Testy statystyczne

Statystyka i analiza danych 2019

Jurek Błaszczyński,
na podstawie slajdów Wojtka Kotłowskiego

30 marca 2019

Testy statystyczne

- Testujemy **hipotezę zerową** H_0 wobec **hipotezy alternatywnej** H_1.

  Hipotezy dotyczą jakiegoś parametru rozkładu.
  (zwykle: H_0 – brak „efektu”, H_1 – istnieje jakiś „efekt”)

- Dowód „nie wprost”: zakładamy, że H_0 jest prawdziwe i odrzucamy je na rzecz H_1, tylko jeśli **przy założeniu prawdziwości** H_0 **dane dają wynik niezgodny z oczekiwaniami**.

  Niezgodny z oczekiwaniami = przy założeniu H_0, wynik uzyskany z danych jest **mało prawdopodobny**.

Ogólna postać testów

- **Układ hipotez**:

H_0 :	$\theta = \theta_0$	$(\theta \geq \theta_0)$	$(\theta \leq \theta_0)$
H_1 :	$\theta \neq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$\theta > \theta_0$
	(dwustronny)	(lewostronny)	(prawostronny)

- **Statystyka testowa** $Z = Z(X_1, \ldots, X_n)$
- **Obszar (zbiór) krytyczny** C_{kr}

test	dwustronny	lewostronny	prawostronny
C_{kr}	$(-\infty, -z_{\mathrm{kr}}) \cup (z_{\mathrm{kr}}, \infty)$	$(-\infty, -z_{\mathrm{kr}})$	$(z_{\mathrm{kr}}, \infty)$

- **Decyzja**:

Jeśli $Z \in C_{\mathrm{kr}}$, odrzucamy H_0 na rzecz H_1.
Jeśli $Z \notin C_{\mathrm{kr}}$, brak podstaw do odrzucenia H_0.

Test dla rozkładu dwupunktowego (prawostronny)

$$\begin{array}{ll} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p > p_0 \end{array}$$

- Obserwujemy dane $X_1, \ldots, X_n$ o wartościach w $\{0, 1\}$.
- Jeśli H_0 prawdziwe – spodziewamy się $\overline{X} = \frac{\#\text{sukcesów}}{n} \simeq p_0$.
- Jeśli $\overline{X} \gg p_0$, dane niezgodne z H_0 – odrzucamy na rzecz H_1.

Wniosek: jeśli $\overline{X} - p_0 > c$, odrzucamy H_0. Jak wyznaczyć próg c?

$$\begin{aligned} \alpha \;=\; \Pr(\text{błąd I rodz.}) \;&=\; \Pr_{H_0}(\overline{X} - p_0 > c) \\ &=\; \Pr_{H_0}\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}}_{Z} > \underbrace{\frac{c}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}}_{z_{\mathrm{kr}}} \Bigg) \end{aligned}$$

Test dla rozkładu dwupunktowego (prawostronny)

$$H_0: \quad p = p_0$$
$$H_1: \quad p > p_0$$

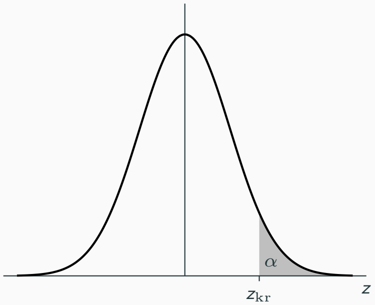
Statystyka testowa: $Z = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \;=\; \frac{S_n - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$.

Jeśli H_0 prawdziwe, z CTG przybliżamy $Z \sim N(0,1)$.

$$\alpha = \Pr_{H_0}(Z > z_{\mathrm{kr}}) = 1 - \Phi(z_{\mathrm{kr}}),$$

$$z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1-\alpha),$$

$$C_{\mathrm{kr}} = (z_{\mathrm{kr}}, \infty).$$



Test dla rozkładu dwupunktowego (dwustronny)

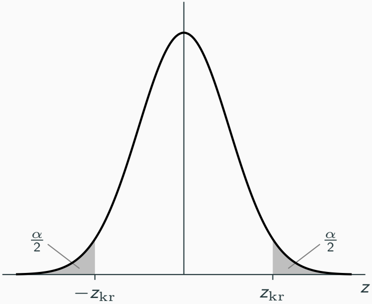
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = p_0 \\ H_1 &: \quad p \neq p_0 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}, \qquad C_{\mathrm{kr}} = (-\infty, -z_{\mathrm{kr}}) \cup (z_{\mathrm{kr}}, \infty).$$

$$\alpha = \Pr_{H_0}(Z > z_{\mathrm{kr}}) + \Pr_{H_0}(Z < -z_{\mathrm{kr}})$$

$$\alpha = 2\big(1 - \Phi(z_{\mathrm{kr}})\big)$$

$$z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$$



Błąd pierwszego i drugiego rodzaju

	prawdziwe H_0	prawdziwe H_1
$Z \notin C_{\mathrm{kr}}$ (nie odrzucamy H_0)	✓	błąd II rodzaju
$Z \in C_{\mathrm{kr}}$ (odrzucamy H_0)	błąd I rodzaju	✓

Błąd pierwszego i drugiego rodzaju

	prawdziwe H_0	prawdziwe H_1
$Z \notin C_{\mathrm{kr}}$ (nie odrzucamy H_0)	✓	błąd II rodzaju
$Z \in C_{\mathrm{kr}}$ (odrzucamy H_0)	błąd I rodzaju	✓

W testach statystycznych kontrolujemy błąd I rodzaju:

$$\Pr_{H_0}(Z \in C_{\mathrm{kr}}) = \alpha \qquad\qquad (\alpha \text{ —poziom istotności}),$$

równocześnie minimalizując błąd II rodzaju $\Pr_{H_1}(Z \notin C_{\mathrm{kr}}) = \beta$.