Testy Z i T

Statystyka i analiza danych 2019

Jurek Błaszczyński,
na podstawie slajdów Wojtka Kotłowskiego

7 kwietnia 2019

Testy Z i T

- **Układ hipotez**:

H_0 :	$\mu = \mu_0$	$(\mu \geq \mu_0)$	$(\mu \leq \mu_0)$
H_1 :	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$
	(dwustronny)	(lewostronny)	(prawostronny)

- **Statystyka testowa**: $Z = Z(X_1, \ldots, X_n)$
- **Obszar (zbiór) krytyczny**:

test	dwustronny	lewostronny	prawostronny
C_{kr}	$(-\infty, -z_{\mathrm{kr}}) \cup (z_{\mathrm{kr}}, \infty)$	$(-\infty, -z_{\mathrm{kr}})$	$(z_{\mathrm{kr}}, \infty)$

- **Decyzja**:

Jeśli $Z \in C_{\mathrm{kr}}$, odrzucamy H_0 na rzecz H_1.
Jeśli $Z \notin C_{\mathrm{kr}}$, brak podstaw do odrzucenia H_0.

Test Z – znana wariancja

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \ \sim \ N(0,1).$$

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- Test dwustronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

Test Z – duża próba ($n \geq 30$)

Wariancja σ^2 nieznana, więc estymujemy:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad \text{(również oznaczane } \hat{\sigma}^2\text{)}$$

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \;\sim\; N(0,1).$$

(przybliżenie, ale dość dokładne dla $n \geq 30$)

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- Test dwustronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

Test T – mała próba ($n < 30$)

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \ \sim \ t(n-1), \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

gdzie $t(n-1)$ to rozkład **t-Studenta z** $n-1$ **stopniami swobody**.

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $t_{\mathrm{kr}} = t^{-1}(1-\alpha;\ n-1)$
- Test dwustronny: $t_{\mathrm{kr}} = t^{-1}\big(1-\frac{\alpha}{2};\ n-1\big)$

Uzasadnienie

Definicja - Rozkład χ^2_n
Zmienna Y ma rozkład χ^2_n jeśli $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, gdzie $X_1, \ldots, X_n \sim N(0,1)$ i.i.d.

Uzasadnienie

Definicja - Addytywność rozkładu χ^2
Suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie χ^2 z n_1 i n_2 stopniami swobody ma rozkład χ^2 o $n_1 + n_2$ stopniach swobody.

Uzasadnienie

Dla próby losowej z rozkładu normalnego:

1. zmienna $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ ma rozkład normalny
2. rozkład zmiennej $\sum \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$ będzie rozkładem χ^2 z n stopniami swobody
3. można pokazać, że zmienna $\sum \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$ ma rozkład χ^2 z $n-1$ stopniami swobody

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Uzasadnienie

Definicja - Rozkład $t - Studenta$
Jeśli zmienna Z ma rozkład standardowy normalny, a zmienna χ^2 rozkład χ^2_n (z n stopniami swobody) oraz obie zmienne są niezależne to zmienna:

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}}$$

ma rozkład $t - Studenta$ z n stopniami swobody.

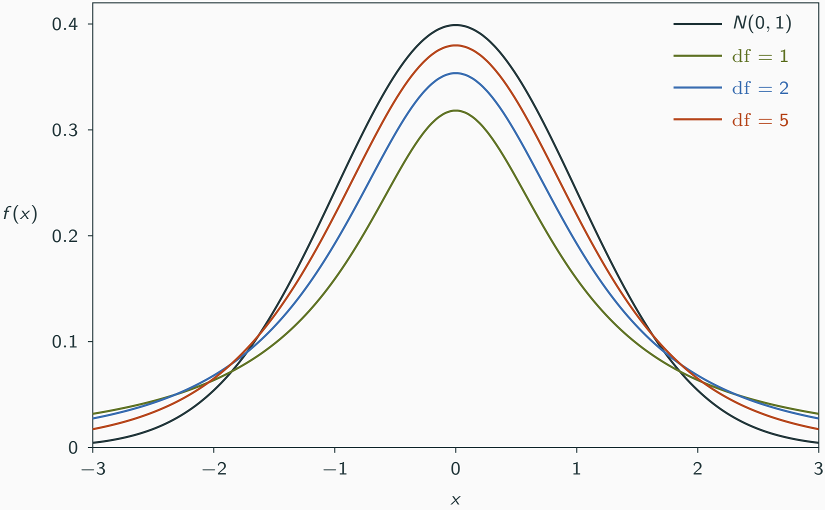
Uzasadnienie

$$T_{n-1} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}}} = \tag{1}$$

$$= \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \sqrt{(n-1) \cdot \frac{\sigma^2}{(n-1)s^2}} = \tag{2}$$

$$= \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{s^2}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sigma}{s} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{s}\sqrt{n} \tag{3}$$

Rozkład t



p-wartość

z

α

p-wartość

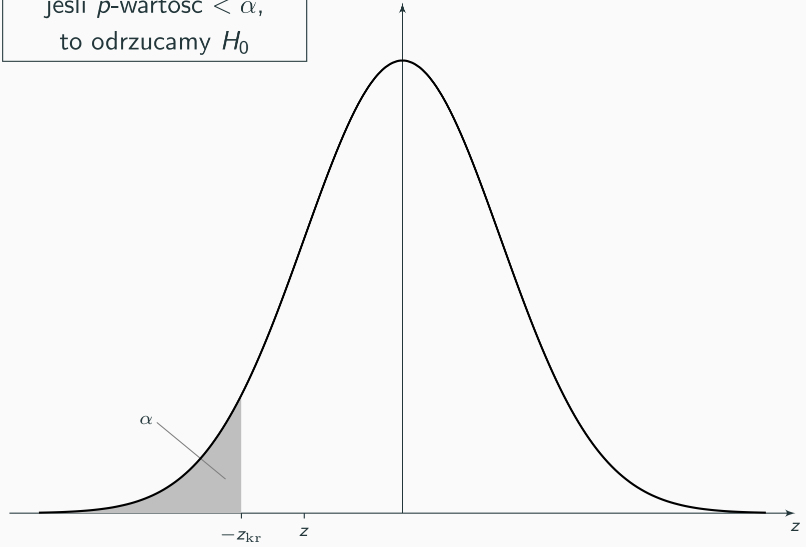
$$\begin{tikzcd}
\boxed{z} & \lessgtr & \boxed{z_{\mathrm{kr}}} \\
& & \boxed{\alpha} \arrow[u, "F^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

p-wartość

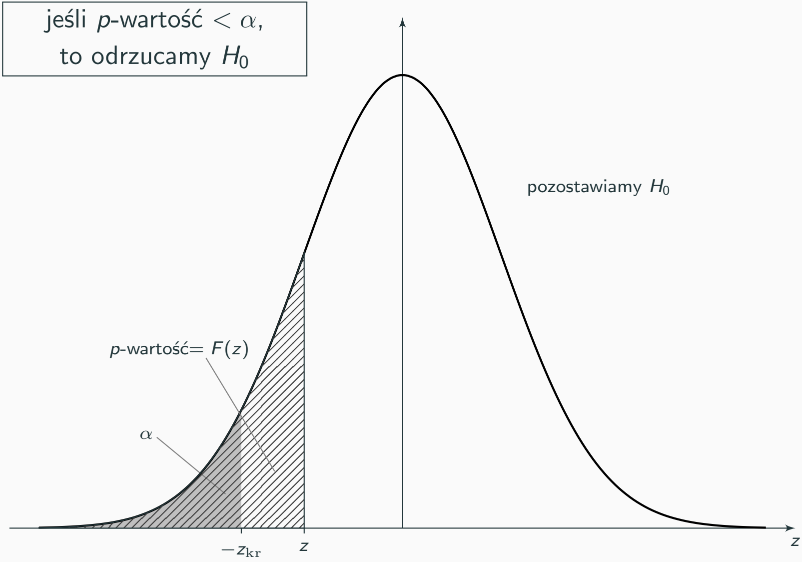
$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{z} \arrow[d, "F"] \arrow[r, phantom, "\lesseqgtr"] & \boxed{z_{\mathrm{kr}}} \\
\boxed{p\text{-wartość}} \arrow[r, phantom, "<"] & \boxed{\alpha} \arrow[u, "F^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

p-**wartość**

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0

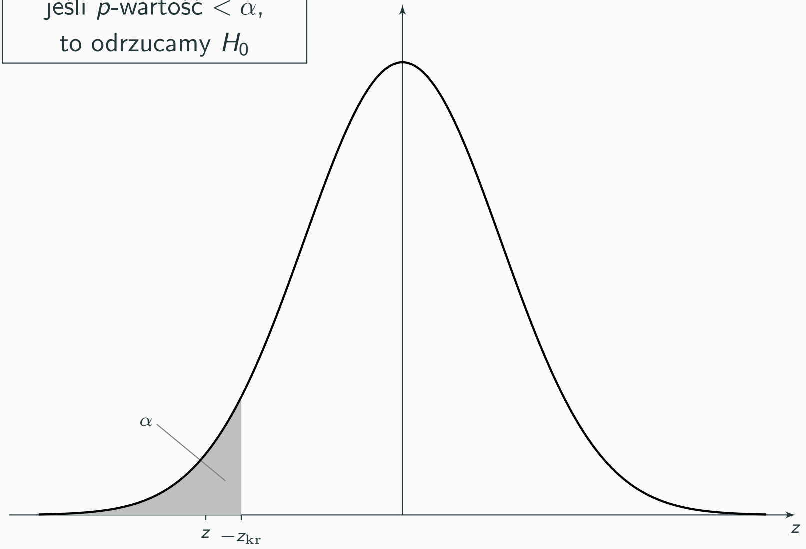


p-wartość


jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0
pozostawiamy H_0
p-wartość$= F(z)$
α
$-z_{\mathrm{kr}}$
z
z

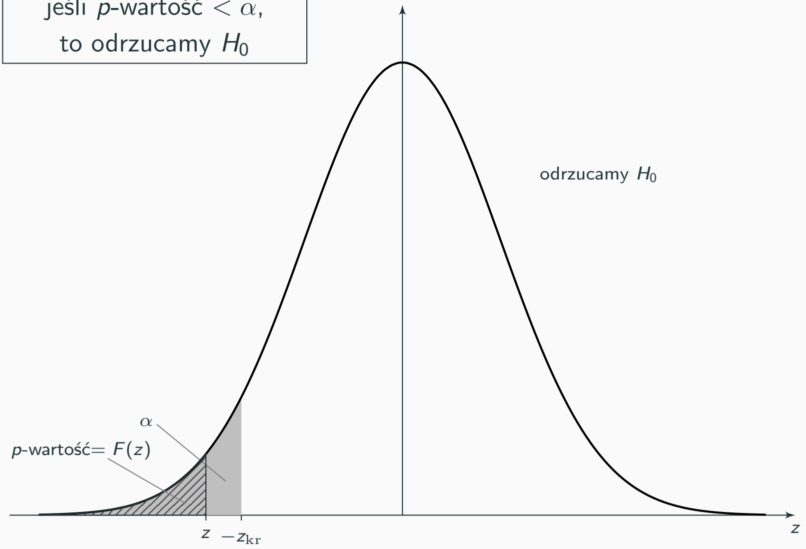
p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



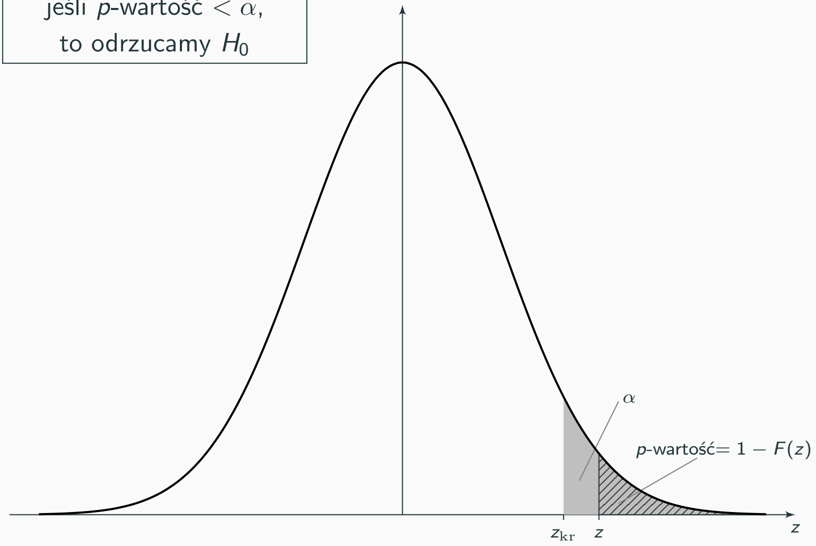
p-wartość

jeśli *p*-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



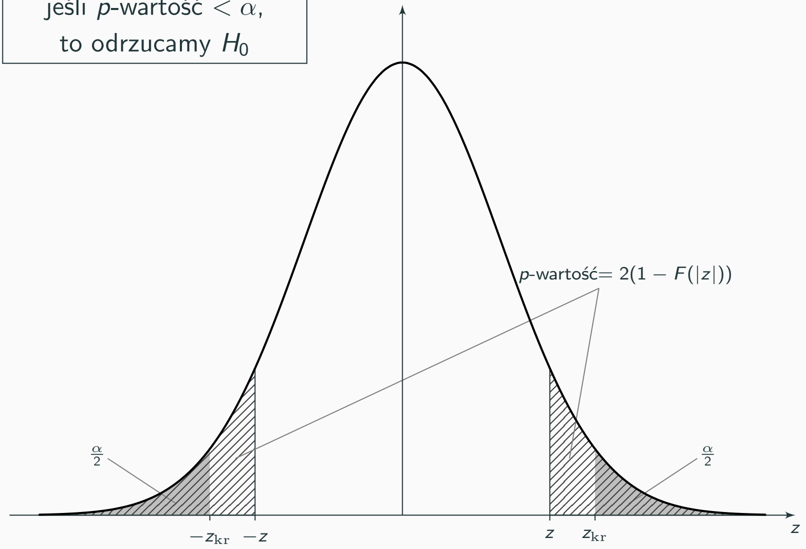
p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



p-wartość

Definicja:

- W teście **lewostronnym**: p-wartość $= F(z)$
- W teście **prawostronnym**: p-wartość $= 1 - F(z)$
- W teście **dwustronnym**: p-wartość $= 2(1 - F(|z|))$

$$\boxed{\text{Jeśli } p\text{-wartość} < \alpha, \text{ odrzucamy } H_0}$$