

Główne problematyki WWD (MCDA)

- MCDA (*multicriteria decision analysis*) definiuje cztery główne problematyki
 - α – „wybór” – wybór najlepszego
 - β – „sortowanie” – przydział do klas jakości
 - γ – „ranking” – porządkowanie od najlepszego do najgorszego
 - δ – „opis” – pozyskiwanie przydatnych charakterystyk
- Problematyki definiowane przez MCDA można podzielić na dwie grupy
 - problematyki porządkujące (α, β, γ)
 - problematyka opisowa (δ)

Aspekty psychologiczne

- Podejmowanie decyzji może występować w różnych sytuacjach decyzyjnych, które można podzielić
 - z jednej strony na:
 - pewne
 - ryzykowne/niepewne
 - z drugiej strony na:
 - konfliktowe
 - niekonfliktowe
- Cechy sytuacji decyzyjnych determinują jednoznaczność/niejednoznaczność osiągnięcia zamierzonego celu

[przejdźcie do sedna sprawy :\)](#)

Aspekty psychologiczne

- Przyjmuje się, że na podejmowanie decyzji w warunkach ryzykownych największy wpływ mają dwie zmienne:
 - użyteczność wyników
 - użyteczność: subiektywna wartość
 - prawdopodobieństwo subiektywne otrzymania wyników
 - prawdopodobieństwo subiektywne: stopień przekonania

Aspekty psychologiczne

- Pojęcia użyteczności wyników i prawdopodobieństwo subiektywnego otrzymania wyników wiążą się z pojęciem poziomu ryzyka
 - w trakcie czynności decyzyjnej człowiek stara się minimalizować poziom ryzyka
 - metody określania poziomu ryzyka są bardzo zróżnicowane
 - „maksymalne straty”: ryzyko tym większe, im większe są maksymalne straty
 - „oczekiwane straty”: ryzyko tym większe, im większe są oczekiwane straty
 - „rozpiętość wyników”: ryzyko tym większe, im większa jest różnica pomiędzy maksymalnym zyskiem a maksymalną stratą
 - „wariancja wyników”: ryzyko tym większe, im większa jest wariancja wartości uzyskiwanych wyników

Aspekty psychologiczne

- Chęć uczestniczenia w sytuacjach ryzykownych
 - ryzyko może w ogólności charakteryzować się użytecznością pozytywną („kto nie ryzykuje, ten nie je”)
 - w rezultacie można stwierdzić różne podejścia do uczestniczenia w dobrowolnych sytuacjach wymagających podejmowania decyzji ryzykownych
 - skłonność/chęć do ryzyka (hazardziści)
 - awersja/niechęć do ryzyka (asekuranci)
 - neutralność w stosunku do ryzyka

Aspekty psychologiczne

- Czynność podejmowania decyzji składa się z trzech głównych etapów
 - czynność określania użyteczności wyników
 - czynność określania subiektywnego prawdopodobieństwa wyników
 - czynność wyboru najkorzystniejszego działania

Aspekty psychologiczne

- Określanie użyteczności wyników
 - przyjmuje się, że człowiek mierzy użyteczność w skali przedziałowej
- Badania nad określaniem użyteczności wyników
 - dokonywane przez człowieka określanie użyteczności jest procesem trudnym do badania/śledzenia ze względu na wysoki poziom zindywidualizowania, dlatego udało się je przeprowadzić jedynie dla rzeczy najprostszych (pieniądze, przedmioty codziennego użytku)
 - największą popularnością cieszą się badania określania użyteczności pieniędzy

Aspekty psychologiczne

- Wyniki badań nad użytecznością pieniędzy
 - użyteczność zysków pieniężnych
 - jednakowym przyrostom zysku odpowiadają coraz to mniejsze przyrosty użyteczności
 - ocena liberalna/konserwatywna (funkcja rosnąca wypukła)
 - przyjmowany często model: $u(x) = x^a$, gdzie $a < 1$ (często $a = 0.5$)
 - użyteczność strat pieniężnych
 - jednakowym przyrostom straty odpowiadają coraz to większe przyrosty użyteczności
 - ocena radykalna (funkcja malejąca wypukła)
 - przyjmowany często model: $u(x) = x^a$, gdzie $a > 1$ (często $a = 1.2$)

Aspekty psychologiczne

- Określanie prawdopodobieństwa subiektywnego
 - przyjmuje się, że człowiek mierzy prawdopodobieństwo w skali ilorazowej
 - jednostki:
 - skala niemianowana
 - od 0 (niemożliwość) do 1 (pewność)
 - od 0% (niemożliwość) do 100% (pewność)
 - tzw. terminy szansy, np. M:N
- Badania nad określaniem prawdopodobieństwa subiektywnego
 - odkrywa się umiejętność ustalania prawdopodobieństwa w procesach z dopływem nowych informacji
 - porównania rozwiązań z rozwiązaniami optymalnymi

Aspekty psychologiczne

- Wyniki badań nad prawdopodobieństwem subiektywnym w procesach z dopływem informacji
 - człowiek nieprawidłowo określa prawdopodobieństwa zdarzeń
 - w szczególności człowiek nieprawidłowo określa (zaniża) prawdopodobieństwa zdarzeń warunkowych o dużym prawdopodobieństwie
 - wniosek:
 - człowiek postępuje nieoptymalnie w porównaniu z modelem optymalnym Bayes'a (konserwatyzm poznawczy)
 - wyjaśnienie: hipoteza transformacyjna – brak odpowiednich umiejętności (do przetworzenia /czyli transformacji/ posiadanych danych)

Aspekty psychologiczne

- Wybór najkorzystniejszego działania
 - optymalna strategia działania: maksymalizacja subiektywnie oczekiwanej użyteczności (ang. SEU – „*subjectively expected utility*”)
 - jeżeli d jest działaniem prowadzącym do wygenerowania wyników $w_1, \dots, w_n$, to SEU działania d wynosi
$$SEU(d) = u(w_1)\psi(w_1) + \dots + u(w_n)\psi(w_n).$$
gdzie $u(w_i)$ jest użytecznością wyniku w_i
a $\psi(w_i)$ prawdopodobieństwem subiektywnym tego wyniku
- Badania nad wyborem najkorzystniejszego działania
 - wiele wyników potwierdza stosowanie maksymalizacji subiektywnie oczekiwanej użyteczności (60%–70%), co świadczy o dużej skuteczności działania człowieka
 - skuteczność ta obniża się wraz z poziomem trudności problemu decyzyjnego

Elementy teorii użyteczności

- Pojęcie loterii $L(A, p, B)$
 - pełne oznaczenie: $L(A, p, B, r)$
 - A, p : zdarzenie korzystne dla gracza i jego prawdopodobieństwo
 - B, r : zdarzenie niekorzystne dla gracza i jego prawdopodobieństwo
 - ponieważ zakłada się, że A i B są zdarzeniami przeciwnymi, to zawsze $r = 1 - p$ (zostaje więc pomijane w zapisie loterii)
 - ostatecznie używane oznaczenie: $L(A, p, B)$
 - **uwaga na kolejność w zapisie: A jest zawsze zdarzeniem korzystnym (wygraną), a B zdarzeniem niekorzystnym (przegraną) dla gracza**

Elementy teorii użyteczności

- Przykłady loterii

- Przykład 1

- opis: gra w orła i reszkę, w której stawką jest 5zł, gra jest wygrana gdy wypadnie orzeł
 - oznaczenie: $L(5, 1/2, -5)$
 - (komentarz: gra „uczciwa”)

- Przykład 2

- opis: gra z użyciem kostki do gry, w której stawką jest 5zł, gra jest wygrana gdy wynikowa liczba oczek jest parzysta
 - oznaczenie: $L(5, 1/2, -5)$
 - (komentarz: gra „uczciwa”)

Elementy teorii użyteczności

- Przykłady loterii – cd.
 - Przykład 3
 - opis: gra w orła i reszkę, w której w razie wygranej otrzymuje się 5zł a w przypadku przegranej płaci się 25zł , gra jest wygrana gdy wypadnie orzeł
 - oznaczenie: $L(5, 1/2, -25)$
 - (komentarz: gra „nieuczciwa”)
 - Przykład 4
 - opis: gra z użyciem kostki do gry, w której w razie wygranej otrzymuje się 5zł a w przypadku przegranej płaci się 25zł , gra jest wygrana gdy wynikowa liczba oczek jest większa od 1
 - oznaczenie: $L(5, 5/6, -25)$
 - (komentarz: gra „uczciwa”)

Elementy teorii użyteczności

- Przykłady loterii – cd.
 - Przykład 5
 - opis: gra w teleturnieju „Milionerzy” w sytuacji, w której ktoś gra o najwyższą stawkę (milion), nie zna odpowiedzi na postawione pytanie i wyczerpał wszystkie tzw. „koła ratunkowe”, oczywiście nadal może udzielić właściwej odpowiedzi metodą na „chybił–trafił”, w razie wygranej otrzymuje się 1000000zł, w razie przegranej 32000zł (a więc w obu przypadkach się wygrywa)
 - oznaczenie: $L(1000000, 1/4, 32000)$
 - (komentarz: gra „nieuczciwa”)

Elementy teorii użyteczności

- Pewnik jako szczególny przypadek loterii
 - z zapisu loterii postaci $L(A, 1, B)$ wynika, że zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym (nie ma szans na zaistnienie B)
 - tego rodzaju loterie są w skrócie zapisywane jako A i nazywane pewnikami

Elementy teorii użyteczności

- Pojęcie użyteczności
 - użyteczność w kontekście teorii użyteczności jest liczbą z przedziału $<0, 1>$, która charakteryzuje nastawienie (wolę/preferencje) gracza/decydenta w stosunku do pojęć/obiektów z pewnego wybranego zbioru
 - przyjęcie przedziału $<0, 1>$ do wyrażania wszystkich użyteczności jest pewnym uproszczeniem, w porównaniu z użytecznościami stosowanymi w psychologii, które mierzy się w skali przedziałowej
 - przedział $<0, 1>$ implikuje istnienie użyteczności ekstremalnych, tzn. użyteczności minimalnej (0) i maksymalnej (1)

Elementy teorii użyteczności

- Pojęcie użyteczności – cd.
 - ponieważ można sobie wyobrazić, że użyteczność jest przypisana każdemu obiektowi z rozważanego zbioru obiektów, zależność ta jest formalnie przedstawiana w postaci funkcji
 - definiuje się więc tzw. funkcję użyteczności U , która pewnym obiektom ze zbioru Z przyporządkowuje wartości z przedziału $<0, 1>$
 $U: Z \rightarrow <0, 1>$
 - przy czym
 - Z jest zbiorem pewnych obiektów/zdarzeń (np. sum wygranych w pewnej grze)
 - $<0, 1>$ jest domkniętym przedziałem liczb rzeczywistych

Elementy teorii użyteczności

- Użyteczność jest używana do formalnego określenia preferencji gracza/decydenta (czyli np. tego, co gracz/decydent woli)
 - jeżeli decydent woli, aby zaszło zdarzenie A raczej niż zdarzenie B to oznacza to, że $U(A) > U(B)$, gdzie $U(x)$ jest funkcją użyteczności tego gracza/decydenta
 - funkcja użyteczności jest więc rzeczą indywidualną/subiektywną (inną dla każdego gracza/decydenta)

Elementy teorii użyteczności

- Ponieważ w teorii użyteczności do określania preferencji wykorzystuje się pojęcia loterii oraz pewnika wymagane jest określenie użyteczności dla obu tych pojęć
 - użyteczność pewnika
 - jeżeli pewnik C jest elementem zbioru Z , to można określić jego użyteczność: $U(C)$
 - użyteczność $U(C)$ pewnika C wyraża chęć/niechęć decydenta w stosunku do zdarzenia opisanego w pewniku
 - użyteczność loterii
 - loterię składa się z dwóch zdarzeń, jej użyteczność daje się więc także wyrazić poprzez użyteczności zdarzeń w niej opisanych
 - zależność ta jest następująca:
 $U(L(A, p, B)) = p \cdot U(A) + (1 - p) \cdot U(B)$
(kombinacja wypukła)

Elementy teorii użyteczności

- Równoważność pewników i loterii
- Przykład „Milionerów”
 - gracz stoi przed dylematem:
 - może wziąć udział w grze o milion, którą można opisać loterią $L(1000000, 1/4, 32000)$
 - może zrezygnować z dalszej gdy, otrzymując dotychczas wygraną kwotę, czyli 500000zł
 - sytuację tę można opisać w następujący sposób:
500000 ? $L(1000000, 1/4, 32000)$
 - powstaje pytanie:
 - na co zdecyduje się gracz?

Elementy teorii użyteczności

- Przykład „Milionerów” – cd.
 - założmy, że gracz zdecydował się na pobranie dotychczasowej wygranej, co oznacza, że woli pewnik niż loterię
 - sytuację tę można opisać następująco:
$$500000 > L(1000000, 1/4, 32000) \leftarrow \text{relacja preferencji}$$
 - wynika z tego, że w przypadku tego gracza użyteczność pewnika przewyższa użyteczność loterii
$$U(500000) > U(L(1000000, 1/4, 32000)) \leftarrow \text{zwykła większość}$$

Elementy teorii użyteczności

- Przykład „Milionerów” – cd.
 - czy tak jest zawsze?
 - tzn. czy gracze zawsze preferują pewniki nad loteriami?
 - oczywiście nie, wszystko zależy od konkretnych loterii i konkretnych pewników
 - gdyby sukcesywnie zmniejszać atrakcyjność pewnika, to w pewnym momencie gracz zdecydowałby się na udział w loterii
 - dla różnych graczy moment ten będzie prawdopodobnie różny, dlatego można go wykorzystać do charakteryzowania subiektywnych użyteczności graczy

Elementy teorii użyteczności

- Przykład „Milionerów” – cd.
 - wracamy do sytuacji, w której gracz udzielił odpowiedzi, że woli pewnik 500000 od loterii $L(1000000, 1/4, 32000)$, czyli:
 $500000 \succ L(1000000, 1/4, 32000)$
 - zmniejszamy więc atrakcyjność pewnika
 - czynimy to obniżając jego wartość z 500000zł do 400000zł
 $400000 \ ? \ L(1000000, 1/4, 32000)$
 - jaka teraz będzie decyzja?
 - jeżeli gracz ponownie wybierze pewnik, to ponownie obniżamy jego atrakcyjność (zmniejszając kwotę do 300000)
 - gracz jest teraz postawiony przed wyborem
 $300000 \ ? \ L(1000000, 1/4, 32000)$
 - jaka teraz będzie decyzja?
 - itd.

Elementy teorii użyteczności

- Przykład „Milionerów” – cd.
 - proces ten nie będzie trwał w nieskończoność, ponieważ po zmniejszeniu pewnika do 32000 każdy rozsądny gracz wybierze loterię (choć oczywiście moment ten mógł nastąpić wcześniej)
 - za każdym razem, gdy gracz wybiera loterię, zwiększamy atrakcyjność pewnika (tu zwiększając jego wartość, ale nie na tyle, aby przyjął on wartość dla której znamy już odpowiedź)
 - w trakcie tego procesu następuje sukcesywne zawężanie przedziału, w którym znajduje się poszukiwany pewnik
 - w pewnym momencie gracz nie będzie umiał określić, czy woli pewnik czy loterię
 - moment ten jest punktem charakterystycznym tego procesu
 - ustaloną w ten sposób wartość pewnika nazywa się **równoważnikiem loterii**

Elementy teorii użyteczności

- Przykład pełnego procesu poszukiwania równoważnika

500000 ? $L(1000000, 1/4, 32000)$ – pytanie

500000 $\succ$ $L(1000000, 1/4, 32000)$ – odpowiedź

250000 ? $L(1000000, 1/4, 32000)$ – pytanie

250000 $\succ$ $L(1000000, 1/4, 32000)$ – odpowiedź

125000 ? $L(1000000, 1/4, 32000)$ – pytanie

125000 $\prec$ $L(1000000, 1/4, 32000)$ – odpowiedź

187500 ? $L(1000000, 1/4, 32000)$ – pytanie

187500 $\prec$ $L(1000000, 1/4, 32000)$ – odpowiedź

218750 ? $L(1000000, 1/4, 32000)$ – pytanie

218750 $\sim$ $L(1000000, 1/4, 32000)$ – odpowiedź

– wynik procesu:

- równoważnikiem loterii $L(1000000, 1/4, 32000)$ jest pewnik 218750

Elementy teorii użyteczności

- Zastosowania przedstawionego schematu postępowania
 - przedstawiony schemat postępowania może być zastosowany do ustalania użyteczności pewnego zdarzenia/pewnika C przy założeniu, że:
 - znamy $U(A)$ oraz $U(B)$oraz
 - $U(A) > U(C) > U(B)$
 - proces ten wydaje się trudny do zainicjowania, bo zdobycie użyteczności jednego pewnika wymaga posiadania informacji o użytecznościach dwóch innych, różnych od siebie (i różnych od tego pewnika) zdarzeń
 - pytanie więc: jak znaleźć jakieś początkowe zdarzenia A i B tak, aby ich użyteczności były znane (a tym samym mogły posłużyć do znajdowania dalszych użyteczności)?

Elementy teorii użyteczności

- Zastosowania przedstawionego schematu postępowania
 - w praktyce proces rozpoczyna się od zdarzeń „ekstremalnych”, tzn.:
 - zdarzenia/obiektu o „maksymalnej korzystności” w zbiorze Z oraz
 - zdarzenia/obiektu o „minimalnej korzystności” w zbiorze Z dla których przyjmuje się użyteczności 1 i 0
 - na podstawie tak znalezionych dwóch użyteczności, tzn. $U(A)$ i $U(B)$ znajduje się użyteczność trzeciego zdarzenia, tzn. $U(C)$, następnie na podstawie np. $U(A)$ i $U(C)$ znajduje się użyteczność czwartego zdarzenia $U(D)$, itd.

Metoda Assess

Metoda Assess została po raz pierwszy zaproponowana przez P.C. Fishburna w 1967 roku i jest jedną z pierwszych interaktywnych metod pozyskiwania funkcji użyteczności

Oznacza to, że pozwala ona wyznaczyć postać funkcji użyteczności oddającej preferencje decydenta na podstawie przeprowadzanego z nim dialogu

Metoda Assess

- Charakterystyka metody Assess
 - rozwiązuje problematykę γ
 - realizuje model funkcyjny
 - implementowane relacje pomiędzy wariantami: $\succ (P)$, $\sim (I)$
 - pośrednio realizuje problematyki α i β
 - działa w trybie interaktywnym
 - wymagane dane
 - tabela decyzyjna (zbiór wariantów A , spójna rodzina kryteriów G)
 - informacje dotyczące procesu konstruowania kryteriów stanowiące tzw. *informację preferencyjną od decydenta*
 - odpowiedzi na pytania dotyczące konstruowanych funkcji użyteczności zadawane decydentowi w procesie interaktywnym
 - aparat matematyczny
 - zależności algebraiczne
 - rozwiązania równań wielomianowych wyższego stopnia

Główne problematyki MCDA

- Problematyka γ – „ranking” – porządkowanie od najlepszego do najgorszego
 - tworzenie wielokryterialnego rankingu wszystkich wariantów
 - problem znacznie ogólniejszy i bardziej wymagający niż problem α , ponieważ utworzenie rankingu odpowiada na pytanie, które warianty są najlepsze, natomiast wybranie wariantów najlepszych nie jest oczywiście równoważne utworzeniu rankingu wszystkich wariantów
 - utworzenie rankingu wariantów rozwiązuje pozornie także problem sortowania, ponieważ ranking może być podzielony na „klasy”
(co dałoby odpowiedź na pytanie stawiane w problematyce β),
w praktyce są to jednak różne problemy i nie należy rozwiązywać problemu β technikami z problematyki γ

Warianty i kryteria

- Relacje pomiędzy wariantami
 - „warunkowe”
 - identyczność (ang. *indiscernibility*): $a \text{ Ind } b$
 - dominacja (ang. *dominance*): $a \text{ Dom } b$
 - „decyzyjne” (globalne)
 - preferencja (ang. *preference*): $a \succ b$ (lub $a \text{ P } b$)
 - nierozróżnialność (ang. *indifference*): $a \sim b$ (lub $a \text{ I } b$)
 - nieporównywalność (ang. *incomparability*): $a ? b$ (lub $a \text{ R } b$)

Uwagi:

preferencję b nad a można zapisać jako $b \succ a$, albo $a \prec b$ ($a \text{ P}^- b$)

do zapisu preferencji służy symbol „ $\succ$ ” odmienny od symbolu większości „ $>$ ”

Warianty i kryteria

- Porządki indukowane przez relacje pomiędzy wariantami
 - relacje globalne („decyzyjne”)
 - porządek zupełny: $\{>\}$
 - pre-porządek zupełny: $\{>, \sim\}$
 - porządek częściowy: $\{>, ?\}$
 - pre-porządek częściowy: $\{>, \sim, ?\}$
 - relacje „warunkowe”

Uwaga: pojedyncza globalna funkcja użyteczności U indukuje na zbiorze wariantów **pre-porządek zupełny**:

$U(a) > U(b)$ oznacza, że $a > b$

$U(a) = U(b)$ oznacza, że $a \sim b$

Model preferencji decydenta

- Model funkcyjny
 - podstawowe pojęcie: funkcja użyteczności (funkcja służąca do formalnego wyrażania oceny wariantu)
- Funkcje użyteczności
 - służą do wyrażania ocen indywidualnych wariantów (każdy wariant jest oceniany niezależnie od innych wariantów)
 - zależności przedstawione w postaci funkcji użyteczności pozwalają na rozwiązanie konkretnego problemu decyzyjnego (α , β lub γ) stawianego przed metodą implementującą model funkcyjny
 - w praktyce definiuje się funkcje użyteczności dla każdego kryterium osobno, a te następnie agreguje się w jedną globalną funkcję uwzględniającą wszystkie kryteria naraz (podejście wielokryterialne)

Metoda Assess

- Funkcja użyteczności stosowana przez metodę Assess:
 - użyteczności cząstkowe (dla poszczególnych kryteriów): funkcje odcinkami liniowe dla każdego kryterium
 - użyteczność globalna (dla wariantów opisanych wektorem wartości – po wszystkich kryteriach): agregacja wzorem Keeneya-Raiffy

Metoda Assess

- Wzór agregacyjny Keeneya-Raiffy

- postać ogólna:
$$KU(x) + 1 = \prod_{i=1}^N (Kk_i u_i(x) + 1)$$

- gdzie:

- $U(\underline{x})$ – użyteczność globalna wariantu $\underline{x}$

- $u_i(x)$ – użyteczność cząstkowa wariantu x (na kryterium i -tym)

- k_i – waga kryterium i -tego

- K – współczynnik skalujący

- postać z wyznaczonym $U(\underline{x})$:

$$U(x) = (1/K) \cdot \left\{ \prod_{i=1}^N (Kk_i u_i(x) + 1) - 1 \right\}$$

Metoda Assess

- Struktura wzoru Keeneya-Raiffy przypomina pod pewnymi względami wzór na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, dla przypomnienia:
 - wzór na prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
przy czym jeżeli A i B są zdarzeniami niezależnymi, to:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
 - podobnie dla prawdopodobieństwa sumy trzech zdarzeń:
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
(dla w pełni niezależnych A, B i C daje to)
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(A)P(C) + P(A)P(B)P(C)$$
 - itd.

Metoda Assess

- Struktura wzoru – cd.

- dla $N=2$ prawa strona wzoru daje się rozwinąć do:

$$\begin{aligned} (Kk_1u_1(x)+1)(Kk_2u_2(x)+1) &= KKk_1k_2u_1(x)u_2(x) + Kk_1u_1(x) + Kk_2u_2(x) + 1 = \\ &= K^2k_1k_2u_1(x)u_2(x) + K(k_1u_1(x)+k_2u_2(x)) + 1 \end{aligned}$$

- przyrównując lewą do prawej otrzymujemy:

$$KU(\underline{x})+1 = K^2k_1k_2u_1(x)u_2(x) + K(k_1u_1(x)+k_2u_2(x)) + 1$$

$$KU(\underline{x}) = K^2k_1k_2u_1(x)u_2(x) + K(k_1u_1(x)+k_2u_2(x))$$

$$U(\underline{x}) = Kk_1k_2u_1(x)u_2(x) + (k_1u_1(x)+k_2u_2(x))$$

- dla $N=3$ otrzymalibyśmy:

$$\begin{aligned} U(\underline{x}) &= K^2k_1k_2k_3u_1(x)u_2(x)u_3(x) + \\ &+ K(k_1k_2u_1(x)u_2(x)+k_2k_3u_2(x)u_3(x)+k_1k_3u_1(x)u_3(x))+ \\ &+ (k_1u_1(x)+k_2u_2(x)+k_3u_3(x)) \end{aligned}$$

- wniosek: wzór Keeneya-Raiffy jest uogólnieniem postaci addytywnej i sprowadza się do niej (dla dowolnego N) przy współczynniku $K=0$

Metoda Assess

- Weryfikacja wzoru:
 - jeżeli wszystkie użyteczności cząstkowe wariantu x są równe 0, to globalna użyteczność tego wariantu powinna wynosić 0
 - $u_1(x)=0, u_2(x)=0, \dots, u_N(x)=0 \Rightarrow U(\underline{x}) = 0$
 - wzór Keeneya-Raiffy spełnia ten wymóg:
$$U(\underline{x}) = (1/K) \cdot \{(Kk_1 \cdot 0 + 1)(Kk_2 \cdot 0 + 1) \dots (Kk_N \cdot 0 + 1) - 1\} =$$
$$= (1/K) \cdot \{(1)(1) \dots (1) - 1\} = (1/K) \cdot \{1 - 1\} = (1/K) \cdot 0 = 0$$
 - jeżeli wszystkie użyteczności cząstkowe wariantu x są równe 1, to globalna użyteczność tego wariantu powinna wynosić 1
 - $u_1(x)=1, u_2(x)=1, \dots, u_N(x)=1 \Rightarrow U(\underline{x}) = 1$
 - wzór Keeneya-Raiffy spełnia ten wymóg po odpowiednim dobraniu parametru skalującego K , czy operacja taka jest możliwa?

Metoda Assess

- Weryfikacja wzoru agregacyjnego – cd.:
 - wymóg:
 - $u_1(x)=1, u_2(x)=1, \dots, u_N(x)=1 \Rightarrow U(\underline{x}) = 1$
 - dla wzoru Keeneya-Raiffy mamy:
$$U(\underline{x}) = (1/K) \cdot \{(Kk_1 \cdot 1 + 1)(Kk_2 \cdot 1 + 1) \cdot \dots \cdot (Kk_N \cdot 1 + 1) - 1\} =$$
$$= (1/K) \cdot \{(Kk_1 + 1)(Kk_2 + 1) \cdot \dots \cdot (Kk_N + 1) - 1\}$$
 - problem: dobrać K tak, aby przy ustalonych $k_1, k_2, \dots, k_N$ zachodziło:
$$(1/K) \cdot \{(Kk_1 + 1)(Kk_2 + 1) \cdot \dots \cdot (Kk_N + 1) - 1\} = 1$$
 - rozwiązanie:
$$(1/K) \cdot \{(Kk_1 + 1)(Kk_2 + 1) \cdot \dots \cdot (Kk_N + 1) - 1\} = 1 \quad // \cdot K$$
$$(Kk_1 + 1)(Kk_2 + 1) \cdot \dots \cdot (Kk_N + 1) - 1 = K$$
$$(Kk_1 + 1)(Kk_2 + 1) \cdot \dots \cdot (Kk_N + 1) - K - 1 = 0 \quad (*)$$

Metoda Assess

- Dobór parametru skalującego K:
 - występujący w powyższym iloczynie sum:
 $(Kk_1+1)(Kk_2+1)\cdot\ldots\cdot(Kk_N+1)$
można rozwinąć do postaci sumy iloczynów:
 $K^N(k_1k_2\ldots k_N) +$
 $+ K^{N-1}(k_2k_3\ldots k_N+k_1k_3\ldots k_N+\ldots+k_1k_3\ldots k_{N-1}) +$
 $+ \ldots +$
 $+ K^1(k_1+k_2+\ldots+k_N) +$
 $+ 1$

Metoda Assess

- Dobór parametru skalującego K – cd.:
 - po podstawieniu tego rozwinięcia do wzoru oznaczonego znakiem (*) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 0 &= K^N(k_1 k_2 \dots k_N) + K^{N-1}(k_2 k_3 \dots k_N + k_1 k_3 \dots k_N + \dots + k_1 k_3 \dots k_{N-1}) + \dots + \\ &\quad + K^1(k_1 + k_2 + \dots + k_N) + 1 - K - 1 = \\ &= K^N(k_1 k_2 \dots k_N) + K^{N-1}(k_2 k_3 \dots k_N + k_1 k_3 \dots k_N + \dots + k_1 k_3 \dots k_{N-1}) + \dots + \\ &\quad + K^1(k_1 + k_2 + \dots + k_N - 1) + 0 \end{aligned}$$

co oznacza, że prawa strona tego równania jest wielomianem postaci:
 $a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$, czyli wielomianem stopnia N pewnego parametru x (oczywiście $a_0 x^0 = a_0$, ponieważ $x^0 = 1$)

Metoda Assess

- Dobór parametru skalującego K – cd.:
 - cechy wielomianu: $a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$
 - współczynniki $a_N, a_{N-1}, \dots, a_2$ tego wielomianu są dodatnie, ponieważ:
$$a_N = k_1 k_2 \dots k_N$$
$$a_{N-1} = k_2 k_3 \dots k_N + k_1 k_3 \dots k_N + \dots + k_1 k_3 \dots k_{N-1}$$
$$\dots$$
$$a_2 = k_1 k_2 + k_1 k_3 + \dots + k_{N-1} k_N$$
a wszystkie k_i są z założenia liczbami dodatnimi, a więc ich iloczyny oraz sumy ich iloczynów są także liczbami dodatnimi
 - współczynnik a_1 tego wielomianu może przyjmować dowolną co do znaku wartość, ponieważ ma postać:
$$a_1 = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_N - 1$$
 - współczynnik a_0 (czyli wyraz wolny) tego wielomianu jest zerowy
$$a_0 = 0$$

Metoda Assess

- Dobór parametru skalującego K – cd.:
 - zależność:
 - $u_1(x)=1, u_2(x)=1, \dots, u_N(x)=1 \Rightarrow U(x) = 1$
 - będzie spełniona gdy K będzie tak dobrane, aby zachodziło:
$$(1/K) \cdot \{(Kk_1+1)(Kk_2+1) \cdot \dots \cdot (Kk_N+1) - 1\} = 1$$
 - a to zachodzi, gdy
$$K \neq 0 \text{ i } a_N K^N + a_{N-1} K^{N-1} + \dots + a_1 K = 0$$
 - wniosek: K musi być różnym od zera pierwiastkiem wielomianu
$$a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x$$
 - istnienie niezerowych pierwiastków wielomianu
$$a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x$$
 - dla dowolnego $N \geq 1$ pierwiastkiem powyższego wielomianu jest 0 (ale ta wartość nie jest rozwiązaniem naszego problemu)

Metoda Assess

- Dobór parametru skalującego K – cd.:
 - przypadki szczególne wielomianu $a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x$:
 - dla $N=1$ przyrównany do zera wielomian ma postać:
$$a_1 x = 0 \quad \text{czyli} \quad (k_1 - 1)x = 0$$
a rozwiązaniem tego równania są:
 - dla $k_1=1$: każde $x \in (-\infty, +\infty)$
 - » wniosek: równanie posiada rozwiązania niezerowe
 - dla $k_1 \neq 1$: tylko $x=0$
 - podsumowanie: przy $N=1$ (tylko jedno kryterium) współczynnik skalujący K może przyjąć niezerową wartość (dowolną) o ile waga jedyne kryterium będzie liczbą równą 1 (w przeciwnym przypadku nie istnieje dopuszczalna, tzn. niezerowa wartość współczynnika K)
 - przykład: niech $k_1=1$ i niech np. $K=1$:
$$U(\underline{x}^*) = (1/K) \cdot \{(Kk_1+1) - 1\} = (1/1) \cdot \{(1 \cdot 1+1) - 1\} = 1$$

Metoda Assess

- Dobór parametru skalującego K – cd.:
 - przypadki szczególne wielomianu $a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x$, cd.:
 - dla $N=2$ przyrównany do zera wielomian ma postać:
$$a_2 x^2 + a_1 x = 0 \quad \text{czyli} \quad (k_1 k_2) x^2 + (k_1 + k_2 - 1) x = 0$$
a rozwiązaniem tego równania są:
 - $x=0$
 - $x=(1 - k_1 + k_2)/(k_1 k_2)$ dla $k_1 + k_2 \neq 1$
 - » wniosek: równanie posiada rozwiązania niezerowe
 - podsumowanie: przy $N=2$ (dwa kryteria) współczynnik skalujący K musi przyjąć wartość $(1 - k_1 - k_2)/(k_1 k_2)$, wartość ta będzie niezerowa o ile suma wag kryteriów jest liczbą różną od 1 (jednocześnie jednak ich iloczyn musi być liczbą różną od 0)
 - przykład: niech $k_1=0.50$ i $k_2=0.75$, wtedy:
$$K = (1 - 0.50 - 0.75)/(0.50 \cdot 0.75) = -2/3$$
$$U(\underline{x}^*) = (1/K) \cdot \{(K k_1 + 1)(K k_2 + 1) - 1\} =$$
$$= (1/(-2/3)) \cdot \{((-2/3) \cdot 0.50 + 1)((-2/3) \cdot 0.75 + 1) - 1\} = 1$$

Metoda Assess

- Dobór parametru skalującego K – cd.:
 - przypadki szczególne wielomianu $a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x$, cd.:
 - dla $N=3$ przyrównany do zera wielomian ma postać:
$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x = 0 \text{ czyli}$$
$$(k_1 k_2 k_3) x^3 + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) x^2 + (k_1 + k_2 + k_3 - 1) x = 0$$
a rozwiązaniem tego równania są:
 - $x=0$
 - pierwiastki równania $(k_1 k_2 k_3) x^2 + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) x + (k_1 + k_2 + k_3 - 1) = 0$
 - podsumowanie: przy $N=3$ (trzy kryteria) współczynnik skalujący K może przyjąć wartość niezerową jeżeli istnieje niezerowe rozwiązanie powyższego równania
 - przykład: niech $k_1=0.25$, $k_2=0.50$ i $k_3=0.75$, wtedy dopuszczalnymi wartościami parametru K są (w przybliżeniu) -6.5 oraz -0.8
 - dla $K \approx -0.8$
 - $$U(\underline{x}^*) = (1/K) \cdot \{(Kk_1+1)(Kk_2+1)(Kk_3+1) - 1\} \approx$$
$$\approx (1/(-0.8)) \cdot \{((-0.8) \cdot 0.25 + 1)((-0.8) \cdot 0.50 + 1)((-0.8) \cdot 0.75 + 1) - 1\} \approx 1$$

Metoda Assess

- Tworzenie funkcji użyteczności przez metodę Assess jest dwuetapowe:
 - etap pierwszy: pozyskiwanie informacji służącej utworzeniu częściowych funkcji użyteczności
 - etap drugi: pozyskiwanie informacji służącej ustaleniu wag kryteriów, które pozwolą na ustalenie wartości współczynnika skalującego K i w rezultacie otrzymanie **globalnej funkcji użyteczności** stanowiącej **model preferencji danego decydenta**

Zatem poprzednie slajdy dotyczyły w zasadzie etapu drugiego ☺

Metoda Assess

Pozyskiwanie funkcji użyteczności w metodzie Assess, odbywa się w formie dialogu z użytkownikiem, podczas którego ustala się przebieg każdej z tych funkcji

W metodzie Assess wyróżnia się cztery sposoby pozyskiwania jednoatrybutowej (cząstkowej) funkcji użyteczności, czyli ustalania jej przebiegu:

- I. poszukiwanie równoważnika pewności ze stałym prawdopodobieństwem
- II. poszukiwanie równoważnika pewności ze zmiennym prawdopodobieństwem
- III. porównywanie loterii
- IV. porównywanie prawdopodobieństw

Metoda Assess

Podstawą wszystkich metod z wyjątkiem metody porównywania loterii jest dialog, w którym decydent porównuje sytuację otrzymania określonej wartości kryterium **na pewno** z sytuacją ryzyka, tzw. **loterią**

W loterii tej można **wygrać**, tj. **otrzymać korzystniejszą wartość** danego kryterium z prawdopodobieństwem p , bądź **przegrać** czyli **otrzymać mniej pożądaną wartość** z prawdopodobieństwem $(1 - p)$

Dialog polega ustaleniu z decydentem **jego równoważnika pewności dla danej loterii**, tj. takiej wartości kryterium, dla której decydentowi jest obojętne czy ją otrzyma na pewno, czy też będzie brał udział w loterii

Metoda Assess

Ponieważ w praktyce decydent nie jest w stanie podać od razu wartości równoważnika pewności dla danej loterii, dlatego w metodzie Assess poszukuje się jej iteracyjnie zmieniając stosownie do udzielanych przez niego odpowiedzi, wartości x_1 , x_2 , x_3 oraz p

Cały taki dialog powtarza się kilka razy w celu znalezienia większej liczby punktów funkcji użyteczności częściowej

W przypadku metody porównywania loterii decydent w czasie dialogu porównuje dwie sytuacje loterii, a poszukuje się takiej wartości prawdopodobieństwa, dla którego obie te loterie są sobie równoważne (tak samo dobre/złe w przekonaniu decydenta)

Metoda Assess

I. Poszukiwanie równoważnika pewności ze stałym prawdopodobieństwem

- 1) Dla danego kryterium g_i użytkownik powinien podać zakres wartości, tzn. wartość najmniej preferowaną x_* oraz najbardziej preferowaną x^* , a także kierunek preferencji. Może być on malejący (kryterium typu *koszt*) lub rosnący (kryterium typu *zysk*)
- 2) Zakładamy, że funkcja użyteczności cząstkowej jest znormalizowana w zakresie $<0, 1>$
$$u_i(x_*) = 0 \quad u_i(x^*) = 1$$

Uwaga: te dwa założenia dotyczą wszystkich czterech sposobów I.–IV.

Metoda Assess

- 3) Dla punktów x^* oraz x_* tworzona jest sytuacja loterii z pewną zadaną wartością prawdopodobieństwa p_1

$$L_1(x^*, p_1, x_*)$$

- 4) W fazie dialogu z decydentem zadawane są **pytania o wartość równoważnika pewności x_1** dla tej loterii. Aby ułatwić decydentowi jej dokładne określenie, poszukiwanie tego równoważnika odbywa się za pomocą kolejnych propozycji odpowiedniej wartości pewnej (kolejnych przybliżeń do tej wartości), aż znajdziemy taką wartość pewną, która jest dla decydenta nierozróżnialna z loterią pod względem preferencji: $x_1 \sim L_1$ (czyli decydent uznaje, że otrzymanie tej wartości **na pewno** jest dla niego tak samo dobre, lub złe, jak wzięcie udziału w **loterii**; zatem wartość $u(x_1) = u(L_1)$)

- 5) Dla znalezionej wartości równoważnika pewności obliczana jest wartość użyteczności ze wzoru:

$$u(x_1) = p_1 u(x^*) + (1 - p_1) u(x_*)$$

Na podstawie kroku 2) otrzymujemy $u(x_1) = p_1$

W tym momencie znaleziony zostaje pierwszy punkt funkcji użyteczności cząstkowej o współrzędnych $(x_1, u(x_1))$

Metoda Assess

I. Poszukiwanie równoważnika pewności ze stałym prawdopodobieństwem – cd.

- 6) Następnie **kilkakrotnie** (w zależności od liczby poszukiwanych punktów) procedura powtarza się od kroku 3) do 5) poszukując równoważnika pewności dla nowych loterii, w kolejnych przedziałach rozważanego kryterium – poędzy znanymi punktami

Np.: dla loterii $L_2(x^*, p_1, x_1)$ znajdujemy równoważnik pewności x_2 oraz punkt o współrzędnych $(x_2, u(x_2))$,
gdzie $u(x_2) = u(L_2) = p_1 u(x^*) + (1 - p_1) u(x_1)$

Następnie dla loterii $L_3(x_1, p_1, x_*)$ równoważnik pewności x_3 oraz punkt $(x_3, u(x_3))$, gdzie $u(x_3) = p_1 u(x_1) + (1 - p_1) u(x_*)$

Dalej możemy szukać równoważnika pewności dla $L_4(x_2, p_1, x_1)$, itd.

- 7) Po znalezieniu pożądanej liczby punktów, w oparciu o nie dokonuje się aproksymacji kształtu funkcji użyteczności cząstkowej uzyskując w ten sposób jej końcową postać (odcinkami liniową)

Metoda Assess

II. Poszukiwanie równoważnika pewności ze zmiennym prawdopodobieństwem

Zasada działania tej metody jest bardzo podobna do metody I. W obu identycznie przebiega dialog prowadzący do wyznaczenia pojedynczego punktu funkcji użyteczności cząstkowej. Różnicą jest to, że po odnalezieniu równoważnika pewności dla pierwszej loterii $L_1(x^*, p_1, x_*)$, w kolejnych krokach zmianie nie ulegają wartości loterii, ale **wartość prawdopodobieństwa p_j** . W konsekwencji zmianie ulega jedynie sposób postępowania w kroku 6) poprzedniej metody, natomiast reszta kroków jest taka sama

Metoda Assess

II. Poszukiwanie równoważnika pewności ze zmiennym prawdopodobieństwem – cd.

- 6) Kilkakrotnie (w zależności od liczby poszukiwanych punktów) powtarzana jest procedura od kroku 3) do 5) poszukując równoważnika pewności dla nowych loterii, tj. z nową wartością prawdopodobieństwa p_i :
- dla loterii $L_i(x^*, p_i, x_*)$ otrzymuje się jej równoważnik pewności x_i i punkt o współrzędnych $(x_i, u(x_i))$, gdzie $u(x_i) = p_i$
- ponieważ $x_i \sim L_i \Leftrightarrow u(x_i) = u(L_i)$; $u(L_i) = p_i u(x^*) + (1 - p_i) u(x_*)$
- i na podstawie kroku 2) $u(L_i) = p_i$

Metoda Assess

III. Porównywanie loterii

Sposób pozyskiwania funkcji użyteczności cząstkowej oddającej preferencje decydenta w tej metodzie różni się całkowicie od trzech pozostałych. Istotna różnica polega na tym, że podczas dialogu z decydentem nie porównuje się wartości pewnej z loterią, ale dwie loterie. Metoda przebiega według następujących kroków:

- 1) Dla danego kryterium użytkownik powinien podać zakres wartości, tzn. wartość najmniej preferowaną x_* oraz najbardziej preferowaną x^* , a także kierunek preferencji.
- 2) Zakłada się, że funkcja użyteczności cząstkowej jest znormalizowana w zakresie $<0, 1>$

$$u_i(x_*) = 0$$

$$u_i(x^*) = 1$$

Metoda Assess

III. Porównywanie loterii – cd.

- 3) Tworzy się dwie sytuacje loterii $L_1(x_1, p_1, x_*)$ oraz $L_1'(x^*, p_1', x_*)$, gdzie p_1 jest pewną zadaną wartością prawdopodobieństwa. Przy kolejnym wykonywaniu tego kroku zmianie ulega jedynie parametr x_1 w pierwszej loterii
- 4) W fazie dialogu z decydentem poszukiwana jest taka wartość prawdopodobieństwa p_1' , dla której obie loterie są sobie równoważne. Aby ułatwić decydentowi jej dokładne określenie poszukiwanie tego prawdopodobieństwa odbywa się za pomocą kolejnych przybliżeń do tej wartości
- 5) Dla znalezionej wartości p_1' (na podstawie faktu, że $L_1 \sim L_1'$) oblicza się wartość użyteczności korzystając ze wzoru:
$$p_1' u(x^*) + (1 - p_1') u(x_*) = p_1 u(x_1) + (1 - p_1) u(x_*)$$
$$\Rightarrow p_1' * 1 + (1 - p_1') * 0 = p_1 u(x_1) + (1 - p_1) * 0$$

Metoda Assess

III. Porównywanie loterii – cd.

Na podstawie kroku 2) otrzymuje się zatem:

$$p_1' = p_1 u(x_1) \Rightarrow u(x_1) = p_1' / p_1$$

W tym momencie znaleziony został pierwszy punkt funkcji użyteczności częściowej o współrzędnych $(x_1, p_1' / p_1)$

- 6) Następnie kilkakrotnie (w zależności od liczby poszukiwanych punktów) powtarzana jest procedura od kroku 3) do 5) dla nowych przedziałów wartości rozważanego kryterium w loterii L_1 : dla loterii $L_i(x_i, p_1, x_*)$ oraz $L_i'(x^*, p_i', x_*)$ (gdzie $i=2,3,\dots,n$) otrzymuje się nową wartość p_i' oraz punkt o współrzędnych $(x_i, u(x_i))$, gdzie $u(x_i) = p_i' / p_1$
- 7) Po znalezieniu pożądanej liczby punktów, dokonuje się – w oparciu o nie – aproksymacji kształtu funkcji użyteczności częściowej uzyskując w ten sposób jej końcową postać odcinkami liniową

Metoda Assess

IV. Porównywanie prawdopodobieństw

Przebieg tej metody jest również podobny do metody I. Różnica w tym przypadku polega na fakcie, że w czasie dialogu **dla danych wartości równoważników pewności poszukuje się odpowiadających im wartości prawdopodobieństw p .**

Zmiana w sposobie wyznaczania postaci funkcji użyteczności cząstkowej ma więc miejsce w krokach 4) oraz 6)

Metoda Assess

IV. Porównywanie prawdopodobieństw – cd.

- 4) W fazie dialogu z decydentem zadawane jest pytanie o wartość prawdopodobieństwa p_1 w loterii odpowiadającego zadanemu równoważnikowi pewności x_1 . Aby ułatwić decydentowi jej dokładne określenie, poszukiwanie tego prawdopodobieństwa odbywa się za pomocą kolejnych przybliżeń do tej wartości
- 6) Następnie kilkakrotnie (w zależności od liczby poszukiwanych punktów) powtarzana jest procedura od kroku 3) do 5) poszukując dla kolejnych równoważników pewności odpowiadających im prawdopodobieństw p_i (gdzie $i=2,3,\dots,n$), tak że dla równoważnika pewności x_i otrzymuje się loterię $L_i(x^*, p_i, x_*)$ i punkt o współrzędnych $(x_i, u(x_i))$, gdzie $u(x_i) = p_i$
wygraną w kolejnych loteriach jest zawsze wartość idealna na badanym kryterium, a przegraną – wartość antyidealna

Metoda Assess

Ustalanie wag kryteriów

Podstawą procedury ustalania współczynników k_i (czyli wag dla poszczególnych kryteriów g_i) jest ponownie dialog, w którym decydent porównuje sytuację otrzymania określonego **pewnika** z sytuacją ryzyka, czyli **loterią**

W tej procedurze pewnikiem jest *sztuczny wariant* zbudowany z najlepszej możliwej wartości na badanym kryterium g_i oraz samych najgorszych wartości na wszystkich pozostałych kryteriach g_l ($l \neq i$)

Loteria jest zbudowana tak, że wygraną jest *wariant idealny* zbudowany z samych najlepszych wartości na wszystkich kryteriach, a przegraną *wariant antyidealny* zbudowany z samych najgorszych wartości

$$\langle x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_i^*, \dots, x_{N*} \rangle ? L(\underline{x}^*, p, \underline{x}_*)$$

Metoda Assess

Ustalanie wag kryteriów – cd.

$$\langle x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_i^*, \dots, x_{N*} \rangle ? L(\underline{x}^*, p, \underline{x}_*)$$

w kolejnych krokach – w wyniku odpowiedzi decydenta – zmianie podlega **wartość prawdopodobieństwa wygranej** p , która jest odpowiednio **zmniejszana** jeśli decydent odpowiada, że **woli loterię** L , bądź **zwiększana** jeśli decydent preferuje **pewnik** w stosunku do loterii

przykładowo:

$$\langle x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_i^*, \dots, x_{N*} \rangle ? L_0(\underline{x}^*, p, \underline{x}_*) - \text{pytanie}$$

$$\langle x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_i^*, \dots, x_{N*} \rangle \succ L_0(\underline{x}^*, p, \underline{x}_*) - \text{odpowiedź}$$

$$\langle x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_i^*, \dots, x_{N*} \rangle ? L_1(\underline{x}^*, p', \underline{x}_*) - \text{pytanie, przy czym } p < p'$$

$$\langle x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_i^*, \dots, x_{N*} \rangle \prec L_1(\underline{x}^*, p', \underline{x}_*) - \text{odpowiedź}$$

$$\langle x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_i^*, \dots, x_{N*} \rangle ? L_2(\underline{x}^*, p'', \underline{x}_*) - \text{pytanie, przy czym } p < p'' < p'$$

itd.

$$\text{ostatecznie } \langle x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_i^*, \dots, x_{N*} \rangle \sim L_m(\underline{x}^*, p^m, \underline{x}_*) \Leftrightarrow k_i = p^m$$

wartość wagi k_i jest równa takiemu prawdopodobieństwu p^m wygranej, dla którego loteria „rozpięta na” ideale i antyideale jest dla decydenta równoważna tak skonstruowanemu pewnikowi