

Wspomaganie Decyzji Biznesowych

wprowadzenie i modele preferencji w postaci funkcji użyteczności

Jurek Błaszczyński



Institute of Computing Science, Poznań University of Technology,
60-965 Poznań, Poland

Październik 2018



E-MAIL

jurek [dot] blaszczyński [at] cs [dot] put [dot] poznań [dot] pl

OFFICE PHONE

(+48) 61 665 30 23

OFFICE

Centrum Wykładowe PP, room 1.6.7
ul. Piotrowo 2
60-965, Poznań

Wykład bazuje na *wielokryterialnym wspomaganiu decyzji* -
prowadzonym przez prof. dr. hab. inż. Romana Słowińskiego

- 1 Wstęp
- 2 Definicja problemu decyzyjnego
- 3 Modelowanie preferencji
- 4 Modele preferencji w postaci funkcji użyteczności
- 5 Metoda UTA
- 6 Metoda UTA^{GMS}

Plan

- wprowadzenie w tematykę wielokryterialnego wspomaganie decyzji i modele preferencji w postaci funkcji użyteczności
- modele preferencji w postaci relacji przewyższania
- modele preferencji w postaci zbioru reguł decyzyjnych i teoria zbiorów przybliżonych oparta na dominacji
- inne spojrzenia na wspomaganie decyzji

Literatura przedmiotu

- J.Figueira, S.Greco and M.Ehrgott (eds.), *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer-Verlag, New York, 2005
- S.Greco, B.Matarazzo, R.Słowiński, *Rough set theory for multicriteria decision analysis*. European J. of Operational Research 129 (2001) no.1, 1-47
- B.Roy: *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*. WNT, Warszawa, 1990.
- R.Słowiński, S.Greco, B. Matarazzo, *Rough set based decision aiding*. Chapter 16 [in]: E. Burke and G. Kendall (eds.), *Introductory Tutorials on Optimization, Search and Decision Support Methodologies*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003
- R.Słowiński, S.Greco, B. Matarazzo, *Axiomatization of utility, outranking and decision-rule preference models*, Control and Cybernetics, 31 (2002) no.4, 1005-1035
- J.Figueira, S.Greco, R.Słowiński, *Building a set of additive value functions representing a reference preorder and intensities of preference: GRIP method*, European J. Operational Research 195 (2009) 460-486
- J.Branke, K.Deb, K.Miettinen, R.Słowiński (eds.), *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches*. State-of-the-Art Survey series of LNCS, vol.5252, Springer-Verlag, Berlin, 2008

Literatura przedmiotu...

`www.cs.put.poznan.pl/jblaszczyński/wdb/`

- 1 Wstęp
- 2 Definicja problemu decyzyjnego
- 3 Modelowanie preferencji
- 4 Modele preferencji w postaci funkcji użyteczności
- 5 Metoda UTA
- 6 Metoda UTA^{GMS}

Problem decyzyjny

- istnieje pewien *cel* lub *cele* do osiągnięcia
- istnieje wiele alternatywnych sposobów osiągnięcia celu (celów) - tworzą one zbiór akcji A (alternatyw, rozwiązań, wariantów, ...)
- wybór najlepszego sposobu nie jest trywialny

Problem decyzyjny

- istnieje pewien *cel* lub *cele* do osiągnięcia
- istnieje wiele alternatywnych sposobów osiągnięcia celu (celów) - tworzą one zbiór akcji A (alternatyw, rozwiązań, wariantów, ...)
- wybór najlepszego sposobu nie jest trywialny

decydent (DM) może postawić następujące pytania dotyczące zbioru A :

P_α - jak *wybrać* najlepszą akcję?

Problem decyzyjny

- istnieje pewien *cel* lub *cele* do osiągnięcia
- istnieje wiele alternatywnych sposobów osiągnięcia celu (celów) - tworzą one zbiór akcji A (alternatyw, rozwiązań, wariantów, ...)
- wybór najlepszego sposobu nie jest trywialny

decydent (DM) może postawić następujące pytania dotyczące zbioru A :

P_β - jak *zaklasyfikować* (*przypisać*) akcje do zdefiniowanych wcześniej klas decyzyjnych?

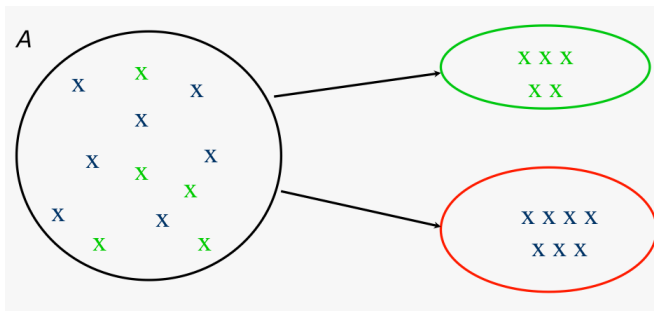
Problem decyzyjny

- istnieje pewien *cel* lub *cele* do osiągnięcia
- istnieje wiele alternatywnych sposobów osiągnięcia celu (celów) - tworzą one zbiór akcji A (alternatyw, rozwiązań, wariantów, ...)
- wybór najlepszego sposobu nie jest trywialny

decydent (DM) może postawić następujące pytania dotyczące zbioru A :

P_γ - jak *uporządkować* akcje od najlepszej do najgorszej?

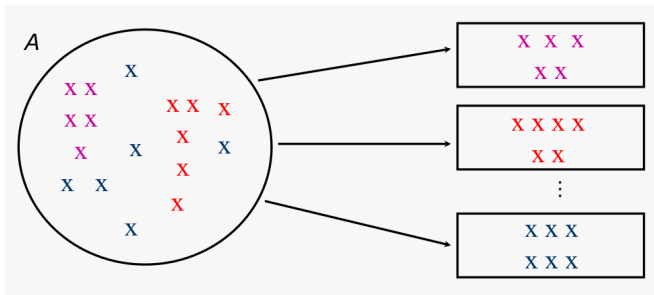
P_α - problematyka wyboru



przykłady

wybór najlepszego towaru, miejsca budowy autostrady

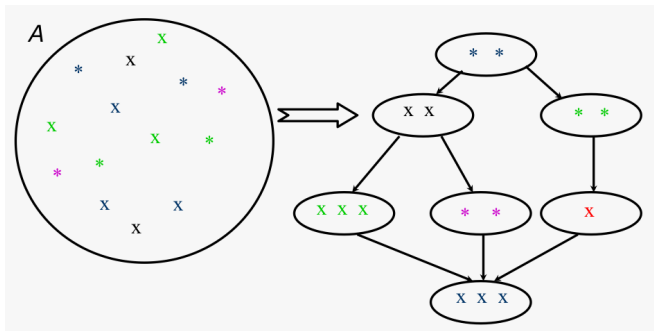
P_β - problematyka sortowania (klasyfikacji)



przykłady

przydział instrumentów finansowych do klas ryzyka, towarów do klas jakości

P_γ - problematyka porządkowania



przykłady

budowa rankingu towarów, miejsc budowy autostrady

Pozostałe wymiary problemu decyzyjnego

kiedy ustalona jest już problematyka decyzyjna należy ustalić jeszcze następujące kwestie:

DM kto jest *decydentem* i jak wielu decydentów problem dotyczy?

Pozostałe wymiary problemu decyzyjnego

kiedy ustalona jest już problematyka decyzyjna należy ustalić jeszcze następujące kwestie:

DM kto jest *decydentem* i jak wielu decydentów problem dotyczy?

MC jakie są *kryteria* oceny i jak wiele ich jest?

Pozostałe wymiary problemu decyzyjnego

kiedy ustalona jest już problematyka decyzyjna należy ustalić jeszcze następujące kwestie:

DM kto jest *decydentem* i jak wielu decydentów problem dotyczy?

MC jakie są *kryteria* oceny i jak wiele ich jest?

RU jakie są *konsekwencje* podjętych akcji i czy są one deterministyczne czy może raczej niepewne (czy konsekwencją jest jeden stan natury o $P = 1$ czy też wiele stanów, których $P \leq 1$)?

Pozostałe wymiary problemu decyzyjnego

kiedy ustalona jest już problematyka decyzyjna należy ustalić jeszcze następujące kwestie:

DM kto jest *decydentem* i jak wielu decydentów problem dotyczy?

MC jakie są *kryteria* oceny i jak wiele ich jest?

RU jakie są *konsekwencje* podjętych akcji i czy są one deterministyczne czy może raczej niepewne (czy konsekwencją jest jeden stan natury o $P = 1$ czy też wiele stanów, których $P \leq 1$)?

gdy $DM = 1$, $MC = 1$, $RU = 1$

rozwiązanie każdego z tych problemów jest proste z *filozoficznego* punktu widzenia: P_α - optymalizacja, P_β - sortowanie (klasyfikacja porządkowa), P_γ - ranking

Pozostałe wymiary problemu decyzyjnego

kiedy ustalona jest już problematyka decyzyjna należy ustalić jeszcze następujące kwestie:

DM kto jest *decydentem* i jak wielu decydentów problem dotyczy?

MC jakie są *kryteria* oceny i jak wiele ich jest?

RU jakie są *konsekwencje* podjętych akcji i czy są one deterministyczne czy może raczej niepewne (czy konsekwencją jest jeden stan natury o $P = 1$ czy też wiele stanów, których $P \leq 1$)?

gdy $DM = m$, $MC = 1$, $RU = 1$

rozwiązaniem takich problemów zajmuje się *teoria społecznego wyboru* (TSC)

Pozostałe wymiary problemu decyzyjnego

kiedy ustalona jest już problematyka decyzyjna należy ustalić jeszcze następujące kwestie:

DM kto jest *decydentem* i jak wielu decydentów problem dotyczy?

MC jakie są *kryteria* oceny i jak wiele ich jest?

RU jakie są *konsekwencje* podjętych akcji i czy są one deterministyczne czy może raczej niepewne (czy konsekwencją jest jeden stan natury o $P = 1$ czy też wiele stanów, których $P \leq 1$)?

gdy $DM = 1$, $MC = n$, $RU = 1$

rozwiązaniem takich problemów zajmuje się *wielokryterialne wspomaganie decyzji* (MCDA)

Pozostałe wymiary problemu decyzyjnego

kiedy ustalona jest już problematyka decyzyjna należy ustalić jeszcze następujące kwestie:

DM kto jest *decydentem* i jak wielu decydentów problem dotyczy?

MC jakie są *kryteria* oceny i jak wiele ich jest?

RU jakie są *konsekwencje* podjętych akcji i czy są one deterministyczne czy może raczej niepewne (czy konsekwencją jest jeden stan natury o $P = 1$ czy też wiele stanów, których $P \leq 1$)?

gdy $DM = 1$, $MC = 1$, $RU \neq 1$

rozwiązaniem takich problemów zajmują się różne metodyki *wspomagania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności* (DRU)

Porównanie TSC, MCDA i DRU

- elementy zbioru A to: kandydaci, akcje, działania

Porównanie TSC, MCDA i DRU

- elementy zbioru A to: kandydaci, akcje, działania
- wymiary przestrzeni ocen: głosujący, kryteria, prawdopodobieństwo

Porównanie TSC, MCDA i DRU

- elementy zbioru A to: kandydaci, akcje, działania
- wymiary przestrzeni ocen: głosujący, kryteria, prawdopodobieństwo
- obiektywna informacja o elementach zbioru A : relacja dominacji, relacja dominacji, stochastyczna relacja dominacji

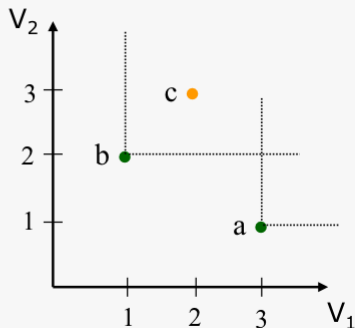
Porównanie TSC, MCDA i DRU

- elementy zbioru A to: kandydaci, akcje, działania
- wymiary przestrzeni ocen: głosujący, kryteria, prawdopodobieństwo
- obiektywna informacja o elementach zbioru A : relacja dominacji, relacja dominacji, stochastyczna relacja dominacji

we wszystkich trzech przypadkach problem decyzyjny jest źle postawiony ze względu na konflikt pomiędzy wymiarami i nie ma rozwiązania bez dodatkowej informacji

Przykład TSC

Kandydaci	Głosujący	
	V_1	V_2
a	3	1
b	1	2
c	2	3

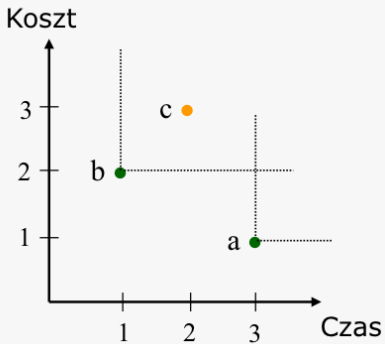


V_1 : $b \succ c \succ a$,

V_2 : $a \succ b \succ c$

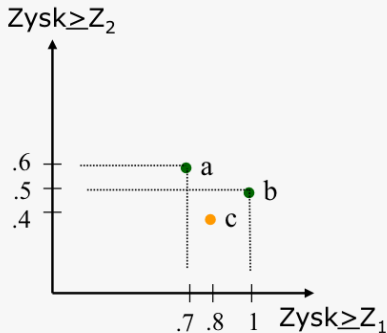
Przykład MCDA

Akcja	Kryterium	
	Czas	Koszt
a	3	1
b	1	2
c	2	3



Przykład DRU

Działanie	Prawdopodobieństwo zysku	
	$Zysk \geq Z_1$	$Zysk \geq Z_2$
a	0.7	0.6
b	1.0	0.5
c	0.8	0.4



$$Z_1 < Z_2$$

- 1 Wstęp
- 2 Definicja problemu decyzyjnego
- 3 Modelowanie preferencji
- 4 Modele preferencji w postaci funkcji użyteczności
- 5 Metoda UTA
- 6 Metoda UTA^{GMS}

Modelowanie preferencji

- relacja dominacja jest zbyt ubogą relacją - wiele z akcji jest *nieporównywalnych*

Modelowanie preferencji

- relacja dominacja jest zbyt ubogą relacją - wiele z akcji jest *nieporównywalnych*
- w związku z tym aby rozwiązać problem decyzyjny należy „wzbogacić” relację dominacji i informację preferencyjną pochodzącą od DM

Modelowanie preferencji

- relacja dominacja jest zbyt ubogą relacją - wiele z akcji jest *nieporównywalnych*
- w związku z tym aby rozwiązać problem decyzyjny należy „wzbogacić” relację dominacji i informację preferencyjną pochodzącą od DM
- informacja preferencyjna pozwoli nam zbudować model preferencji, który agreguje oceny elementów zbioru A

Modelowanie preferencji

- relacja dominacja jest zbyt ubogą relacją - wiele z akcji jest *nieporównywalnych*
- w związku z tym aby rozwiązać problem decyzyjny należy „wzbogacić” relację dominacji i informację preferencyjną pochodzącą od DM
- informacja preferencyjna pozwoli nam zbudować model preferencji, który agreguje oceny elementów zbioru A
- dzięki tej agregacji elementy zbioru A stają się bardziej porównywalne

Modelowanie preferencji

- relacja dominacja jest zbyt ubogą relacją - wiele z akcji jest *nieporównywalnych*
- w związku z tym aby rozwiązać problem decyzyjny należy „wzbogacić” relację dominacji i informację preferencyjną pochodzącą od DM
- informacja preferencyjna pozwoli nam zbudować model preferencji, który agreguje oceny elementów zbioru A
- dzięki tej agregacji elementy zbioru A stają się bardziej porównywalne
- eksploracja relacji preferencji na zbiorze A pozwoli nam podać ostateczną rekomendację w postaci najlepszego *wyboru*, *przypisania* lub *rankingu*

Modelowanie preferencji

- relacja dominacja jest zbyt ubogą relacją - wiele z akcji jest *nieporównywalnych*
- w związku z tym aby rozwiązać problem decyzyjny należy „wzbogacić” relację dominacji i informację preferencyjną pochodzącą od DM
- informacja preferencyjna pozwoli nam zbudować model preferencji, który agreguje oceny elementów zbioru A
- dzięki tej agregacji elementy zbioru A stają się bardziej porównywalne
- eksploracja relacji preferencji na zbiorze A pozwoli nam podać ostateczną rekomendację w postaci najlepszego *wyboru*, *przypisania* lub *rankingu*
- będziemy koncentrować się na wielokryterialnym wspomaganiu decyzji (MCDA) - wymiarami naszych problemów będą więc kryteria

Modelowanie preferencji

modelowanie matematyczne

- reprezentacja problemu decyzyjnego z użyciem funkcji i/lub relacji porządkujących
- *forma reprezentacji*: programowanie matematyczne, relacja preferencji w zbiorze wariantów decyzyjnych

uczenie maszynowe

- budowanie reprezentacji problemu decyzyjnego na drodze analizy przykładów decyzji (przykładów uczących)
- *forma reprezentacji*: wyrażenia logiczne, reguły decyzyjne, drzewa decyzyjne, sieci semantyczne, funkcje

Modelowanie preferencji

rozważymy trzy rodzaje modeli preferencji:

- relacyjne - relacja przewyższania S lub inna relacja rozmyta (Roy 1968)

$$a S b = „a \text{ jest co najmniej tak dobre jak } b” \quad (1)$$

- funkcyjne - addytywna funkcja użyteczności (Debreu 1960, Luce i Tukey 1964)

$$U(a) = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)] \quad (2)$$

- zbiór reguł decyzyjnych

$$\text{jeżeli } \dots \text{ to } \dots \quad (3)$$

zbiór reguł decyzyjnych jest najbardziej ogólnym modelem preferencji (z powyższych trzech)

Modelowanie preferencji a niedoskonałość informacji

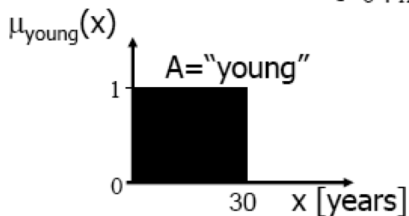
- rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna (Bernoulli, 1700)
 - niepewność wynikająca z przypadkowej zmienności parametrów (werystyczna).
 - aksjomat o addytywności prawdopodobieństw zdarzeń rozłącznych: $P(X) + P(\neg X) = 1$
- teoria zbiorów rozmytych (Zadeh, 1965)
 - niepewność natury subiektywnej (posybilistyczna) i nieostrość pojęć
- teoria zbiorów przybliżonych (Pawlak, 1982)
 - niepewność wynikająca z granularności informacji (niespójność, dwuznaczność)

Classical (Crisp) Set

$$\text{young} = \{ x \mid x \leq 30 \}$$

characteristic function:

$$\mu_{\text{young}}(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 30 \\ 0 & : x > 30 \end{cases}$$

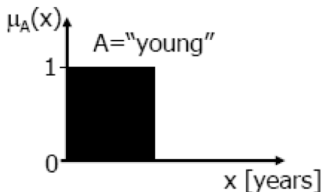


Fuzzy versus Classical Logic

Classical Logic

Element x belongs to set A
or it does not:

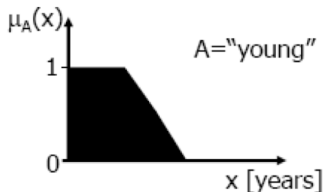
$$\mu_A(x) \in \{0, 1\}$$



Fuzzy Logic

Element x belongs to set A
with a certain *degree of membership*:

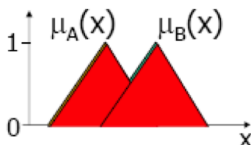
$$\mu_A(x) \in [0, 1]$$



Operators on Fuzzy Sets

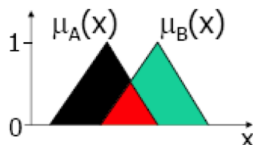
Union

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

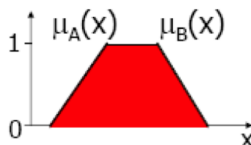


Intersection

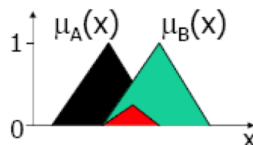
$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



$$\mu_{A \vee B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$



$$\mu_{A \wedge B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$



Fuzzy Relations

Example:

$X = \{ \text{rainy, cloudy, sunny} \}$

$Y = \{ \text{swimming, bicycling, camping, reading} \}$

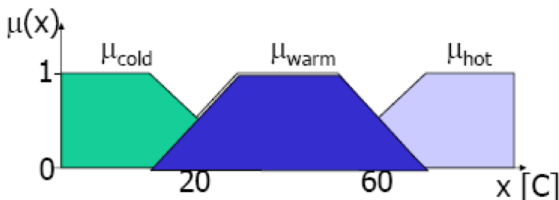
X/Y	swimming	bicycling	camping	reading
rainy	0.0	0.2	0.0	1.0
cloudy	0.0	0.8	0.3	0.3
sunny	1.0	0.2	0.7	0.0

Linguistic Variables

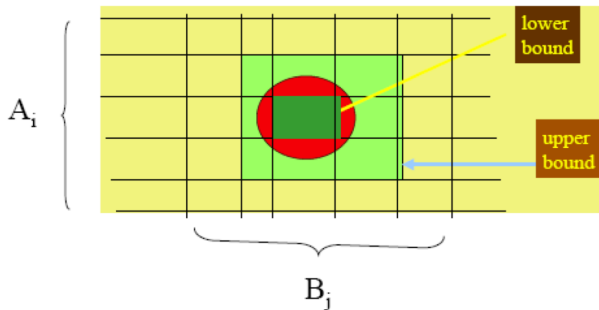
A linguistic variable has a set of linguistic terms/values.
Each linguistic value corresponds to a fuzzy set and explained with its membership function

linguistic variable : temperature

linguistics terms (fuzzy sets) : { cold, warm, hot }



Rough Sets



$$\langle X_-, X_+ \rangle$$

lower bound : $X_- = \{(A_i, B_j) \mid X \supseteq A_i \times B_j\}$

upper bound : $X_+ = \{(A_i, B_j) \mid X \cap (A_i \times B_j) \neq \emptyset\}$

Kryterium

kryterium jest funkcją rzeczywistą g_i zdefiniowaną na zbiorze A odzwierciedlającą jakość akcji z danego punktu widzenia. Żeby porównać dwie akcje $a, b \in A$ z tego punktu widzenia wystarczy porównać dwie wartości: $g_i(a)$ i $g_i(b)$ (np. cena, wielkość)

Skale kryterialne

- *skala porządkowa* - na takiej skali istotny jest jedynie porządek wartości kryteriów; odległość nie ma znaczenia (np. oceny szkolne, satysfakcja klienta)
- *skala liczbowa* - odległość pomiędzy wartościami kryteriów ma znaczenie
 - *skala interwałowa* - różnice między dwiema jej wartościami dają się obliczyć i mają interpretację w świecie rzeczywistym, jednak nie ma sensu dzielenie dwóch wartości przez siebie - określona jest jednostka miary, jednak punkt zero jest wybrany umownie (np. stopnie Celsjusza)
 - *skala ilorazowa* - stosunki między dwiema jej wartościami mają interpretację w świecie rzeczywistym (np. stopnie w kelwinach, inflacja)

Spójna rodzina kryteriów

rodzina kryteriów $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ jest *spójna* gdy jest:

- ❶ *kompletna* - jeśli dwie akcje $a, b \in A$ mają identyczne oceny $g_i(a) = g_i(b)$ ze względu na wszystkie kryteria $i = 1, 2, \dots, n$ należące do rodziny $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ to akcje a i b należy uznać za nierozróżnialne, co zapisujemy aIb

Spójna rodzina kryteriów

rodzina kryteriów $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ jest *spójna* gdy jest:

- 1 *kompletna* - jeśli dwie akcje $a, b \in A$ mają identyczne oceny $g_i(a) = g_i(b)$ ze względu na wszystkie kryteria $i = 1, 2, \dots, n$ należące do rodziny $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ to akcje a i b należy uznać za nierozróżnialne, co zapisujemy aIb
- 2 *monotoniczna* - jeśli dla dwóch akcji $a, b \in A$ przyjmujemy, że a jest preferowane nad b (co zapisujemy aPb lub $a \succ b$) to: dla $c \in A$ takiego, że $g_i(c)$ jest nie gorsze od $g_i(a)$ na wszystkich kryteriach ($g_i(c) \succeq g_i(a), i = 1, 2, \dots, n$) należy przyjąć, że c jest preferowane nad b (cPb)

Spójna rodzina kryteriów

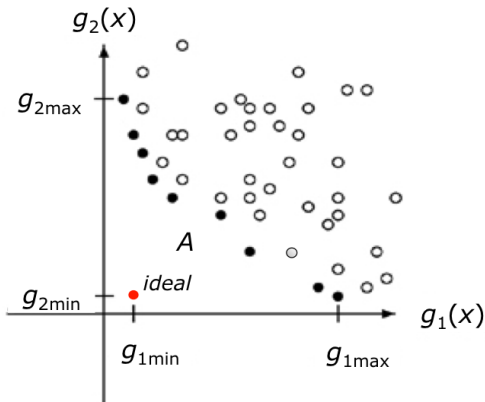
rodzina kryteriów $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ jest *spójna* gdy jest:

- ❶ *kompletna* - jeśli dwie akcje $a, b \in A$ mają identyczne oceny $g_i(a) = g_i(b)$ ze względu na wszystkie kryteria $i = 1, 2, \dots, n$ należące do rodziny $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ to akcje a i b należy uznać za nierozróżnialne, co zapisujemy aIb
- ❷ *monotoniczna* - jeśli dla dwóch akcji $a, b \in A$ przyjmujemy, że a jest preferowane nad b (co zapisujemy aPb lub $a \succ b$) to: dla $c \in A$ takiego, że $g_i(c)$ jest nie gorsze od $g_i(a)$ na wszystkich kryteriach ($g_i(c) \succeq g_i(a), i = 1, 2, \dots, n$) należy przyjąć, że c jest preferowane nad b (cPb)
- ❸ *nienadmiarowa* - rodzina kryteriów G nie zawiera takich kryteriów g_i , których usunięcie nie spowoduje naruszenia poprzednich warunków

Relacja dominacji

akcja $a \in A$ jest *niezdominowana* (*Pareto optymalna*) wtedy i tylko wtedy, gdy:

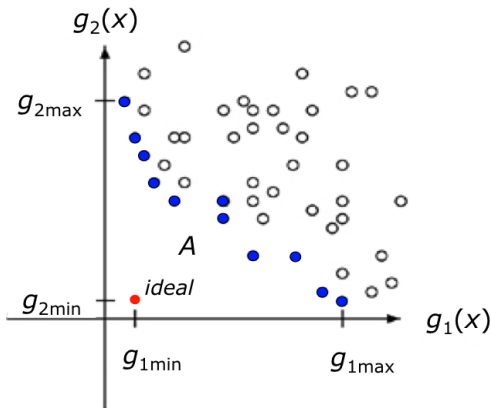
nie istnieje inna akcja $b \in A$ taka, że $g_i(b) \succeq g_i(a)$, $i = 1, 2, \dots, n$,
i na co najmniej jednym kryterium $j = \{1, 2, \dots, n\}$, $g_j(b) \succ g_j(a)$



Relacja dominacji

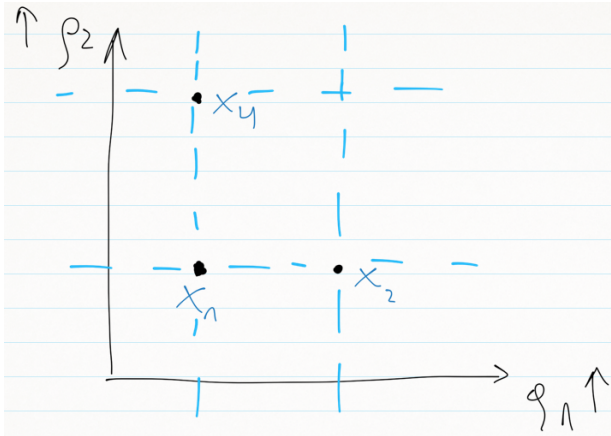
akcja $a \in A$ jest *słabo niezdominowana* (*słabo Pareto optymalna*) wtedy i tylko wtedy, gdy:

nie istnieje inna akcja $b \in A$ taka, że $g_i(b) \succ g_i(a), i = 1, 2, \dots, n$



Quiz

Wskaż akcje niezdominowane (Pareto optymalne)



a) x_1, x_4

b) x_2, x_4

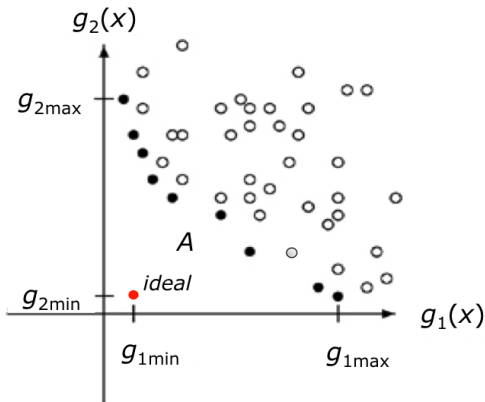
c) x_1

d) żadna z akcji

Quiz

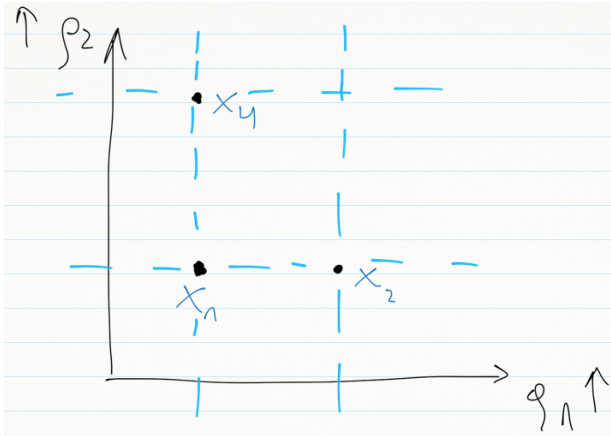
akcja $a \in A$ jest *niezdominowana* (*Pareto optymalna*) wtedy i tylko wtedy, gdy:

nie istnieje inna akcja $b \in A$ taka, że $g_i(b) \succeq g_i(a), i = 1, 2, \dots, n$,
i na co najmniej jednym kryterium $j = \{1, 2, \dots, n\}$, $g_j(b) \succ g_j(a)$



Quiz

Wskaż akcje niezdominowane (Pareto optymalne)



a) x_1, x_4

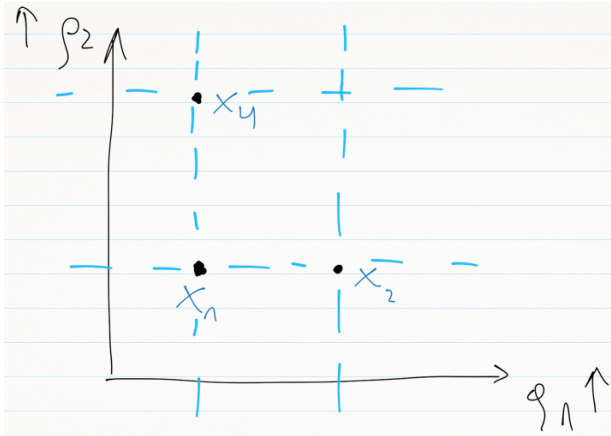
b) x_2, x_4

c) x_1

d) żadna z akcji

Quiz

Wskaż akcje słabo niezdominowane (słabo Pareto optymalne)



a) x_1, x_4

b) x_2, x_4

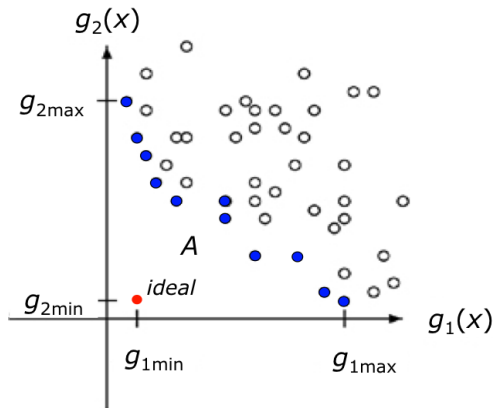
c) x_1

d) wszystkie akcje

Quiz

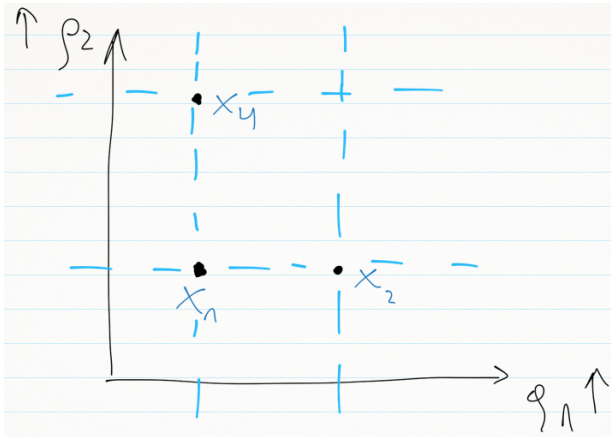
akcja $a \in A$ jest *słabo niezdominowana* (*słabo Pareto optymalna*) wtedy i tylko wtedy, gdy:

nie istnieje inna akcja $b \in A$ taka, że $g_i(b) \succ g_i(a), i = 1, 2, \dots, n$



Quiz

Wskaż akcje słabo niezdominowane (słabo Pareto optymalne)



a) x_1, x_4

b) x_2, x_4

c) x_1

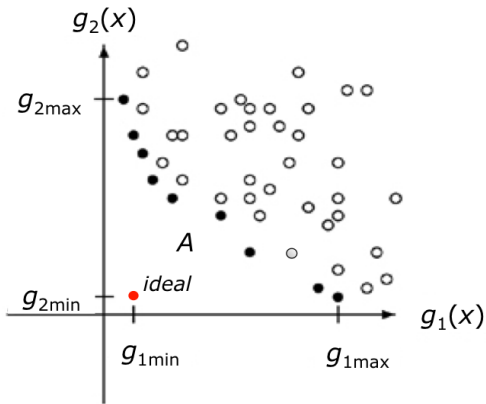
d) wszystkie akcje

- 1 Wstęp
- 2 Definicja problemu decyzyjnego
- 3 Modelowanie preferencji
- 4 Modele preferencji w postaci funkcji użyteczności
- 5 Metoda UTA
- 6 Metoda UTA^{GMS}

Ranking wielokryterialny

- jedyną obiektywną informacją wynikającą ze sformułowania problemu wielokryterialnego jest *relacja dominacji* na zbiorze akcji A ,
- akcja $a \in A$ jest *niezdominowana* (*Pareto optymalna*) wtedy i tylko wtedy, gdy: nie istnieje inna akcja $b \in A$ taka, że $g_i(b) \succeq g_i(a)$, $i = 1, 2, \dots, n$, i na co najmniej jednym kryterium $j = \{1, 2, \dots, n\}$, $g_j(b) \succ g_j(a)$

Ranking wielokryterialny

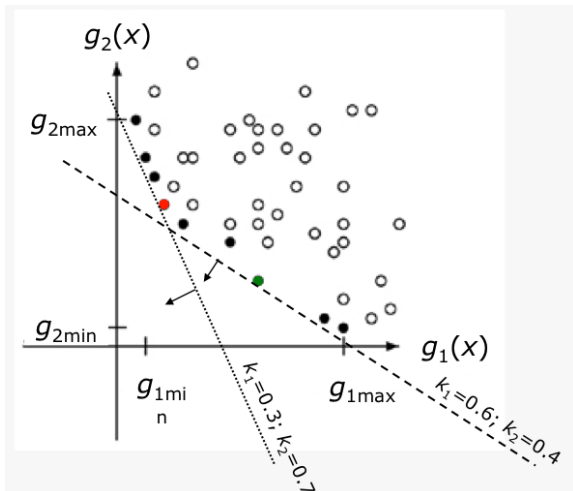


Ranking wielokryterialny

- dominacja jest zbyt ubogą relacją - wiele z akcji jest *nieporównywalnych*,
- można jednak „wzbogacić” relację dominacji o *informację preferencyjną* pochodzącą od decydenta (DM)
- informacja preferencyjna służy do konstrukcji *modelu preferencji*, który agreguje oceny akcji
- model preferencji nakłada relację preferencji na zbiór akcji A , z pomocą której to relacji akcje stają się bardziej porównywalne
- następnie poprawna eksploatacja relacji preferencji w zbiorze A prowadzi do końcowej rekomendacji w postaci rankingu

Model preferencji w postaci funkcji użyteczności U

- najbardziej intuicyjny model: $U(a) = \sum_{i=1}^n k_i g_i(a)$,



Model preferencji w postaci funkcji użyteczności U

- najbardziej intuicyjny model: $U(a) = \sum_{i=1}^n k_i g_i(a)$,
- informacją preferencyjną są wagi k_i definiujące przetarg pomiędzy kryteriami,

Model preferencji w postaci funkcji użyteczności U

- najbardziej intuicyjny model: $U(a) = \sum_{i=1}^n k_i g_i(a)$,
- informacją preferencyjną są wagi k_i definiujące przetarg pomiędzy kryteriami,
- niestety nie jest łatwo uzyskać taką informację od decydenta,

Model preferencji w postaci funkcji użyteczności U

- najbardziej intuicyjny model: $U(a) = \sum_{i=1}^n k_i g_i(a)$,
- informacją preferencyjną są wagi k_i definiujące przetarg pomiędzy kryteriami,
- niestety nie jest łatwo uzyskać taką informację od decydenta,
- co więcej, w przypadku tego modelu zakłada się, że kryteria są niezależne względem preferencji

Model preferencji w postaci funkcji użyteczności U

- najbardziej intuicyjny model: $U(a) = \sum_{i=1}^n k_i g_i(a)$,
- informacją preferencyjną są wagi k_i definiujące przetarg pomiędzy kryteriami,
- niestety nie jest łatwo uzyskać taką informację od decydenta,
- co więcej, w przypadku tego modelu zakłada się, że kryteria są niezależne względem preferencji
- eksploatacja tego modelu preferencji jest natomiast dość łatwa:

$$a \succeq b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n k_i g_i(a) \geq \sum_{i=1}^n k_i g_i(b) \quad (4)$$

Przykład modelowania preferencji w postaci sumy ważonej

niech wagi wynoszą odpowiednio: $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.4$

- suma ważona umożliwia kompensację pomiędzy kryteriami:

$$U(g_1, g_2) = U(g_1 + 1, g_2 - x)$$

Przykład modelowania preferencji w postaci sumy ważonej

niech wagi wynoszą odpowiednio: $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.4$

- suma ważona umożliwia kompensację pomiędzy kryteriami:

$$U(g_1, g_2) = U(g_1 + 1, g_2 - x),$$

$$g_1 \times k_1 + g_2 \times k_2 = (g_1 + 1) \times k_1 + (g_2 - x) \times k_2 \text{ lub}$$

$$k_1 = x \times k_2, \text{ a stąd:}$$

Przykład modelowania preferencji w postaci sumy ważonej

niech wagi wynoszą odpowiednio: $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.4$

- suma ważona umożliwia kompensację pomiędzy kryteriami:

$$U(g_1, g_2) = U(g_1 + 1, g_2 - x),$$

$$g_1 \times k_1 + g_2 \times k_2 = (g_1 + 1) \times k_1 + (g_2 - x) \times k_2 \text{ lub}$$

$$k_1 = x \times k_2, \text{ a stąd:}$$

- $x = k_1/k_2$,
- x jest zmianą na kryterium g_2 jaka rekompensuje zmianę o 1 na kryterium g_1 ($x = 1.5$),

Przykład modelowania preferencji w postaci sumy ważonej

niech wagi wynoszą odpowiednio: $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.4$

- suma ważona umożliwia kompensację pomiędzy kryteriami:
 $U(g_1, g_2) = U(g_1 + 1, g_2 - x)$,
 $g_1 \times k_1 + g_2 \times k_2 = (g_1 + 1) \times k_1 + (g_2 - x) \times k_2$ lub
 $k_1 = x \times k_2$, a stąd:
- $x = k_1/k_2$,
- x jest zmianą na kryterium g_2 jaka rekompensuje zmianę o 1 na kryterium g_1 ($x = 1.5$),
- analogicznie, $x' = k_2/k_1$ jest zmianą na kryterium g_1 jaka rekompensuje zmianę o 1 na kryterium g_2 ($x' = 0.67$),

Inne własności sumy ważonej

- wagi są stałe dla całego zakresu zmienności wartości kryteriów,

Inne własności sumy ważonej

- wagi są stałe dla całego zakresu zmienności wartości kryteriów,
- suma ważona, a bardziej ogólnie, addytywna funkcja użyteczności wymaga, aby kryteria były niezależne względem preferencji:

$u_i(a) = g_i \times k_i$ nie zmienia się wraz ze zmianą $g_j(a)$,
 $j = 1, \dots, n; j \neq i$

Inne własności sumy ważonej

- suma ważona, a bardziej ogólnie, addytywna funkcja użyteczności wymaga, aby kryteria były niezależne względem preferencji:

$u_i(a) = g_i \times k_i$ nie zmienia się wraz ze zmianą $g_j(a)$,
 $j = 1, \dots, n; j \neq i$

- innymi słowy, taki model nie jest w stanie przedstawić następujących preferencji:

Car	(↓) Gas consumption	(↓) Price	(↑) Comfort
a	5	90	5
b	9	90	9
c	5	50	5
d	9	50	9

$b \succ a$ while $c \succ d$

It requires that:

if $b \succ a$ then $d \succ c$

- 1 Wstęp
- 2 Definicja problemu decyzyjnego
- 3 Modelowanie preferencji
- 4 Modele preferencji w postaci funkcji użyteczności
- 5 Metoda UTA
- 6 Metoda UTA^{GMS}

Jak uzyskać informację preferencyjną?

- należy stosować metody, które korzystają z informacji preferencyjnej, którą łatwo pozyskać od użytkownika

Jak uzyskać informację preferencyjną?

- należy stosować metody, które korzystają z informacji preferencyjnej, którą łatwo pozyskać od użytkownika
- łatwe pozyskiwanie oznacza, że przychodzi ono w sposób naturalny, ale może również oznaczać, że uzyskana informacja jest częściowa

Jak uzyskać informację preferencyjną?

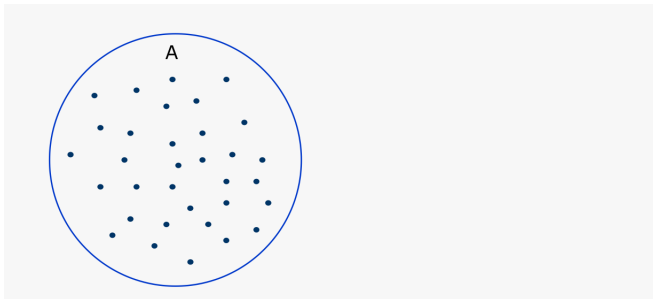
- psychologowie potwierdzają, że użytkownicy są bardziej pewni przedstawiając swoje decyzje, niż wtedy gdy się od nich wymaga wytłumaczenia tych decyzji

Jak uzyskać informację preferencyjną?

- psychologowie potwierdzają, że użytkownicy są bardziej pewni przedstawiając swoje decyzje, niż wtedy gdy się od nich wymaga wytłumaczenia tych decyzji
- najbardziej naturalną informacją preferencyjną jest całościowe porównanie parami akcji, które są dobrze znane użytkownikowi (będziemy je nazywać *akcjami referencyjnymi*).

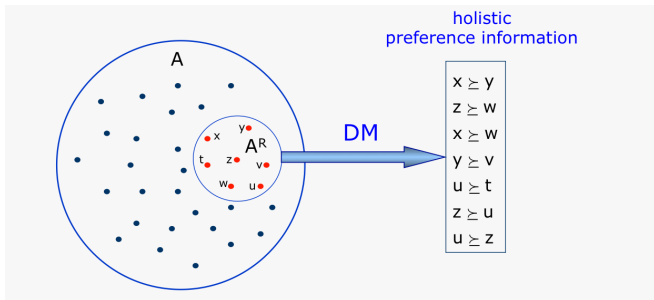
Jak uzyskać informację preferencyjną?

- psychologowie potwierdzają, że użytkownicy są bardziej pewni przedstawiając swoje decyzje, niż wtedy gdy się od nich wymaga wytłumaczenia tych decyzji
- najbardziej naturalną informacją preferencyjną jest całościowe porównanie parami akcji, które są dobrze znane użytkownikowi (będziemy je nazywać *akcjami referencyjnymi*).



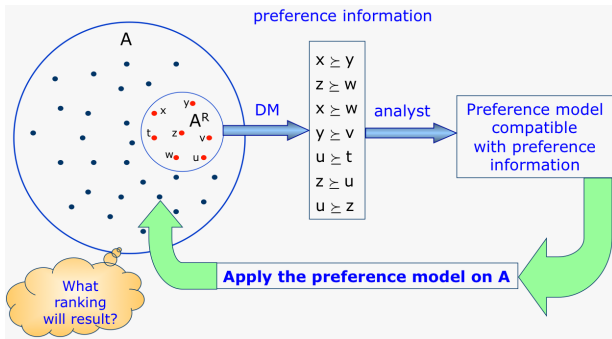
Jak uzyskać informację preferencyjną?

- psychologowie potwierdzają, że użytkownicy są bardziej pewni przedstawiając swoje decyzje, niż wtedy gdy się od nich wymaga wytłumaczenia tych decyzji
- najbardziej naturalną informacją preferencyjną jest całościowe porównanie parami akcji, które są dobrze znane użytkownikowi (będziemy je nazywać *akcjami referencyjnymi*).



Jak uzyskać informację preferencyjną?

- psychologowie potwierdzają, że użytkownicy są bardziej pewni przedstawiając swoje decyzje, niż wtedy gdy się od nich wymaga wytłumaczenia tych decyzji
- najbardziej naturalną informacją preferencyjną jest całościowe porównanie parami akcji, które są dobrze znane użytkownikowi (będziemy je nazywać *akcjami referencyjnymi*).



Paradygmaty agregacji

- tradycyjny paradygmat agregacji:
model agregacji kryteriów (model preferencji) jest wpierw konstruowany, a później aplikowany na zbiorze akcji A , aby dowiedzieć się jak wyglądają całościowe preferencje

Paradygmaty agregacji

- tradycyjny paradygmat agregacji:
model agregacji kryteriów (model preferencji) jest w pierw konstruowany, a później aplikowany na zbiorze akcji A , aby dowiedzieć się jak wyglądają całościowe preferencje
- paradygmat desagregacji-agregacji (regresji porządkowej):
całościowe preferencje dotyczące podzbioru $A^R \subseteq A$ są wiedzą początkową; na jej podstawie tworzony jest model agregacji kryteriów (model preferencji), który jest kompatybilny z tą wiedzą; model ten jest następnie stosowany na zbiorze akcji A

Paradygmat regresji porządkowej

- paradygmat regresji porządkowej podkreśla, że odkrycie intencji użytkownika (DM) odbywa się poprzez interpretację zależności pomiędzy akcjami, a nie jest wiedzą a priori

Paradygmat regresji porządkowej

- paradygmat regresji porządkowej podkreśla, że odkrycie intencji użytkownika (DM) odbywa się poprzez interpretację zależności pomiędzy akcjami, a nie jest wiedzą a priori
- paradygmat ten jest zgodny z:
 - zasadą racjonalności a posteriori zaproponowaną przez *Marcha*,
 - uczeniem z przykładów typowym dla AI

UTA - podstawowe założenia i notacja

- G_i - dziedzina kryterium g_i (G_i jest skończona lub policzalna),

UTA - podstawowe założenia i notacja

- G_i - dziedziną kryterium g_i (G_i jest skończona lub policzalna),
- $G = \prod_{i=1}^n G_i$ jest przestrzenią ocen,

UTA - podstawowe założenia i notacja

- G_i - dziedziną kryterium g_i (G_i jest skończona lub policzalna),
- $G = \prod_{i=1}^n G_i$ jest przestrzenią ocen,
- $x, y \in G$ są profilami akcji w przestrzeni ocen

UTA - podstawowe założenia i notacja

- G_i - dziedzina kryterium g_i (G_i jest skończona lub policzalna),
- $G = \prod_{i=1}^n G_i$ jest przestrzenią ocen,
- $x, y \in G$ są profilami akcji w przestrzeni ocen
- $\succeq$ - jest relacją *słabej preferencji (przewyższania)* na G , dla każdego $x, y \in G$:
 $x \succeq y \Leftrightarrow$ „ x jest co najmniej tak dobre jak y ”
 $x \succ y \equiv [x \succeq y \wedge \neg y \succeq x] \Leftrightarrow$ „ x jest *preferowane* nad y ”
 $x \sim y \equiv [x \succeq y \wedge y \succeq x] \Leftrightarrow$ „ x jest *nierozróżnialne* z y ”

UTA - podstawowe założenia i notacja

- G_i - dziedzina kryterium g_i (G_i jest skończona lub policzalna),
- $G = \prod_{i=1}^n G_i$ jest przestrzenią ocen,
- $x, y \in G$ są profilami akcji w przestrzeni ocen
- $\succeq$ - jest relacją *słabej preferencji (przewyższania)* na G , dla każdego $x, y \in G$:
 $x \succeq y \Leftrightarrow$ „ x jest co najmniej tak dobre jak y ”
 $x \succ y \equiv [x \succeq y \wedge \neg y \succeq x] \Leftrightarrow$ „ x jest *preferowane* nad y ”
 $x \sim y \equiv [x \succeq y \wedge y \succeq x] \Leftrightarrow$ „ x jest *nierozróżnialne* z y ”
- $x_i, y_i \in G_i$ są ocenami na kryterium g_i ,

UTA - podstawowe założenia i notacja

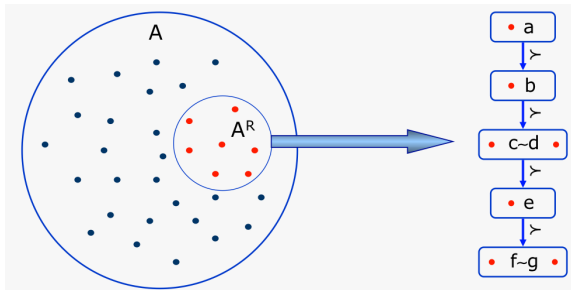
- G_i - dziedzina kryterium g_i (G_i jest skończona lub policzalna),
- $G = \prod_{i=1}^n G_i$ jest przestrzenią ocen,
- $x, y \in G$ są profilami akcji w przestrzeni ocen
- $\succeq$ - jest relacją *słabej preferencji (przewyższania)* na G , dla każdego $x, y \in G$:
 $x \succeq y \Leftrightarrow$ „ x jest co najmniej tak dobre jak y ”
 $x \succ y \equiv [x \succeq y \wedge \neg y \succeq x] \Leftrightarrow$ „ x jest *preferowane* nad y ”
 $x \sim y \equiv [x \succeq y \wedge y \succeq x] \Leftrightarrow$ „ x jest *nierozróżnialne* z y ”
- $x_i, y_i \in G_i$ są ocenami na kryterium g_i ,
- $G_i = [\alpha_i, \beta_i]$ jest zbiorem wartości kryterium g_i , $\alpha_i \leq \beta_i$,
 $i = 1, \dots, n$, gdzie α_i i β_i są najlepszą i najgorszą oceną na kryterium g_i

Zasada regresji porządkowej i metoda UTA

- informacją preferencyjną jest częściowy preporządek ustalony na podzbiorze referencyjnym akcji $A^R \subseteq A$,
- model preferencji ma postać funkcji addytywnej (użyteczności), dla każdej $a \in A$ zdefiniowanej jako:

$$U(a) = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)], \quad (5)$$

gdzie u_i jest niemalejącą funkcją cząstkową wartości



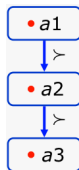
Zasada regresji porządkowej i metoda UTA

przykład

- niech $A^R = \{a_1, a_2, a_3\}$, $G = \{g_1 \uparrow, g_2 \uparrow\}$
- oceny akcji referencyjnych na kryteriach g_1 , g_2 wyraża tabela:

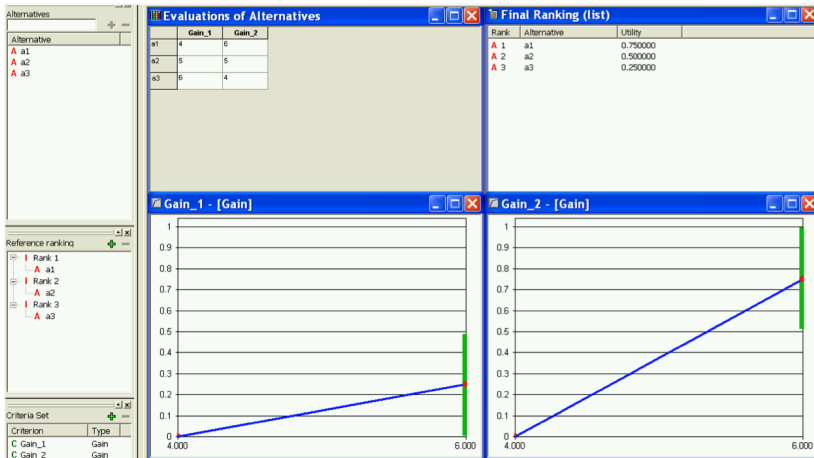
	Gain_1	Gain_2
a1	4	6
a2	5	5
a3	6	4

- ranking referencyjny wygląda natomiast w następujący sposób:



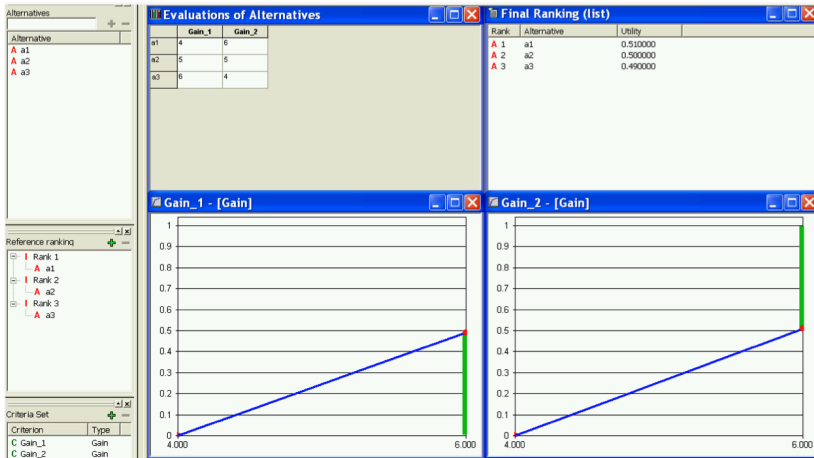
Zasada regresji porządkowej i metoda UTA

przykład



Zasada regresji porządkowej i metoda UTA

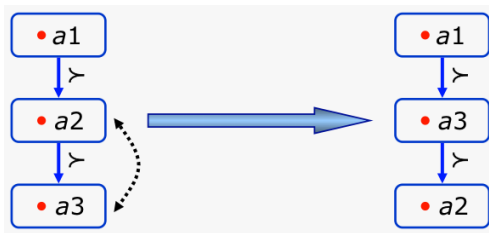
przykład



Zasada regresji porządkowej i metoda UTA

przykład

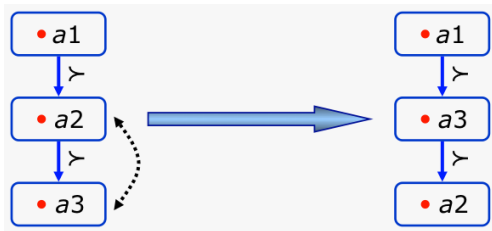
- gdy jednak zmienimy ranking referencyjny:



Zasada regresji porządkowej i metoda UTA

przykład

- gdy jednak zmienimy ranking referencyjny:



- okaże się, że liniowe funkcje użyteczności cząstkowej u_1 i u_2 nie wystarczają do wyrażenia globalnej użyteczności U odtwarzającej ten ranking

Zasada regresji porządkowej i metoda UTA

przykład

- funkcje użyteczności odtwarzające ranking $a_1 \succ a_3 \succ a_2$ nie mogą być liniowe:

	Gain_1	Gain_2
a1	4	6
a2	5	5
a3	6	4

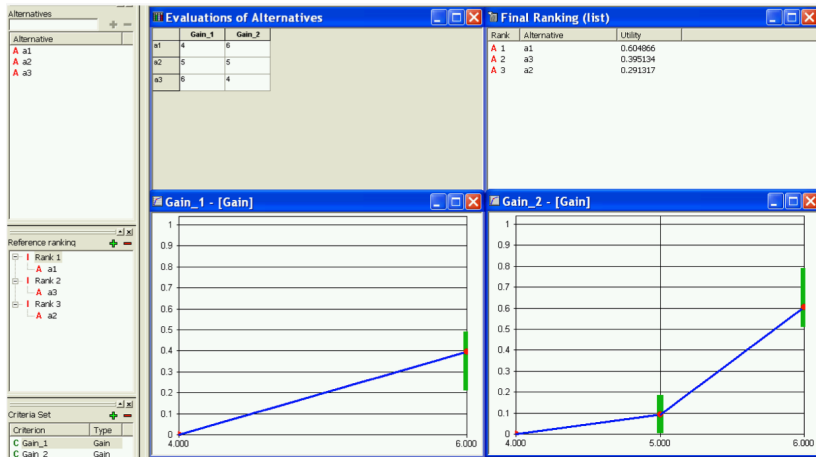
$$u_1 = k_1 \times \text{Gain}_1, \quad u_2 = k_2 \times \text{Gain}_2, \quad U = u_1 + u_2$$

For $a_1 \succ a_3$, $k_2 > k_1$,

but for $a_3 \succ a_2$, $k_1 > k_2$,

Zasada regresji porządkowej i metoda UTA

przykład



Metoda UTA (Jacquet-Lagreze & Siskos)

- addytywna funkcja użyteczności na A : dla każdego $a \in A$

$$U(a) = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)],$$

gdzie u_i są niemalejącymi (monotonicznymi) funkcjami użyteczności cząstkowej $u_i : G_i \rightarrow \mathbb{R}, \forall i \in I$

Metoda UTA (Jacquet-Lagreve & Siskos)

- addytywna funkcja użyteczności na A : dla każdego $a \in A$

$$U(a) = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)],$$

gdzie u_i są niemalejącymi (monotonicznymi) funkcjami użyteczności cząstkowej $u_i : G_i \rightarrow \mathbb{R}, \forall i \in I$

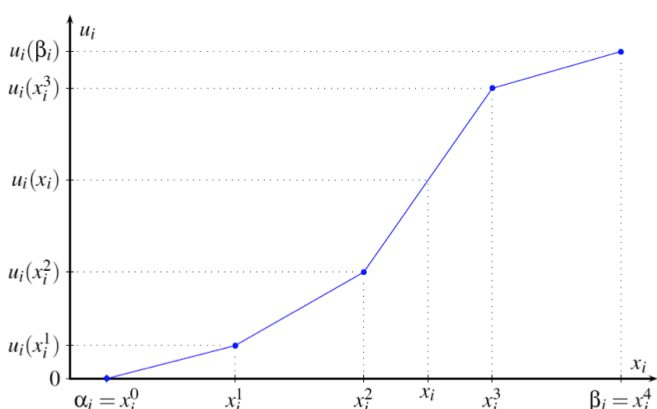
- przedziały $[\alpha_i, \beta_i]$ są podzielone na γ_i równych podprzedziałów z punktami końcowymi ($i \in I$)

$$x_i^j = \alpha_i + \frac{j-1}{\gamma_i-1}(\beta_i - \alpha_i), j = 1, \dots, \gamma_i \quad (5)$$

Metoda UTA (Jacquet-Lagreve & Siskos)

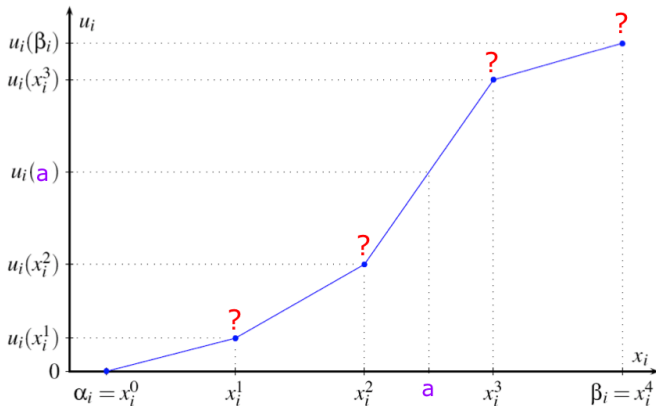
w metodzie UTA wartość cząstkowa akcji $a \in A$ jest przybliżana poprzez interpolację liniową: dla $g_i(a) = x_i \in [x_i^j, x_i^{j+1}]$

$$u_i[g_i(a)] = u_i(x_i) = u_i(x_i^j) + \frac{x_i - x_i^j}{x_i^{j+1} - x_i^j} [u_i(x_i^{j+1}) - u_i(x_i^j)] \quad (5)$$

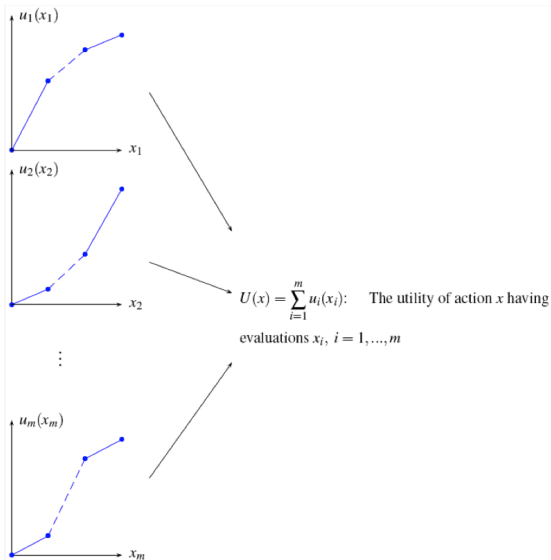


Metoda UTA (Jacquet-Lagreze & Siskos)

- skala, na której jest wyrażona $u_i(a)$ wygląda następująco:



Metoda UTA (Jacquet-Lagreze & Siskos)



Metoda UTA (Jacquet-Lagrange & Siskos)

Funkcje użyteczności częściowej (a właściwie punkty charakterystyczne tych funkcji) są wyznaczone przez rozwiązanie następującego problemu LP

$$\text{Min} \rightarrow E^{UTA} = \sum_{a \in A^R} (\sigma^+(a) + \sigma^-(a))$$

Metoda UTA (Jacquet-Lagreze & Siskos)

Funkcje użyteczności częściowej (a właściwie punkty charakterystyczne tych funkcji) są wyznaczone przez rozwiązanie następującego problemu LP

$Min \rightarrow E^{UTA} = \sum_{a \in A^R} (\sigma^+(a) + \sigma^-(a))$ przy ograniczeniach:

$$\left. \begin{array}{l} U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) \geq U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) + \epsilon \\ \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) = U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) \\ \Leftrightarrow a \sim b \end{array} \right\} \forall a, b \in A^R$$

Metoda UTA (Jacquet-Lagreve & Siskos)

Funkcje użyteczności częściowej (a właściwie punkty charakterystyczne tych funkcji) są wyznaczone przez rozwiązanie następującego problemu LP

$Min \rightarrow E^{UTA} = \sum_{a \in A^R} (\sigma^+(a) + \sigma^-(a))$ przy ograniczeniach:

$$\left. \begin{array}{l} U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) \geq U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) + \epsilon \\ \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) = U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) \\ \Leftrightarrow a \sim b \end{array} \right\} \forall a, b \in A^R$$

$$u_i(x_i^{j+1}) - u_i(x_i^j) \geq 0, j = 0, \dots, \gamma - 1; \forall i \in I$$

Metoda UTA (Jacquet-Lagreve & Siskos)

Funkcje użyteczności częściowej (a właściwie punkty charakterystyczne tych funkcji) są wyznaczone przez rozwiązanie następującego problemu LP

$Min \rightarrow E^{UTA} = \sum_{a \in A^R} (\sigma^+(a) + \sigma^-(a))$ przy ograniczeniach:

$$\left. \begin{array}{l} U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) \geq U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) + \epsilon \\ \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) = U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) \\ \Leftrightarrow a \sim b \end{array} \right\} \forall a, b \in A^R$$

$$u_i(x_i^{j+1}) - u_i(x_i^j) \geq 0, j = 0, \dots, \gamma - 1; \forall i \in I$$

$$\sum_{i=1}^n u_i(\beta_i) = 1$$

Metoda UTA (Jacquet-Lagrange & Siskos)

Funkcje użyteczności częściowej (a właściwie punkty charakterystyczne tych funkcji) są wyznaczone przez rozwiązanie następującego problemu LP

$Min \rightarrow E^{UTA} = \sum_{a \in A^R} (\sigma^+(a) + \sigma^-(a))$ przy ograniczeniach:

$$\left. \begin{array}{l} U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) \geq U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) + \epsilon \\ \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) = U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) \\ \Leftrightarrow a \sim b \end{array} \right\} \forall a, b \in A^R$$

$$u_i(x_i^{j+1}) - u_i(x_i^j) \geq 0, j = 0, \dots, \gamma - 1; \forall i \in I$$

$$\sum_{i=1}^n u_i(\beta_i) = 1$$

$$u_i(\alpha_i) = 0; \forall i \in I$$

Metoda UTA (Jacquet-Lagrange & Siskos)

Funkcje użyteczności częściowej (a właściwie punkty charakterystyczne tych funkcji) są wyznaczone przez rozwiązanie następującego problemu LP

$Min \rightarrow E^{UTA} = \sum_{a \in A^R} (\sigma^+(a) + \sigma^-(a))$ przy ograniczeniach:

$$\left. \begin{array}{l} U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) \geq U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) + \epsilon \\ \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) = U(b) + \sigma^+(b) - \sigma^-(b) \\ \Leftrightarrow a \sim b \end{array} \right\} \forall a, b \in A^R$$

$$u_i(x_i^{j+1}) - u_i(x_i^j) \geq 0, j = 0, \dots, \gamma - 1; \forall i \in I$$

$$\sum_{i=1}^n u_i(\beta_i) = 1$$

$$u_i(\alpha_i) = 0; \forall i \in I$$

$$u_i(x_i^j) \geq 0, \sigma^+(a) \geq 0, \sigma^-(a) \geq 0; \forall a \in A^R \forall i, j \in I$$

Metoda UTA (Jacquet-Lagrece & Siskos)

- jeśli $E^{UTA*} = 0$ to polyhedron rozwiązań dopuszczalnych dla $u_i(x_i)$ jest niepusty i istnieje co najmniej jedna funkcja użyteczności $U(a)$ kompatybilna z preporządkiem zupełnym referencyjnym zdefiniowanym na A^R

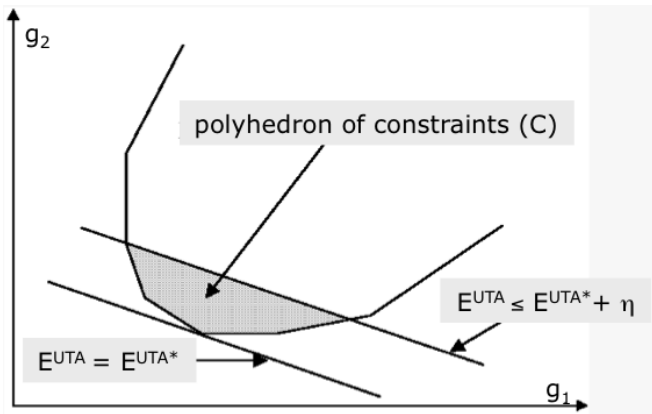
Metoda UTA (Jacquet-Lagrece & Siskos)

- jeśli $E^{UTA*} = 0$ to polyhedron rozwiązań dopuszczalnych dla $u_i(x_i)$ jest niepusty i istnieje co najmniej jedna funkcja użyteczności $U(a)$ kompatybilna z preporządkiem zupełnym referencyjnym zdefiniowanym na A^R
- jeśli $E^{UTA*} \geq 0$ wtedy nie istnieje funkcja użyteczności $U(a)$ kompatybilna z preporządkiem zupełnym referencyjnym zdefiniowanym na A^R

Metoda UTA (Jacquet-Lagreze & Siskos)

- jeśli $E^{UTA*} = 0$ to polyhedron rozwiązań dopuszczalnych dla $u_i(x_i)$ jest niepusty i istnieje co najmniej jedna funkcja użyteczności $U(a)$ kompatybilna z preporządkiem zupełnym referencyjnym zdefiniowanym na A^R
- jeśli $E^{UTA*} \geq 0$ wtedy nie istnieje funkcja użyteczności $U(a)$ kompatybilna z preporządkiem zupełnym referencyjnym zdefiniowanym na A^R - można wtedy wykonać trzy następujące ruchy
 - zwiększyć liczbę przedziałów liniowych γ_i funkcji u_i
 - zrewidować zaproponowany preporządek referencyjny na A^R
 - poszukać najlepszego rozwiązania zgodnie z miarą Kendall'a τ (w przestrzeni $F \leq F^* + \eta$)

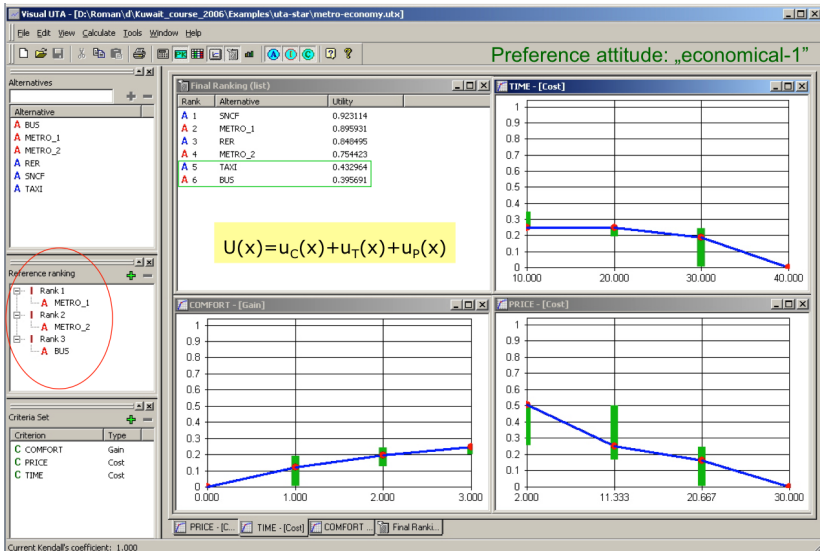
Metoda UTA (Jacquet-Lagreze & Siskos)



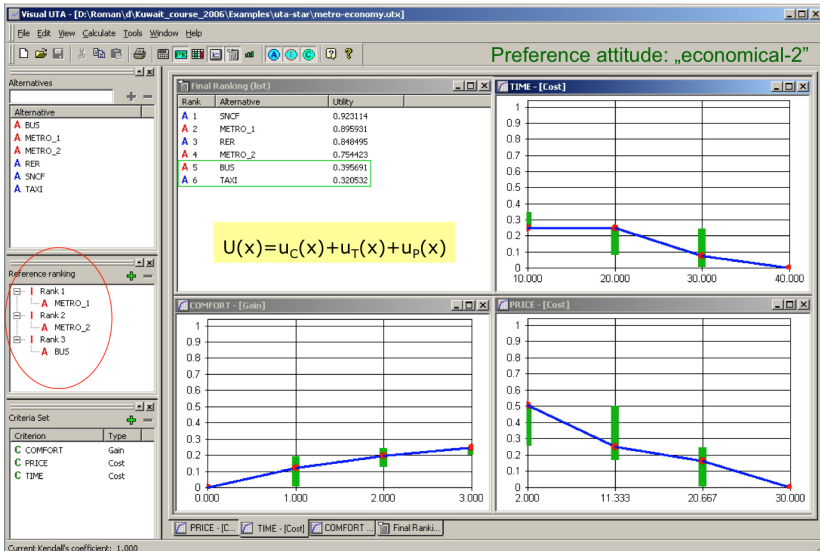
Przykład zastosowania UTA

	PRICE	TIME	COMFORT
RER	3	10	1
METRO1	4	20	2
METRO2	2	20	0
BUS	6	40	0
TAXI	30	30	3
SNCF	3	20	2

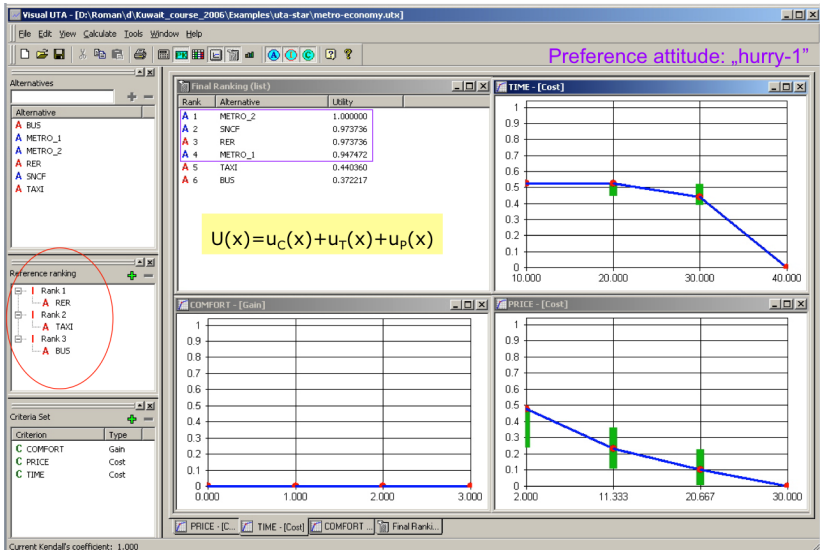
Przykład zastosowania UTA



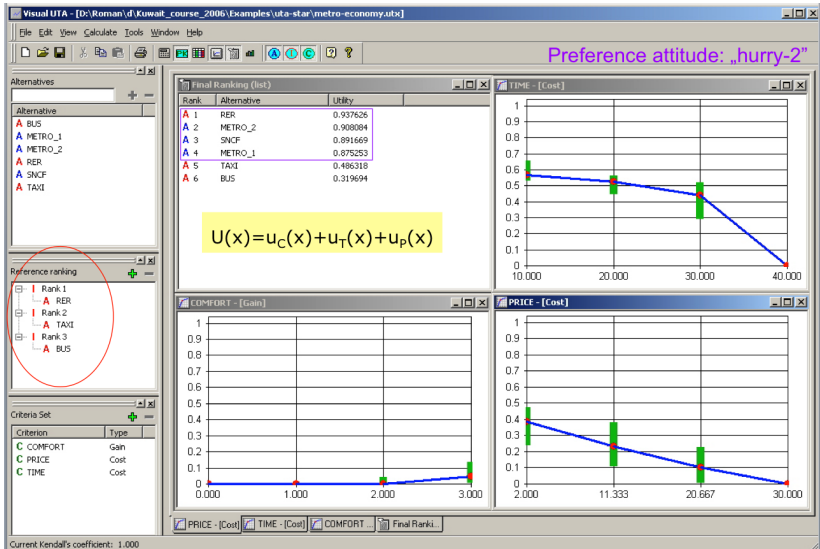
Przykład zastosowania UTA



Przykład zastosowania UTA

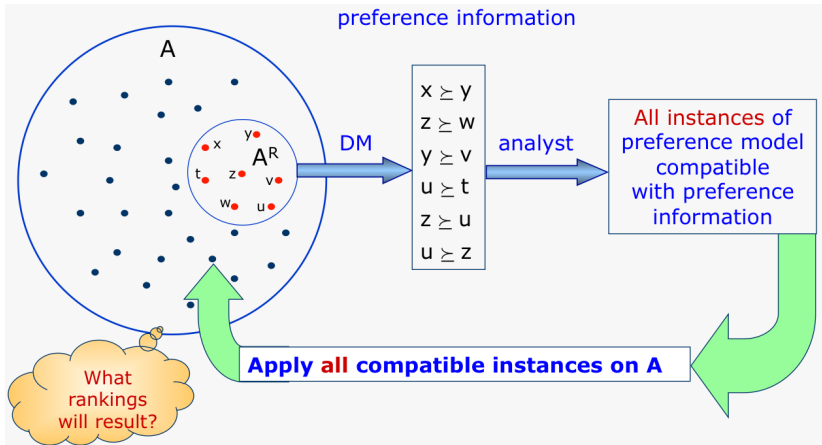


Przykład zastosowania UTA

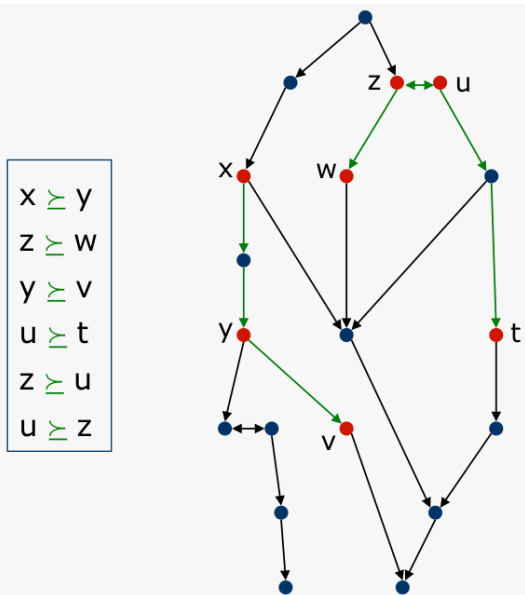


- 1 Wstęp
- 2 Definicja problemu decyzyjnego
- 3 Modelowanie preferencji
- 4 Modele preferencji w postaci funkcji użyteczności
- 5 Metoda UTA
- 6 Metoda UTA^{GMS}

Co by się stało gdybyśmy użyli wszystkie
kompatybilne modele preferencji na
zbiorze akcji A ?



Ranking konieczny (necessary)



Ranking możliwy (possible)

- zawiera ranking konieczny i nie zawiera dopełnienia rankingu koniecznego

Ranking możliwy (possible)

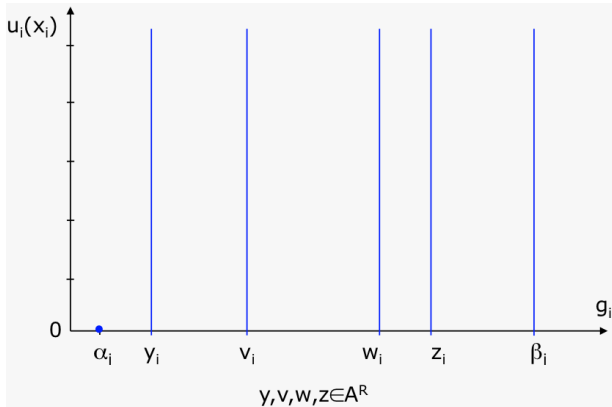
- zawiera ranking konieczny i nie zawiera dopełnienia rankingu koniecznego
- w przypadku braku jakiejkolwiek informacji preferencyjnej:
 - ranking konieczny jest równoważny rankingowi tworzonemu przez słabą relację dominacji
 - ranking możliwy jest relacją zupełną

Ranking możliwy (possible)

- zawiera ranking konieczny i nie zawiera dopełnienia rankingu koniecznego
- w przypadku braku jakiejkolwiek informacji preferencyjnej:
 - ranking konieczny jest równoważny rankingowi tworzonemu przez słabą relację dominacji
 - ranking możliwy jest relacją zupełną
- dla pełnego porównania akcji w parach (preporządku zupełnego na zbiorze A):
 - ranking konieczny jest równoważny (równy) rankingowi możliwemu

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

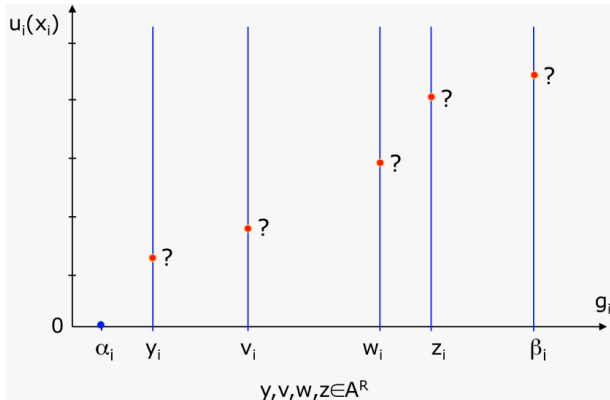
- funkcja użyteczności częściowej $u_i(x_i)$



- punkty charakterystyczne funkcji użyteczności cząstkowej są określone dla *wszystkich* ocen akcji ze zbioru A^R

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

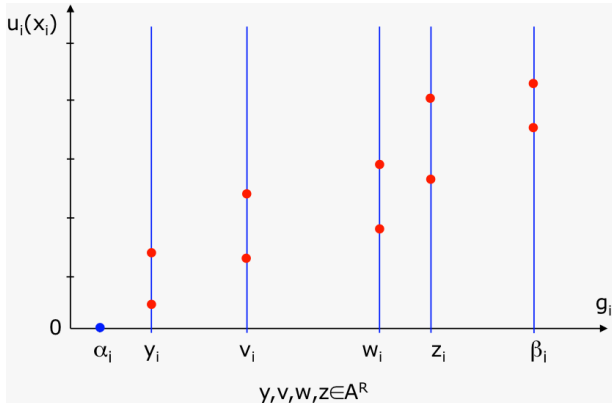
- funkcja użyteczności częściowej $u_i(x_i)$



- wartości funkcji użyteczności częściowej w punktach charakterystycznych są nieznanne

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

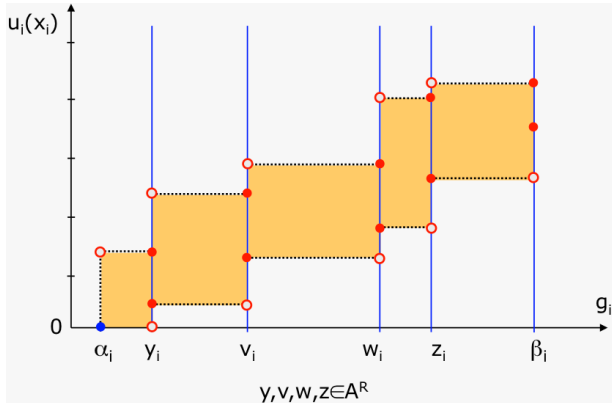
- funkcja użyteczności częściowej $u_i(x_i)$



- są one interwałami dlatego, że rozpatrujemy wszystkie kompatybilne funkcje użyteczności częściowej

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

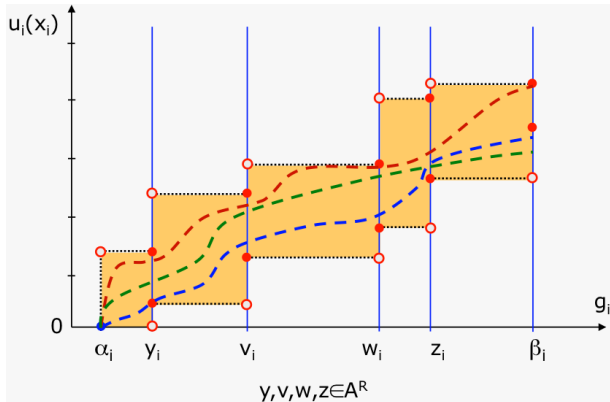
- funkcja użyteczności częściowej $u_i(x_i)$



- wszystkie możliwe wartości funkcji użyteczności częściowej tworzą obszar

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

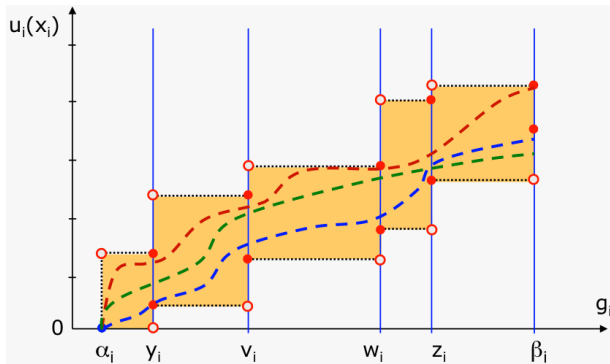
- funkcja użyteczności częściowej $u_i(x_i)$



- w tym obszarze rozważamy jedynie funkcje monotoniczne

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

- funkcja użyteczności częściowej $u_i(x_i)$



- regresja porządkowa powinna więc wyznaczać nie n przedziałami linowych funkcji użyteczności częściowej ale każdą z kompatybilnych funkcji użyteczności

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

- informacją preferencyjną jest preporządek częściowy na podzbiorze akcji referencyjnych $A^R \subseteq A$

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

- informacją preferencyjną jest preporządek częściowy na podzbiorze akcji referencyjnych $A^R \subseteq A$
- $B^R \subseteq A^R \times A^R$ jest zbiorem m par akcji referencyjnych porównanych przez użytkownika

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

- informacją preferencyjną jest preporządek częściowy na podzbiorze akcji referencyjnych $A^R \subseteq A$
- $B^R \subseteq A^R \times A^R$ jest zbiorem m par akcji referencyjnych porównanych przez użytkownika
- funkcja jest nazywana kompatybilną, jeśli można na jej podstawie odtworzyć wszystkie porównania parami z B^R

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

- informacją preferencyjną jest preporządek częściowy na podzbiorze akcji referencyjnych $A^R \subseteq A$
- $B^R \subseteq A^R \times A^R$ jest zbiorem m par akcji referencyjnych porównanych przez użytkownika
- funkcja jest nazywana kompatybilną jeśli można na jej podstawie odtworzyć wszystkie porównania parami z B^R
- w rezultacie uzyskujemy *dwa rankingi* (porządki) na A takie, że dla każdej z par akcji $(a, b) \in A$:
 - w *rankingu koniecznym* (necessary) będącym preporządkiem częściowym: a jest co najmniej tak wysoko jak b wtedy, i tylko wtedy, gdy $U(a) \geq U(b)$ dla wszystkich kompatybilnych funkcji użyteczności

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

- informacją preferencyjną jest preporządek częściowy na podzbiorze akcji referencyjnych $A^R \subseteq A$
- $B^R \subseteq A^R \times A^R$ jest zbiorem m par akcji referencyjnych porównanych przez użytkownika
- funkcja jest nazywana kompatybilną jeśli można na jej podstawie odtworzyć wszystkie porównania parami z B^R
- w rezultacie uzyskujemy *dwa rankingi* (porządki) na A takie, że dla każdej z par akcji $(a, b) \in A$:
 - w *rankingu koniecznym* (necessary) będącym preporządkiem częściowym: a jest co najmniej tak wysoko jak b wtedy, i tylko wtedy, gdy $U(a) \geq U(b)$ dla wszystkich kompatybilnych funkcji użyteczności
 - w *rankingu możliwym* (possible) będącym preporządkiem zupełnym: a jest co najmniej tak wysoko jak b wtedy, i tylko wtedy, gdy $U(a) \geq U(b)$ dla co najmniej jednej kompatybilnej funkcji użyteczności

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

funkcją użyteczności kompatybilną z porządkiem A^R jest funkcja $U(x) = \sum_{i=1}^n U_i(x_i)$ spełniającą ograniczenia:

$$\left. \begin{array}{l} U(a) \geq U(b) + \epsilon \quad \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) = U(b) \quad \Leftrightarrow a \sim b \end{array} \right\} \forall (a, b) \in B^R$$

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

funkcją użyteczności kompatybilną z porządkiem A^R jest funkcja $U(x) = \sum_{i=1}^n U_i(x_i)$ spełniającą ograniczenia:

$$\left. \begin{array}{l} U(a) \geq U(b) + \epsilon \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) = U(b) \Leftrightarrow a \sim b \end{array} \right\} \forall (a, b) \in B^R$$

$$u_i[g_i(a_{\tau_i(j)})] - u_i[g_i(a_{\tau_i(j-1)})] \geq 0, \quad \forall i \in I, j = 2, \dots, m$$

$$u_i[g_i(a_{\tau_i(j)})] \geq 0, u_i[g_i(a_{\tau_i(m)})] \geq u_i(\beta_i), \quad \forall i \in I$$

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

funkcją użyteczności kompatybilną z porządkiem A^R jest funkcja $U(x) = \sum_{i=1}^n U_i(x_i)$ spełniającą ograniczenia:

$$\left. \begin{aligned} U(a) &\geq U(b) + \epsilon && \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) &= U(b) && \Leftrightarrow a \sim b \end{aligned} \right\} \forall (a, b) \in B^R$$

$$u_i[g_i(a_{\tau_i(j)})] - u_i[g_i(a_{\tau_i(j-1)})] \geq 0, \quad \forall i \in I, j = 2, \dots, m$$

$$u_i[g_i(a_{\tau_i(j)})] \geq 0, u_i[g_i(a_{\tau_i(m)})] \geq u_i(\beta_i), \quad \forall i \in I$$

$$u_i(\alpha_i) = 0, \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} u_i(\beta_i) = 1$$

ϵ jest małą stałą dodatnią a τ_i jest permutacją indeksów akcji:

$$g_i(a_{\tau_i(1)}) \leq g_i(a_{\tau_i(2)}) \leq \dots \leq g_i(a_{\tau_i(m)}), \quad \forall a_{\tau_i(1)} \in A^R$$

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

dla każdej z par akcji $(x, y) \in A$ preferencja x nad y i informacji preferencyjnej B^R jest wyznaczana przez funkcje kompatybilne U spełniające zbiór ograniczeń:

$$\left. \begin{array}{l} U(a) \geq U(b) + \epsilon \Leftrightarrow a \succ b \\ U(a) = U(b) \Leftrightarrow a \sim b \end{array} \right\} \forall (a, b) \in B^R$$

$$u_i(g_i^j) - u_i(g_i^{j-1}) \geq 0, \quad \forall i \in I, j = 1, \dots, \omega + 1$$

$$u_i(g_i^0) = 0, \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} u_i(g_i^{\omega+1}) = 1$$

g_i^j są punktami charakterystycznymi funkcji u_i :

$$g_i^0 = \alpha_i, \quad g_i^j = g_i(a_{\pi_i(j)}), \quad \text{for} \quad j = 1, \dots, \omega, \quad g_i^{\omega+1} = \beta_i,$$

Metoda UTA^{GMS} (Greco, Mousseau i Słowiński)

$$u_i(g_i^j) - u_i(g_i^{j-1}) \geq 0, \quad \forall i \in I, j = 1, \dots, \omega + 1$$

$$u_i(g_i^0) = 0, \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{i \in I} u_i(g_i^{\omega+1}) = 1$$

g_i^j są punktami charakterystycznymi funkcji u_i :

$$g_i^0 = \alpha_i, \quad g_i^j = g_i(a_{\pi_i(j)}), \quad \text{for } j = 1, \dots, \omega, \quad g_i^{\omega+1} = \beta_i,$$

gdzie permutacja π_i indeksów akcji $a_{\pi_i(j)} \in A^R \cup \{x, y\}$ jest taka, że:

$$g_i(a_{\pi_i(1)}) \leq g_i(a_{\pi_i(2)}) \leq \dots \leq g_i(a_{\pi_i(\omega)}), \quad \omega = |A^R \cup \{x, y\}|$$

Wyniki metody UTA^{GMS}

- $\succeq^N$ jest *konieczną* (necessary) relacją preferencji

Wyniki metody UTA^{GMS}

- $\succeq^N$ jest *konieczną* (necessary) relacją preferencji
- dla każdej pary $x, y \in A$

$$x \succeq^N y \Leftrightarrow d(x, y) \geq 0,$$

gdzie

$$d(x, y) = \text{Min}_{s.t.E(x,y)} \{U(x) - U(y)\}$$

Wyniki metody UTA^{GMS}

- $\succeq^N$ jest *konieczną* (necessary) relacją preferencji
- dla każdej pary $x, y \in A$

$$x \succeq^N y \Leftrightarrow d(x, y) \geq 0,$$

gdzie

$$d(x, y) = \text{Min}_{s.t. E(x,y)} \{U(x) - U(y)\}$$

- $d(x, y) \geq 0$ oznacza, że dla *wszystkich* kompatybilnych funkcji użyteczności x jest co najmniej tak dobra jak y

Wyniki metody UTA^{GMS}

- $\succeq^N$ jest *konieczną* (necessary) relacją preferencji
- dla każdej pary $x, y \in A$

$$x \succeq^N y \Leftrightarrow d(x, y) \geq 0,$$

gdzie

$$d(x, y) = \text{Min}_{s.t.E(x,y)} \{U(x) - U(y)\}$$

- $d(x, y) \geq 0$ oznacza, że dla *wszystkich* kompatybilnych funkcji użyteczności x jest co najmniej tak dobra jak y
- dla $x, y \in A^R$:

$$x \succeq y \Leftrightarrow x \succeq^N y$$

Wyniki metody UTA^{GMS}

- $\succeq^P$ jest *możliwą* (possible) relacją preferencji

Wyniki metody UTA^{GMS}

- $\succeq^P$ jest *możliwą* (possible) relacją preferencji
- dla każdej pary $x, y \in A$

$$x \succeq^P y \Leftrightarrow D(x, y) \geq 0,$$

gdzie

$$D(x, y) = \text{Max}_{s.t. E(x,y)} \{U(x) - U(y)\}$$

Wyniki metody UTA^{GMS}

- $\succeq^P$ jest *możliwą* (possible) relacją preferencji
- dla każdej pary $x, y \in A$

$$x \succeq^P y \Leftrightarrow D(x, y) \geq 0,$$

gdzie

$$D(x, y) = \text{Max}_{s.t. E(x,y)} \{U(x) - U(y)\}$$

- $D(x, y) \geq 0$ oznacza, że dla *co najmniej jednej* kompatybilnej funkcji użyteczności x jest co najmniej tak dobra jak y

Wyniki metody UTA^{GMS}

- $\succeq^P$ jest *możliwą* (possible) relacją preferencji
- dla każdej pary $x, y \in A$

$$x \succeq^P y \Leftrightarrow D(x, y) \geq 0,$$

gdzie

$$D(x, y) = \text{Max}_{s.t. E(x,y)} \{U(x) - U(y)\}$$

- $D(x, y) \geq 0$ oznacza, że dla *co najmniej jednej* kompatybilnej funkcji użyteczności x jest co najmniej tak dobra jak y
- dla $x, y \in A^R$:

$$x \succ y \Rightarrow \neg y \succeq^P x$$

Wyniki metody UTA^{GMS}

własności relacji $\preceq^N$ i $\preceq^P$

- $x \preceq^N y \Rightarrow x \preceq^P y$

Wyniki metody UTA^{GMS}

własności relacji $\preceq^N$ i $\preceq^P$

- $x \preceq^N y \Rightarrow x \preceq^P y$
- $\preceq^N$ jest preporządkiem częściowym (to znaczy, że $\preceq^N$ jest zwrotna i przechodnia)

Wyniki metody UTA^{GMS}

własności relacji $\succeq^N$ i $\succeq^P$

- $x \succeq^N y \Rightarrow x \succeq^P y$
- $\succeq^N$ jest preporządkiem częściowym (to znaczy, że $\succeq^N$ jest zwrotna i przechodnia)
- $\succeq^P$ jest preporządkiem silnie zupełnym (to znaczy, że $\forall x, y \in A, x \succeq^P y$ lub $y \succeq^P x$) i negatywnie przechodnim (to znaczy, że $\forall x, y \in A, \neg x \succeq^P y$ i $\neg y \succeq^P z \Rightarrow \neg x \succeq^P z$), w ogólności $\succeq^P$ nie jest przechodnia

Wyniki metody UTA^{GMS}

własności relacji $\succeq^N$ i $\succeq^P$

- $x \succeq^N y \Rightarrow x \succeq^P y$
- $\succeq^N$ jest preporządkiem częściowym (to znaczy, że $\succeq^N$ jest zwrotna i przechodnia)
- $\succeq^P$ jest preporządkiem silnie zupełnym (to znaczy, że $\forall x, y \in A, x \succeq^P y$ lub $y \succeq^P x$) i negatywnie przechodnim (to znaczy, że $\forall x, y \in A, \neg x \succeq^P y$ i $\neg y \succeq^P z \Rightarrow \neg x \succeq^P z$), w ogólności $\succeq^P$ nie jest przechodnia
- $d(x, y) = \text{Min}\{U(x) - U(y)\} = -\text{Max}\{-[U(x) - U(y)]\} = \text{Max}\{U(x) - U(y)\} = -D(x, y)$

Tworzenie rankingów końcowych UTA^{GMS}

- dla wszystkich relacji *koniecznych* będących preporządkami częściowymi zachodzi:
 - preferencja: $x \succ^N y$ jeżeli $x \succeq^N y$ i $\neg y \succeq^N x$
 - nierozróżnialność: $x \sim^N y$ jeżeli $x \succeq^N y$ i $y \succeq^N x$
 - nieporównywalność: $x ? y$ jeżeli $\neg x \succeq^N y$ i $\neg y \succeq^N x$

Tworzenie rankingów końcowych UTA^{GMS}

- dla wszystkich relacji *możliwych* będących preporządkami zupełnymi zachodzi:
 - preferencja: $x \succ^P y$ jeżeli $x \succeq^P y$ i $\neg y \succeq^P x$
 - nierozróżnialność: $x \sim^P y$ jeżeli $x \succeq^P y$ i $y \succeq^P x$

Tworzenie rankingów końcowych UTA^{GMS}

		$y \succeq^N x$		$not\ y \succeq^N x$
		$d(y,x) > 0$	$d(y,x) = 0$	$d(y,x) < 0$
$x \succeq^N y$	$d(x,y) > 0$			$x \succ^N y$
	$d(x,y) = 0$		$x \sim^N y$	$x \succ^N y$
$not\ x \succeq^N y$	$d(x,y) < 0$	$y \succ^N x$	$y \succ^N x$	$x \text{ ? } y$

Tworzenie rankingów końcowych UTA^{GMS}

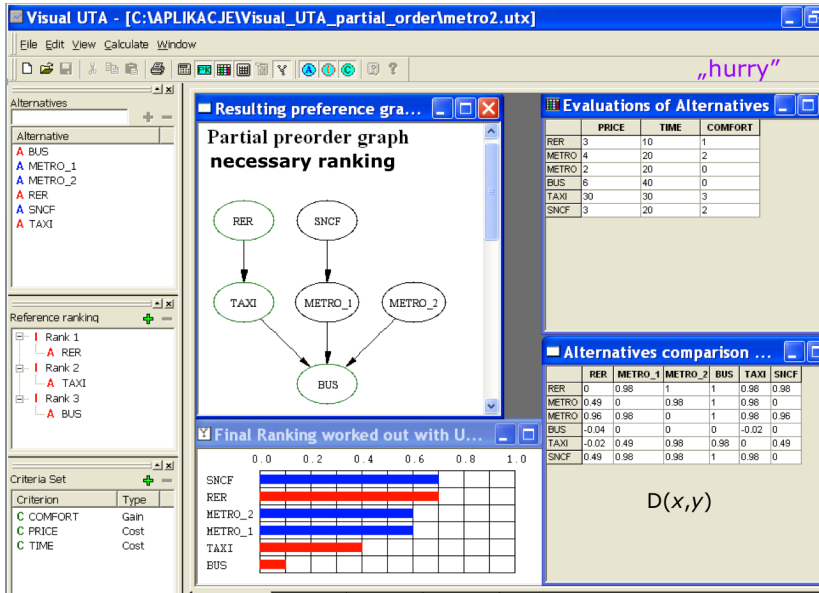
		$y \succeq^P x$		$not\ y \succeq^P x$
		$D(y,x) > 0$	$D(y,x) = 0$	$D(y,x) < 0$
$x \succeq^P y$	$D(x,y) > 0$	$x \sim^P y$	$x \sim^P y$	$x \succ^P y$
	$D(x,y) = 0$	$x \sim^P y$	$x \sim^P y$	
$not\ x \succeq^P y$	$D(x,y) < 0$	$y \succ^P x$		

Przykład zastosowania UTA^{GMS}

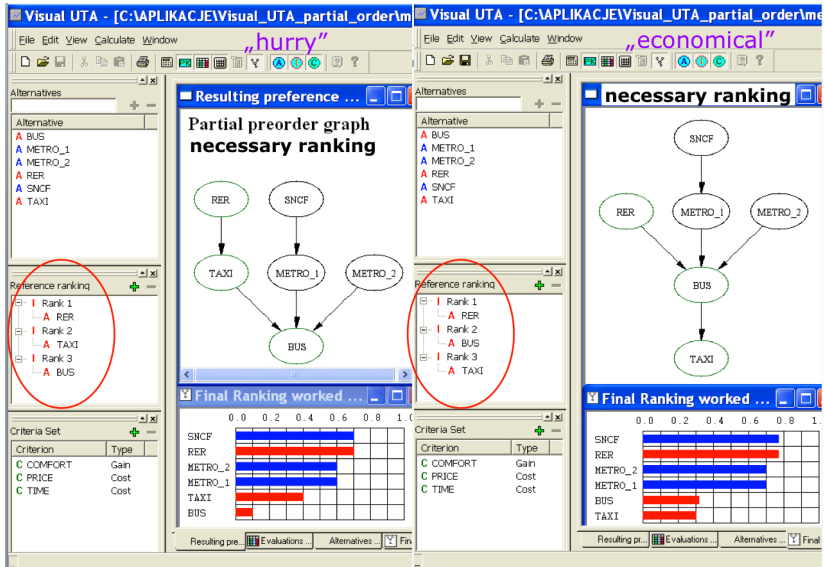
	PRICE	TIME	COMFORT
RER	3	10	1
METRO1	4	20	2
METRO2	2	20	0
BUS	6	40	0
TAXI	30	30	3
SNCF	3	20	2

S.Greco, V.Mousseau, R.Słowiński: *Ordinal regression revisited: multiple criteria ranking with a set of additive value functions*, European J. Operational Research, 191 (2008) 415-435

Przykład zastosowania UTA^{GMS}



Przykład zastosowania UTA^{GMS}



Przykład zastosowania UTA^{GMS}

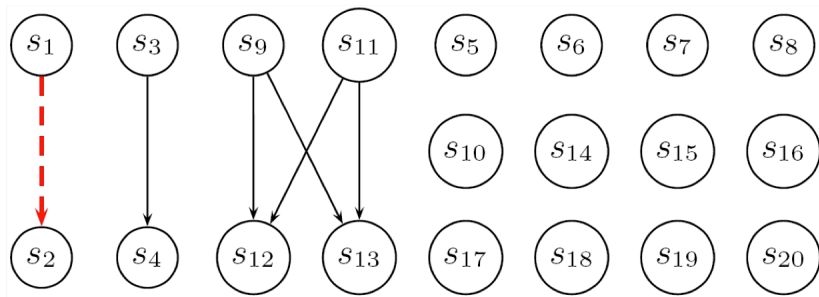
ranking 20 akcji na 5 kryteriach

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}	s_{17}	s_{18}	s_{19}	s_{20}
g_1	2	1	3	0	1	3	0	4	3	3	3	3	3	1	1	4	1	3	3	3
g_2	0	3	1	2	1	3	0	4	0	4	1	2	3	0	3	1	2	1	2	2
g_3	0	0	1	1	4	2	3	1	3	3	3	3	3	1	1	4	1	3	3	3
g_4	5	5	4	4	4	3	3	2	2	3	1	1	1	3	1	1	2	4	0	1
g_5	3	2	3	2	2	3	3	0	3	0	4	2	1	3	4	2	3	2	3	1

brak dominacji pomiędzy akcjami!

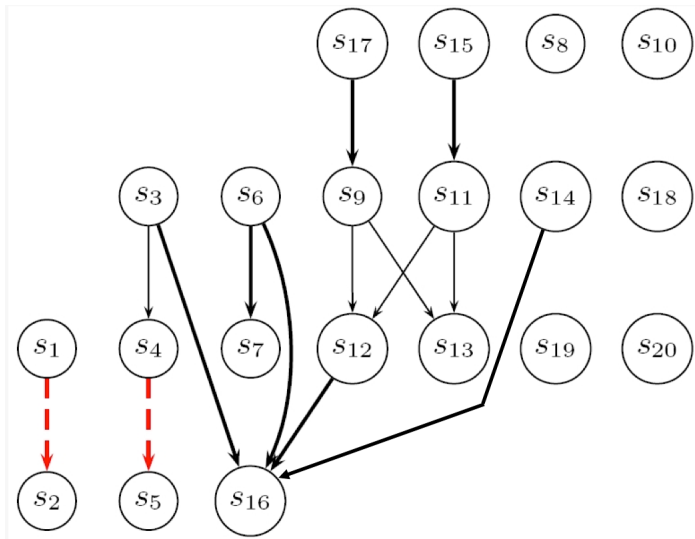
Przykład zastosowania UTA^{GMS}

pierwsza iteracja



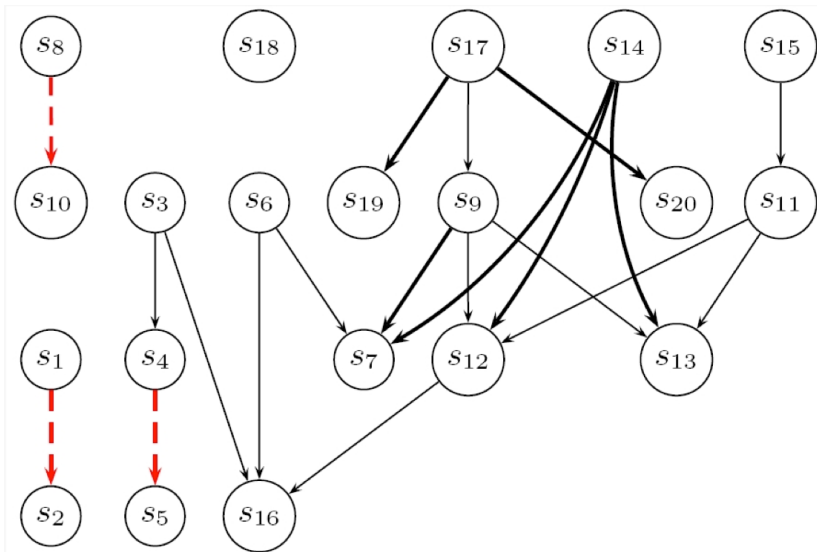
Przykład zastosowania UTA^{GMS}

druga iteracja



Przykład zastosowania UTA^{GMS}

trzecia iteracja



Pytania?

