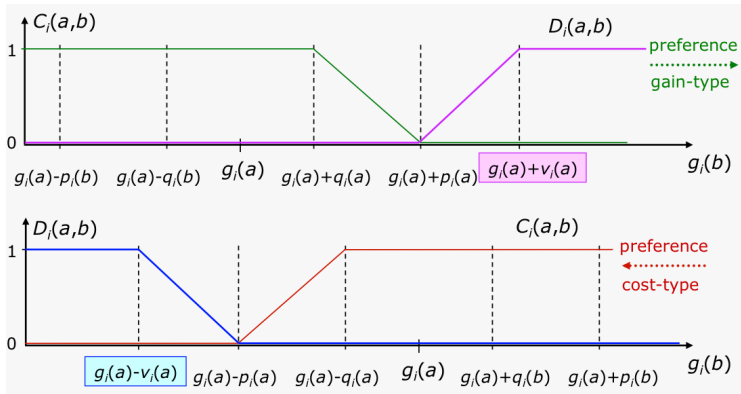
- wartości współczynników zgodności obliczone dla poszczególnych kryteriów są następnie agregowane do jednego współczynnika dla każdej z par (a,b) , $a \in A$:

$$C(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n k_i C_i(a, b)}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (7)$$

- $C(a, b) \in [0, 1]$

ELECTRE III - test niezgodności

- test *niezgodności* ustala siłę koalicji kryteriów niezgodnych z hipotezą aSb (dla każdej z par (a,b) , $a \in A$),
- odbywa się to poprzez obliczanie wartości *współczynnika niezgodności* $D_i(a,b)$ dla każdego z kryteriów g_i :



ELECTRE III - wiarygodność relacji przewyższania

- współczynnikiem łączącym wyniki testów *zgodności* i *niezgodności* jest *współczynnik wiarygodności relacji przewyższania*:

$$\sigma(a, b) = C(a, b) \prod_{i \in F} \frac{1 - D_i(a, b)}{1 - C(a, b)} \quad (8)$$

gdzie $F = \{i : D_i(a, b) > C(a, b)\}$

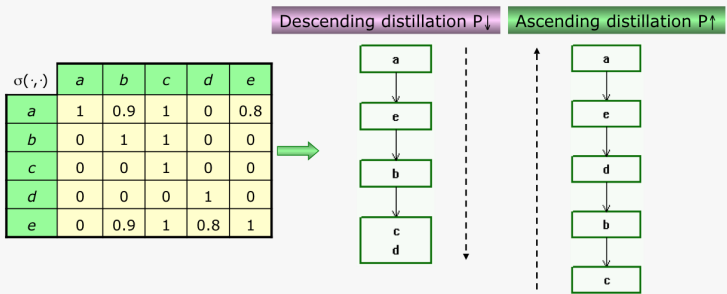
- $\sigma(a, b) \in [0, 1]$

ELECTRE III - eksploatacji relacji S i tworzenie porządków końcowych

- do eksploatacja relacji przewyższania prowadzi proces destylacji macierzy $\sigma(\cdot, \cdot)$

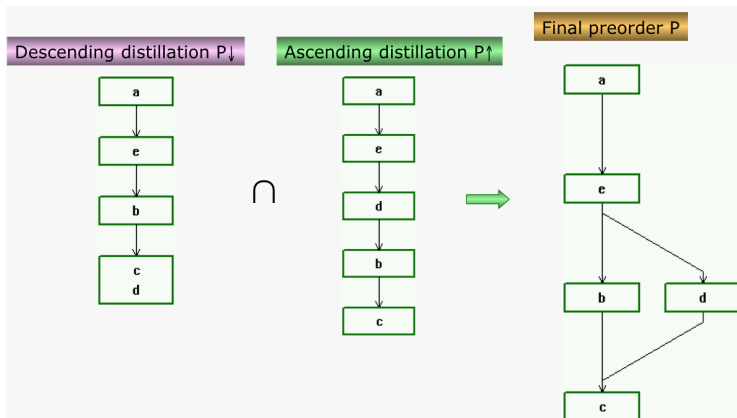
ELECTRE III - eksploatacji relacji S i tworzenie porządków końcowych

- w wyniku procesu destylacji powstają dwa preporządki zupełne:
 - porządek zstępujący $P \downarrow$ - tworzony od najlepszej akcji do najgorszej,
 - porządek wstępujący $P \uparrow$ - tworzony od najgorszej akcji do najlepszej,



ELECTRE III - końcowy preporządek częściowy

Końcowy porządek częściowy P powstaje jako przecięcie preporządków zupełnych $P \downarrow$ i $P \uparrow$



ELECTRE III - przykład

ELECTRE III / IV - [d:\aplika-1\electr-

File Edit Calculate Results Options Window

Edit Performances Table

	PRICE	TIME	COMFORT
RER	3	10	1
MET_1	4	20	2
MET_2	2	20	0
BUS	6	40	0
TAXI	30	30	3
SNCF	3	20	2

Edit Thresholds Table

Direction of Preferences: Decreasing
Mode of Definition: Direct

Number of Criteria: 3

List of Criteria:

1	[PRIC]
2	[TIME]
3	[COMF]

Coefficients of Indifference Threshold:
 $\alpha = 0.3$ $\beta = 0$

Coefficients of Preference Threshold:
 $\alpha = 0.4$ $\beta = 0$

Coefficients of Veto Threshold:
 $\alpha = 0.5$ $\beta = 0$

$k_{PRICE} = 3$

Close Modify Help

Edit Thresholds Table

Direction of Preferences: Decreasing
Mode of Definition: Direct

Number of Criteria: 3

List of Criteria:

1	[PRIC]
2	[TIME]
3	[COMF]

Coefficients of Indifference Threshold:
 $\alpha = 0.3$ $\beta = 0$

Coefficients of Preference Threshold:
 $\alpha = 0.4$ $\beta = 0$

Coefficients of Veto Threshold:
 $\alpha = 0.5$ $\beta = 0$

$k_{TIME} = 5$

Close Modify Help

Edit Thresholds Table

Direction of Preferences: Increasing
Mode of Definition: Direct

Number of Criteria: 3

List of Criteria:

1	[PRIC]
2	[TIME]
3	[COMF]

Coefficients of Indifference Threshold:
 $\alpha = 0$ $\beta = 0$

Coefficients of Preference Threshold:
 $\alpha = 0$ $\beta = 1$

Coefficients of Veto Threshold:
 $\alpha = 0$ $\beta = 2$

$k_{COMFORT} = 2$

Close Modify Help

ELECTRE III - przykład

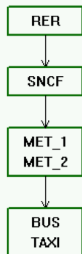
 Concordance Matrix						
	RER	MET_1	MET_2	BUS	TAXI	SNCF
RER	1	0.8	0.9	1	0.8	0.8
MET_1	0.5	1	0.7	1	0.8	1
MET_2	0.3	0.8	1	1	0.8	0.8
BUS	0	0.2	0.2	1	0.8	0
TAXI	0.2	0.53	0.53	0.7	1	0.53
SNCF	0.5	1	0.9	1	0.8	1

 Credibility Matrix						
	RER	MET_1	MET_2	BUS	TAXI	SNCF
RER	1	0.8	0.9	1	0	0.8
MET_1	0	1	0	1	0.8	1
MET_2	0	0	1	1	0	0
BUS	0	0	0	1	0	0
TAXI	0	0	0	0	1	0
SNCF	0	1	0.9	1	0.8	1

ELECTRE III - przykład

Distillations

Descending Distillation



Ascending Distillation



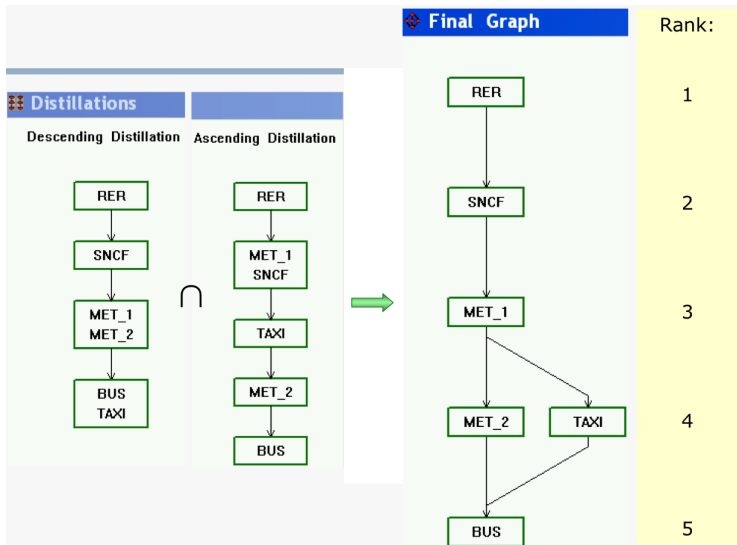
Ranks in Final Preorder

Rank	Alternative
1	RER
2	SNCF
3	MET_1
4	MET_2 TAXI
5	BUS

Ranking Matrix

	RER	MET_1	MET_2	BUS	TAXI	SNCF
RER	≡	➤	➤	➤	➤	➤
MET_1	➤	≡	➤	➤	➤	➤
MET_2	➤	➤	≡	➤	➤	➤
BUS	➤	➤	➤	≡	➤	➤
TAXI	➤	➤	➤	➤	≡	➤
SNCF	➤	➤	➤	➤	➤	≡

ELECTRE III - przykład



ELECTRE III - końcowy preporządek częściowy

- preporządek końcowy otrzymuje się z przecięcia $P \downarrow$ i $P \uparrow$,
- wariant a jest *sklasyfikowany wyżej* od b jeśli jest lepszy od b w $P \downarrow$ (lub w $P \uparrow$) i nie gorszy od b w $P \uparrow$ (lub w $P \downarrow$),

ELECTRE III - końcowy preporządek częściowy

- preporządek końcowy otrzymuje się z przecięcia $P \downarrow$ i $P \uparrow$,
- wariant a jest *sklasyfikowany wyżej* od b jeśli jest lepszy od b w $P \downarrow$ (lub w $P \uparrow$) i nie gorszy od b w $P \uparrow$ (lub w $P \downarrow$),
- wariant a jest *nierozróżnialny* z b jeśli jest nierozróżnialny z b zarówno w $P \downarrow$ jak i w $P \uparrow$

ELECTRE III - końcowy preporządek częściowy

- preporządek końcowy otrzymuje się z przecięcia $P \downarrow$ i $P \uparrow$,
- wariant a jest *sklasyfikowany wyżej* od b jeśli jest lepszy od b w $P \downarrow$ (lub w $P \uparrow$) i nie gorszy od b w $P \uparrow$ (lub w $P \downarrow$),
- wariant a jest *nierozróżnialny* z b jeśli jest nierozróżnialny z b zarówno w $P \downarrow$ jak i w $P \uparrow$
- wariant a jest *nieporównywalny* z b jeśli jest lepszy od b w $P \downarrow$ (lub w $P \uparrow$) i gorszy od b w $P \uparrow$ (lub w $P \downarrow$),

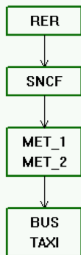
ELECTRE III - końcowy preporządek częściowy

- preporządek końcowy otrzymuje się z przecięcia $P \downarrow$ i $P \uparrow$,
- wariant a jest *sklasyfikowany wyżej* od b jeśli jest lepszy od b w $P \downarrow$ (lub w $P \uparrow$) i nie gorszy od b w $P \uparrow$ (lub w $P \downarrow$),
- wariant a jest *nierozróżnialny* z b jeśli jest nierozróżnialny z b zarówno w $P \downarrow$ jak i w $P \uparrow$
- wariant a jest *nieporównywalny* z b jeśli jest lepszy od b w $P \downarrow$ (lub w $P \uparrow$) i gorszy od b w $P \uparrow$ (lub w $P \downarrow$),
- *rzęd wariantu (rank)* w preporządku częściowym równy jest długości ścieżki w grafie końcowym od wierzchołka najlepszego do wierzchołka zawierającego dany wariant

ELECTRE III - przykład

Distillations

Descending Distillation



Ascending Distillation



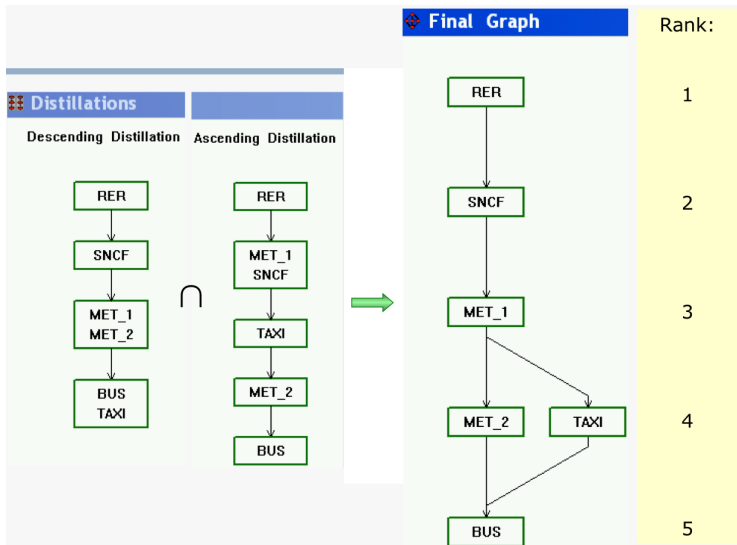
Ranks in Final Preorder

Rank	Alternative
1	RER
2	SNCF
3	MET_1
4	MET_2 TAXI
5	BUS

Ranking Matrix

	RER	MET_1	MET_2	BUS	TAXI	SNCF
RER	≡	➤	➤	➤	➤	➤
MET_1	➤	≡	➤	➤	➤	➤
MET_2	➤	➤	≡	➤	➤	➤
BUS	➤	➤	➤	≡	➤	➤
TAXI	➤	➤	➤	➤	≡	➤
SNCF	➤	➤	➤	➤	➤	≡

ELECTRE III - przykład



ELECTRE III - końcowy preporządek medianowy (zupełny)

- preporządek medianowy (*median preorder*) konstruowany jest na podstawie końcowego preporządku częściowego i preporządków zupełnych $P \downarrow$ i $P \uparrow$,
- warianty są ułożone według rzędu w preporządku częściowym, a warianty nieporównywalne tego samego rzędu są ułożone według wielkości różnic pozycji w $P \downarrow$ i $P \uparrow$

Procedura destylacji wartościowanej relacji przewyższania S

A – zbiór wariantów $\{a, b, \dots\}$

$\sigma(a, b) \in [0, 1]$ – stopień wiarygodności relacji przewyższania aSb ,

A. Destylacja tworząca preporządek zstępujący $\bar{P}$

1. Podstaw $k := 0$,

2. Oblicz $\lambda_k = \underset{a, b \in A, a \neq b}{Max} \{\sigma(a, b)\}$,

3. Oblicz $\lambda_{k+1} = \underset{\{\sigma(a, b) < \lambda_k - s(\lambda_k)\}; a, b \in A}{Max} \{\sigma(a, b), 0\}$,

gdzie $s(\lambda_k) = \alpha\lambda_k + \beta$ (domyślnie: $\alpha = -0.15$, $\beta = 0.3$)

Procedura destylacji wartościowanej relacji przewyższania S

4. Jeśli $\lambda_k = 0$, to umieść zbiór A na końcu preporządku zstępującego $\bar{P}$ i STOP; w przeciwnym razie podstaw $k:=k+1$.
5. W relacji $S_A^{\lambda_k}$ zachowaj tylko te łuki (a, b) , dla których $\sigma(a, b) > \lambda_k \wedge \sigma(a, b) > \sigma(b, a) + s[\sigma(a, b)]$.
6. Oblicz:

$$\lambda_k\text{- siłę wariantu } a: \quad p_A^{\lambda_k} = \left| \left\{ b \in A : a S_A^{\lambda_k} b \right\} \right|$$

$$\lambda_k\text{- słabość wariantu } a: \quad f_A^{\lambda_k} = \left| \left\{ b \in A : b S_A^{\lambda_k} a \right\} \right|$$

$$\lambda_k\text{- jakość wariantu } a: \quad q_A^{\lambda_k} = p_A^{\lambda_k} - f_A^{\lambda_k}$$

Procedura destylacji wartościowanej relacji przewyższania S

7. Wyznacz podzbiór wariantów z maksymalną jakością:

$$\overline{D}_1^k = \left\{ a \in A : q_A^{\lambda_k}(a) = \underset{x \in A}{\text{Max}} \{ q_A^{\lambda_k}(x) \} \right\}.$$

8. Jeśli $|\overline{D}_1^k| \neq 1$, to wywołaj procedurę wewnętrżnej destylacji

zbioru $\overline{D}_1^k$, której wynikiem jest podzbiór $\overline{D}_F^k \subseteq \overline{D}_1^k$;

w przeciwnym razie podstaw $\overline{D}_F^k = \overline{D}_1^k$.

9. Umieść zbiór $\overline{D}_F^k$ na aktualnie najniższej pozycji w

preporządku zstępującym $\overline{P}$ i podstaw: $A := A \setminus \overline{D}_F^k$.

10. Jeśli $A = \emptyset$, to STOP; w przeciwnym razie wróć do kroku 2.

Procedura destylacji wewnętrznej

1. Podstaw $h:=1$, $\lambda_h^k = \lambda_k$.
2.
$$\lambda_{h+1}^k = \underset{a,b \in \overline{D}_h^k}{Max} \left\{ \sigma(a,b), 0 \right\}$$
3. Jeśli $\lambda_h^k = 0$, to podstaw $\overline{D}_F^k = \overline{D}_h^k$ i STOP;
w przeciwnym razie podstaw $h:=h+1$.
4. W relacji $S_{\overline{D}_{h-1}^k}^{\lambda_h^k}$ zachowaj tylko te łuki (a, b) , dla których:

$$\sigma(a,b) > \lambda_h^k \wedge \sigma(a,b) > \sigma(b,a) + s[\sigma(a,b)].$$

Procedura destylacji wewnętrznej

5. Oblicz:

$$\lambda_h^k - \text{siłę wariantu } a: \quad p_{\overline{D}_{h-1}^k}^{\lambda_h^k} = \left| \left\{ b \in \overline{D}_{h-1}^k : a S_{\overline{D}_{h-1}^k}^{\lambda_h^k} b \right\} \right|$$

$$\lambda_h^k - \text{słabość wariantu } a: \quad f_{\overline{D}_{h-1}^k}^{\lambda_h^k} = \left| \left\{ b \in \overline{D}_{h-1}^k : b S_{\overline{D}_{h-1}^k}^{\lambda_h^k} a \right\} \right|$$

$$\lambda_h^k - \text{jakość wariantu } a: \quad q_{\overline{D}_{h-1}^k}^{\lambda_h^k} = p_{\overline{D}_{h-1}^k}^{\lambda_h^k} - f_{\overline{D}_{h-1}^k}^{\lambda_h^k}$$

Procedura destylacji wewnętrznej

6. Wyznacz podzbiór wariantów z maksymalną jakością:

$$\overline{D}_h^k = \left\{ a \in \overline{D}_{h-1}^k : q_{\overline{D}_{h-1}^k}^k(a) = \underset{x \in \overline{D}_{h-1}^k}{\text{Max}} \left\{ q_{\overline{D}_{h-1}^k}^k(x) \right\} \right\}.$$

7. Jeśli $|\overline{D}_h^k| \neq 1$, to wróć do kroku 2; w przeciwnym razie podstaw $\overline{D}_F^k = \overline{D}_h^k$ i STOP.

Procedura tworząca preporządek wstępujący $P \uparrow$

W stosunku do destylacji tworzącej preporządek zstępujący, zmianie ulegają kroki 6-8:

6. Wyznacz podzbiór wariantów z minimalną jakością:

$$\underline{D}_1^k = \left\{ a \in A : q_A^{\lambda_k}(a) = \underset{x \in A}{\text{Min}} \{ q_A^{\lambda_k}(x) \} \right\}.$$

7. Jeśli $|\underline{D}_1^k| \neq 1$, to wywołaj procedurę wewnętrzną destylacji

zbioru $\underline{D}_1^k$, której wynikiem jest podzbiór $\underline{D}_F^k \subseteq \underline{D}_1^k$;

w przeciwnym razie podstaw $\underline{D}_F^k = \underline{D}_1^k$.

8. Umieść zbiór $\underline{D}_F^k$ na aktualnie najwyższej pozycji w preporządku wstępującym $\underline{P}$ i podstaw: $A := A \setminus \underline{D}_F^k$.

Analogiczne zmiany występują w wewnętrznej destylacji $\underline{D}_1^k$; w kroku 6 szuka się wariantów z minimalną jakością.

Pytania?

