

ELECTRE Is – plan prezentacji

- **Przypomnienie potrzebnych pojęć**
- **Metoda Electre Is**
 - charakterystyka metody
 - definicja relacji przewyższania
 - definicje współczynników $C(a,b)$ i $D(a,b)$
 - definicja współczynnika $S(a,b)$
 - macierze C , D i S
 - eksploatacja grafu relacji przewyższania

Przypomnienie: elementy logiki i teorii mnogości

- Proste własności relacji
 - Pusta: $\neg(a \text{ Rel } b)$ dla każdego a, b
 - Pełna: $a \text{ Rel } b$ dla każdego a, b
 - Zwrotna: $a \text{ Rel } a$ dla każdego a
 - Przeciwzwrotna: $\neg(a \text{ Rel } a)$ dla każdego a
 - Symetryczna: $a \text{ Rel } b \Rightarrow b \text{ Rel } a$ dla każdego a, b
 - (słabo) Antysymetryczna: $(a \text{ Rel } b \ \& \ b \text{ Rel } a) \Rightarrow a = b$ dla każdego a, b
 - relacja naraz symetryczna i antysymetryczna jest podzbiorem rel. '='
 - Przeciwsymetryczna: $a \text{ Rel } b \Rightarrow \neg(b \text{ Rel } a)$ dla każdego a, b
 - relacja jest przeciwsymetryczna iff jest antysymetryczna i przeciwzwrotna
 - Przechodnia: $(a \text{ Rel } b \ \& \ b \text{ Rel } c) \Rightarrow a \text{ Rel } c$ dla każdego a, b

Przypomnienie: warianty i kryteria

- Relacje pomiędzy wariantami
 - „warunkowe”
 - identyczność (ang. *indiscernibility*): $a \text{ Ind } b$
 - dominacja (ang. *dominance*): $a \text{ Dom } b$
 - „decyzyjne” (globalne)
 - preferencja (ang. *preference*): $a \succ b$ (lub $a \text{ P } b$)
 - nierozróżnialność (ang. *indifference*): $a \sim b$ (lub $a \text{ I } b$)
 - nieporównywalność (ang. *incomparability*): $a ? b$ (lub $a \text{ R } b$)

Uwagi:

preferencję b nad a można zapisać jako $b \succ a$, albo $a \prec b$ ($a \text{ P}^- b$)

do zapisu preferencji służy symbol „ $\succ$ ” (U+227B), odmienny od symbolu zwykłej większości „ $>$ ”

Przypomnienie: warianty i kryteria

- Definicja tzw. spójnej rodziny kryteriów
 - ponieważ nie każdy zbiór kryteriów nadaje się do opisywania wariantów dla celów omawianych problematyk (α , β , γ , δ), definiuje się warunki, które powinny być spełniane przez tego rodzaju zbiory kryteriów
- Aby rodzina kryteriów mogła być nazywana spójną musi spełniać następujące warunki:
 - kompletność
 - monotoniczność
 - nienadmiarowość

Przypomnienie: główne problematyki MCDA

- MCDA definiuje cztery główne problematyki
 - α – „wybór” – wybór najlepszego
 - β – „sortowanie” – przydział do klas jakości
 - γ – „ranking” – porządkowanie od najlepszego do najgorszego
 - δ – „opis” – pozyskiwanie przydatnych charakterystyk
- Problematyki definiowane przez MCDA można podzielić na dwie grupy
 - problematyki porządkujące (α, β, γ)
 - problematyka opisowa (δ)

Przypomnienie: główne problematyki MCDA

- Problematyka α – „wybór” – wybór najlepszego wariantu
 - wielokryterialny wybór najlepszego wariantu (lub najlepszych wariantów, w przypadku gdy warto by decydent zwrócił uwagę na większą liczbę wariantów)
 - najprostsza z problematyk porządkujących
 - rozwiązywana przez m.in. metodę ELECTRE Is

Przypomnienie: paradygmaty wspomagania decyzji

- Metody implementujące
 - model funkcyjny
 - ASSESS
 - UTA
 - model relacyjny
 - na modelu relacyjnym oparta jest rodzina metod Electre
 - omówimy dwie metody: **Electre Is**, Electre TRI
 - w metodach Electre Is oraz TRI relacja przewyższania zdefiniowana jest w bardzo podobny sposób
 - model regułowy
 - DRSA

Przypomnienie: paradygmaty wspomagania decyzji

- Model relacyjny
 - podstawowe pojęcie: relacja (tu: binarna), służąca do formalnego wyrażania zależności pomiędzy dwoma wariantami
- Relacje
 - zależności przedstawione w postaci relacji pozwalają na rozwiązanie konkretnego problemu decyzyjnego (α , β lub γ) stawianego przed metodą implementującą model relacyjny (proces ten nazywamy eksploatacją relacji)
 - ponieważ interesujących decydenta relacji pomiędzy wariantami (czyli relacji „decyzyjnych”, zwanych często globalnymi) jest kilka, często wprowadza się dalsze relacje (tzw. modelujące, zdefiniowane na kryteriach „warunkowych”), za pomocą których generuje się relacje interesujące decydenta
 - w praktyce relacje modelujące definiuje się osobno dla każdego kryterium, a następnie agreguje się je w relacje uwzględniające wszystkie kryteria naraz (podejście wielokryterialne)

Podstawy: relacja przewyższania

- **Relacja przewyższania** (ang. *outranking*)
 - relacja służąca do modelowania zależności między obiektami
 - jej definicja uwzględnia zawsze wszystkie kryteria opisujące warianty (zwane dalej często „warunkowymi”)
 - na podstawie zachodzenia/nie zachodzenia relacji przewyższania wnioskuje się o zachodzeniu relacji P, I oraz R
 - na podstawie relacji zachodzących dla kryteriów „warunkowych” wnioskujemy o relacjach „decyzyjnych”
- **Oznaczenia i interpretacja**
 - oznaczenie odczytywane jako:
 - **aSb** „(wariant) a przewyższa (wariant) b”
 - oznaczenie (dla uproszenia zapisu)
 - **a\$b** „nieprawda, że (wariant) a przewyższa (wariant) b”

Podstawy: relacja przewyższania

- Interpretacja zapisu aSb – można go czytać/rozumieć:
 - „(wariant) **a** jest co najmniej tak dobry jak (wariant) **b**”
 - „(wariant) **a** jest nie gorszy niż (wariant) **b**”
 - „(wariant) **a** dorównuje (wariantowi) **b**”
- Uwagi dotyczące interpretacji
 - jest ważne, aby relację przewyższania rozumieć
 - „słabo” (dorównywanie, bycie równie dobrym, nie gorszym),
a nie
 - „mocno” (bycie lepszym) – to wyraża relacja preferencji
 - w tym sensie **nazwa „relacja przewyższania” jest myląca**
 - relacja **S** jest **zwrotna**, **nie jest przechodnia** (**dlatego musimy ją badać dla każdej pary wariantów**), **nie jest symetryczna**, **nie jest przeciwsymetryczna** (**dlatego musimy badać osobno, czy aSb oraz czy bSa**)

Podstawy: relacja przewyższania

- Definicja relacji P, I, R na podstawie relacji S
 - $aSb \text{ i } bSa \Rightarrow alb$ (a tym samym: bla)
 - $aSb \text{ i } bSa \Rightarrow aPb$
 - $aSb \text{ i } bSa \Rightarrow bPa$
 - $aSb \text{ i } bSa \Rightarrow aRb$ (a tym samym: bRa)
- Definiowanie relacji przewyższania
 - ponieważ na podstawie relacji przewyższania można zdefiniować relacje „decyzyjne”, metody oparte na modelu relacyjnym koncentrują się na dobrym zdefiniowaniu relacji przewyższania (co oczywiście może nie być łatwe)

Metoda Electre Is

- Charakterystyka metody Electre Is
 - rozwiązuje problematykę α
 - realizuje model relacyjny
 - implementowane relacje pomiędzy wariantami: P, I, R ($\succ$, $\sim$, ?)
 - wymagane dane
 - **tabela informacyjna** (warianty, kryteria)
 - **informacja preferencyjna od decydenta**: wagi kryteriów k_i i inne parametry charakteryzujące kryteria (progi nierozróżnialności q_i , preferencji p_i , veto v_i)
 - próg odcięcia λ (dobierany w wyniku analizy wartości wag k_i)
 - aparat matematyczny
 - proste przekształcenia algebraiczne na macierzach zawierających wartościowane relacje binarne
 - operacje grafowe (na grafach skierowanych)

Metoda Electre Is – relacja przewyższania

- Definiowanie relacji przewyższania
 - relacja przewyższania jest zdefiniowana w oparciu o dwa testy
 - tzw. test zgodności z hipotezą o przewyższaniu
 - tzw. test niezgodności z hipotezą o przewyższaniu
 - zachodzenie relacji S pomiędzy wariantami a i b charakteryzuje współczynnik $S(a,b)$, który zdefiniowany jest w oparciu o dwa ustalone wcześniej współczynniki
 - $C(a,b)$ – wyraża test zgodności (ang. *concordance*),
 - $D(a,b)$ – wyraża test niezgodności (ang. *discordance*)
 - wartości współczynników
 - $C(a,b)$ należy do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$
 - $D(a,b)$ należy do zbioru $\{0,1\}$ – wersja uproszczona wobec Electre TRI
 - $S(a,b)$ należy do zbioru $\{0,1\}$

Metoda Electre Is – test zgodności (ogólnie)

- Test ten ma na celu określenie dla każdej uporządkowanej pary wariantów w jakim stopniu można potwierdzić przewyższanie
- Definicja współczynnika zgodności $C(a,b)$
 - $C(a,b)$ powstaje przez zagregowanie współczynników $c_i(a,b)$, czyli współczynników o tym samym znaczeniu, ale dotyczących poszczególnych kryteriów g_i
 - aby pewne (ważniejsze) kryteria mogły bardziej wpływać na wynik tej agregacji dla każdego kryterium definiuje się pewną wagę k_i
 - rolę wagi może odgrywać dowolna dodatnia liczba rzeczywista, często jednak za wagi przyjmuje się dodatnie liczby całkowite
 - agregacja współczynników $c_i(a,b)$ ma charakter addytywny i można wyrazić ją wzorem (**średnia ważona po wszystkich kryteriach**) :

$$C(a,b) = \frac{\sum_{i=1}^N k_i \cdot c_i(a,b)}{\sum_{i=1}^N k_i}$$

Metoda Electre Is – test niezgodności (ogólnie)

- Test ma na celu określenie dla każdej uporządkowanej pary wariantów, czy można wykluczyć przewyższanie
- Definicja współczynnika niezgodności $D(a,b)$
 - $D(a,b)$ powstaje przez zagregowanie współczynników $d_i(a, b)$, dotyczących poszczególnych kryteriów g_i
 - na wynik tej agregacji wszystkie kryteria mają taki sam wpływ
 - dlatego wagi k_i nie są uwzględnione w poniższym wzorze
 - agregacja współczynników $d_i(a,b)$ ma charakter multiplikatywny gdyż można wyrazić ją wzorem:

$$D(a, b) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - d_i(a, b))$$

Uwaga: w tym ‘skomplikowanym’ wzorze współczynnik niezgodności przewyższania a względem b – czyli $D(a, b)$ – przyjmuje wartość 1, jeśli którykolwiek ze współczynników $d_i(a, b)$ ma wartość 1, a 0 wpp

zatem jeśli na choćby jednym kryterium a jest zbyt silnie gorsze od b, to należy zaprzeczyć, że globalnie a przewyższa b

Metoda Electre Is – przewyższanie

- Definicja współczynnika przewyższania $S(a,b)$

- $S(a,b)$ jest zdefiniowany następująco:

$S(a,b)=1$ wtedy i tylko wtedy gdy $C(a,b) \geq \lambda$ oraz $D(a,b)=0$

$S(a,b)=0$ w przeciwnym przypadku

- ponieważ $C(a,b) \in \langle 0, 1 \rangle$ fakt spełniania testu zgodności wyraża się przez porównanie tej wartości z zadany progami odcięcia $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$
 - próg taki nie jest wymagany przy badaniu spełnialności testu niezgodności (bo wartość $D(a,b) \in \{0, 1\}$)
 - wynikowa relacja przewyższania S (w metodzie Electre Is) nie jest relacją wartościowaną
 - fakt jej zachodzenia (lub nie) można więc wyrazić liczbą 1 (lub 0)

Metoda Electre Is – współczynniki zgodności

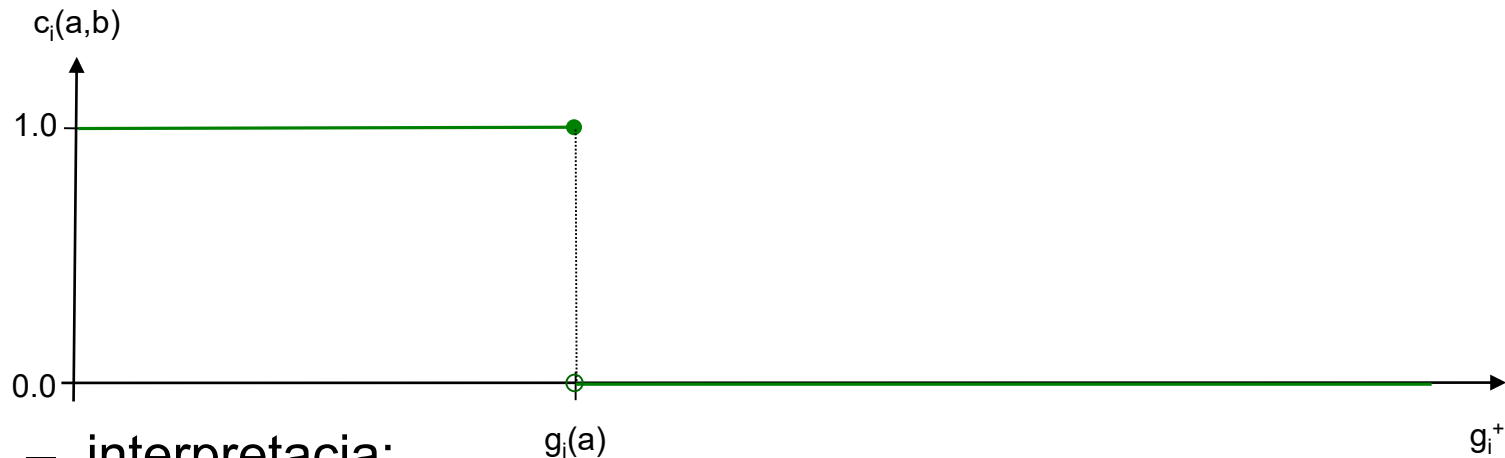
- Idea współczynnika $c_i(a,b)$
 - $c_i(a,b)$ ma wartość 1, gdy przekonanie decydenta o tym, że wariant a jest b na kryterium g_i lepszy lub tak samo dobry jak wariant jest wysokie, a wartość 0 – gdy dla decydenta a jest widocznie gorsze od b , w pośrednich przypadkach współczynnik $c_i(a,b)$ przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$
 - uwaga: bardziej poprawnym oznaczeniem byłoby więc $c_i(g_i(a), g_i(b))$, c_i zależy bowiem bezpośrednio od $g_i(a)$ i $g_i(b)$, a pośrednio od a i b
- stosowane w praktyce oznaczenie $c_i(a,b)$ jest podyktowane zwyczajem zapisu

Metoda Electre Is – współczynniki zgodności

- Współczynnik $c_i(a,b)$ w postaci wykresu
 - wykres ten musiałby jednakże być wykresem dwuwymiarowym, tzn. przedstawiać $c_i(a,b)$ dla zmieniających się jednocześnie a i b (a właściwie dla różnych możliwych wartości $g_i(a)$ i $g_i(b)$)
 - tworzenie takiego wykresu jest jednak bardzo niewygodne
 - dlatego warto przedstawić ten współczynnik w postaci wykresu jednowymiarowego
 - w tym celu trzeba jednak przyjąć, że albo a (a tym samym $g_i(a)$) albo b (a tym samym $g_i(b)$) nie będzie się zmieniało (jest ustalone)
 - przy ustalonym a (a tym samym ustalonym $g_i(a)$) wykres pokazuje $c_i(a,b)$ dla zmieniającego się $g_i(b)$, ustalone $g_i(a)$ jest punktem odniesienia tak stworzonego wykresu
 - natomiast przy ustalonym b (a tym samym ustalonym $g_i(b)$) wykres pokazuje $c_i(a,b)$ dla zmieniającego się $g_i(a)$, ustalone $g_i(b)$ jest punktem odniesienia tak stworzonego wykresu

Metody Electre – współczynniki zgodności

- Wykres **uproszczonego** współczynnika $c_i(a,b)$
 - **wykres dla kryterium g_i typu zysk** (oznaczenie: znak '+' przy nazwie kryterium) przy ustalonym a



– interpretacja:

- dla $g_i(b) \leq g_i(a)$ a jest na pewno równie dobre jak b , a więc $c_i(a,b) = 1$
- gdy $g_i(b)$ przekroczy wartość $g_i(a)$ a przestaje być równie dobre jak b , i $c_i(a,b)$ wynosi 0

Uwaga: takie uproszczenie nie jest stosowane w Electre Is

Metoda Electre Is – współczynniki zgodności

- Idea współczynnika $c_i(a,b)$ (**bez uproszczeń**) – cd.
 - fakt, że współczynnik $c_i(a,b)$ zmienia wartość z 1 na 0 w momencie, gdy wartość $g_i(b)$ przekroczy wartość $g_i(a)$ jest w praktyce niekorzystny (mała elastyczność)
 - w praktyce drobne różnice w wartościach kryterium nie powinny mieć tak silnego wpływu na wartość współczynnika $c_i(a,b)$, a jego zmiana nie powinna mieć natury skokowej
 - gdy różnica pomiędzy $g_i(b)$ i $g_i(a)$ stopniowo zmienia się (przy czym $g_i(b)$ staje się większe niż $g_i(a)$), wartość współczynnika $c_i(a,b)$ powinna także zmieniać się stopniowo a nie skokowo

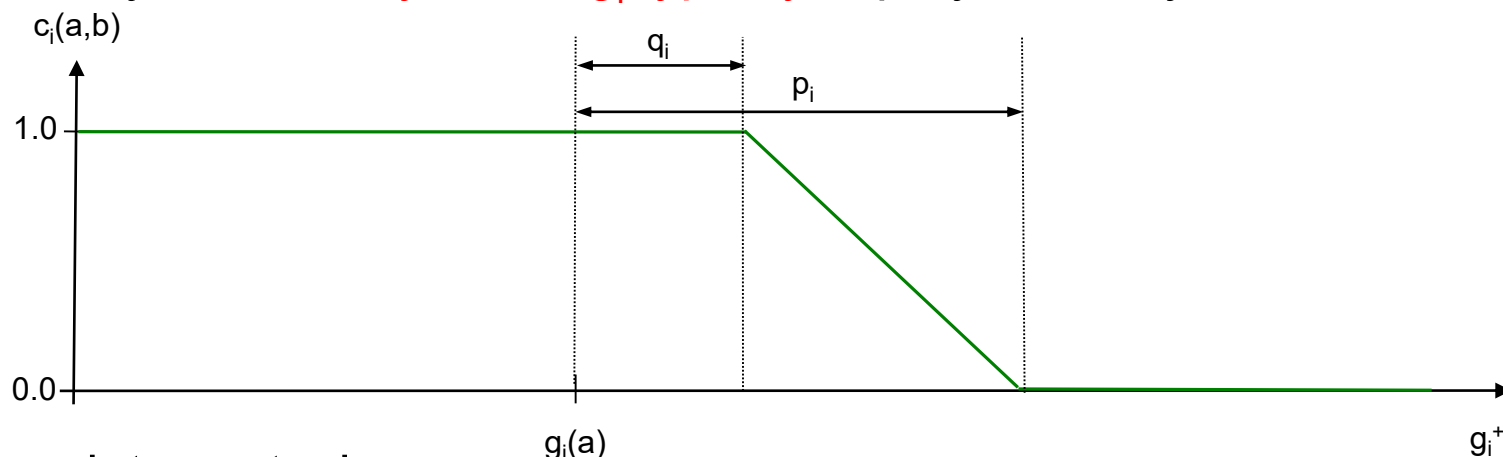
Metoda Electre Is – współczynniki zgodności

- Idea współczynnika $c_i(a,b)$ – cd.
 - powyższe dwa wymagania można to zrealizować wzbogacając wykres (a tym samym definicję) współczynnika $c_i(a,b)$ o dwie wartości (tzw. progi)
 - próg nierozróżnialności q
 - próg preferencji p
 - progi te definiuje się osobno dla każdego kryterium; fakt ten ma odzwierciedlenie w ich oznaczeniach: q_i , p_i
 - punktami charakterystycznymi nowego wykresu stają się punkty $g_i(a)+q_i$ oraz $g_i(a)+p_i$

Metoda Electre Is – współczynniki zgodności

- Wykres współczynnika $c_i(a,b)$

– wykres dla **kryterium g_i typu zysk** przy ustalonym a



– interpretacja:

- dla $g_i(b) \leq g_i(a) + q_i$ a jest na pewno równie dobre jak b , $c_i(a,b) = 1$
- dla $g_i(a) + q_i < g_i(b) < g_i(a) + p_i$ przekonanie to spada, $c_i(a,b) \in \langle 0, 1 \rangle$
- dla $g_i(b) \geq g_i(a) + p_i$ a nie jest równie dobre jak b , $c_i(a,b) = 0$

częstkowy (na pojedynczym kryterium) współczynnik zgodności $c_i(a,b)$ przyjmuje wartość 1, gdy zachodzi pełna zgodność z hipotezą o przewyższaniu (czyli zachodzeniu relacji aSb) w ramach tego kryterium, natomiast wartość 0 oznacza całkowity brak takiej zgodności

Metoda Electre Is – współczynniki niezgodności

- Idea uproszczonego współczynnika $d_i(a,b)$
 - $d_i(a,b)$ jest wysoki gdy przekonanie decydenta o tym, że wariant a jest dużo gorszy niż wariant b na kryterium g_i jest wysokie
 - z oczywistych względów współczynnik $d_i(a,b)$ może być wysoki tylko dla takich a i b , dla których współczynnik $c_i(a,b)$ jest niski
 - wzorując się na definicji uproszczonego współczynnika $c_i(a,b)$ uproszczony współczynnik $d_i(a,b)$ może być zdefiniowany skokowo: przeskok wartości następuje w momencie, w którym różnica wartości pomiędzy $g_i(a)$ oraz $g_i(b)$ wynosi co najmniej v_i , gdzie v_i jest ustalonym z góry progiem (zwanym progiem 'veto')

Uwagi:

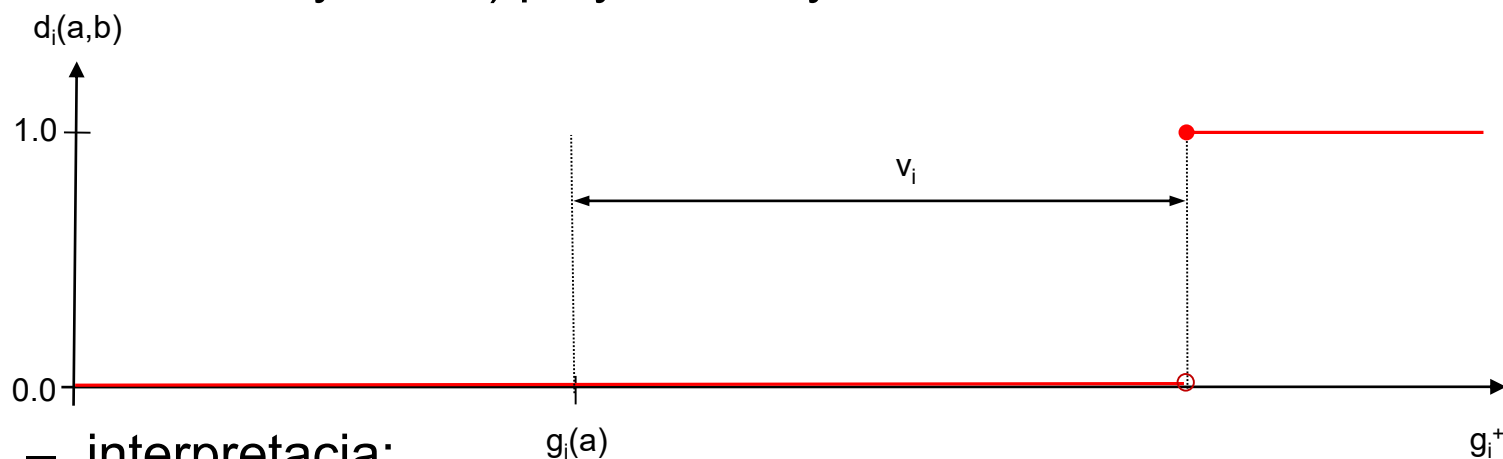
1. W Electre Is wykorzystuje się taką właśnie uproszczoną postać tego współczynnika
2. Veto nie musi być zdefiniowane dla wszystkich kryteriów – zwykle prosi się decydenta, by określił je dla wybranych ważnych kryteriów i krytycznych różnic na wartościach każdego z nich

Metoda Electre Is – współczynniki niezgodności

- Idea uproszczonego współczynnika $d_i(a,b)$ – cd.
 - ostatecznie $d_i(a,b)$ jest zdefiniowane (w zależności od typu kryterium g_i) następująco:
 - gdy g_i jest typu zysk
$$d_i(a,b)=0 \text{ gdy } g_i(b) < g_i(a) + v_i$$
$$d_i(a,b)=1 \text{ gdy } g_i(b) \geq g_i(a) + v_i$$
 - gdy g_i jest typu strata
$$d_i(a,b)=1 \text{ gdy } g_i(b) \leq g_i(a) - v_i$$
$$d_i(a,b)=0 \text{ gdy } g_i(b) > g_i(a) - v_i$$
 - w celu minimalizacji pomyłek w „ręcznych” obliczeniach warto unikać zapamiętywania powyższych wzorów, a w zamian ustalając wartość $d_i(a,b)$ zadać sobie uniwersalne pytanie: „**czy a jest na kryterium g_i gorsze od b o wartość v_i lub więcej?**”
jeśli **tak** (a jest o tyle gorsze od b) to stwierdzamy veto i $d_i(a,b)=1$
jeśli **nie** (a jest lepsze od b lub gorsze o mniej niż v_i), to $d_i(a,b)=0$

Metoda Electre Is – współczynniki niezgodności

- Wykres uproszczonego współczynnika $d_i(a,b)$
 - wykres dla **kryterium g_i typu zysk** (oznaczenie: znak '+' przy nazwie kryterium) przy ustalonym a

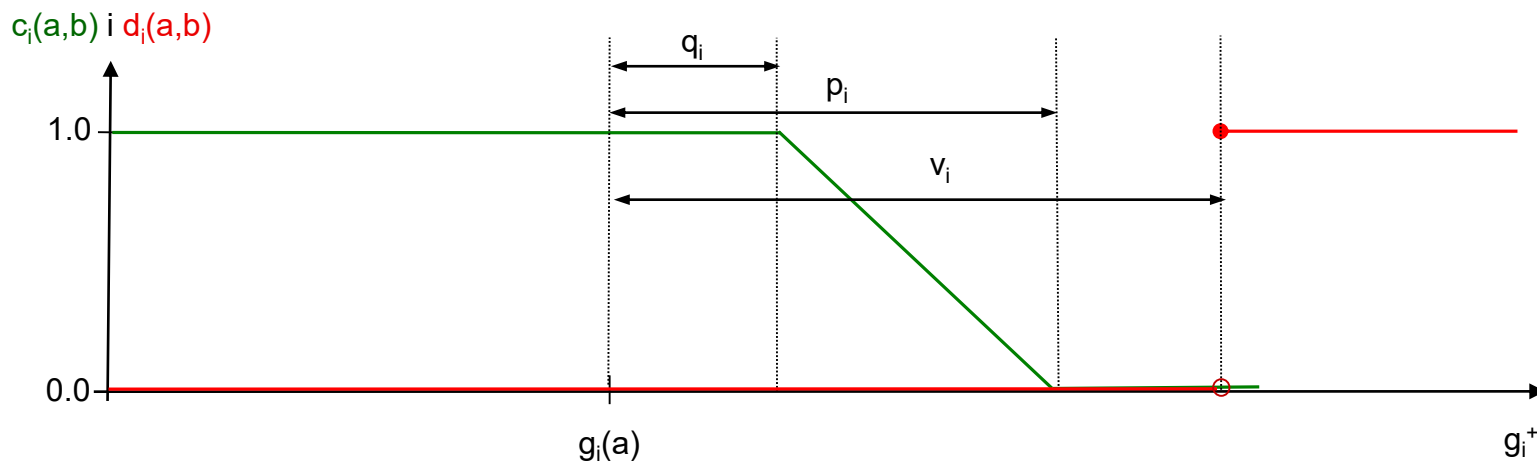


- interpretacja:
 - gdy $g_i(b) < g_i(a) + v_i$, to a nie jest dużo gorsze od b , a więc $d_i(a,b) = 0$
 - gdy $g_i(b)$ osiągnie wartość $g_i(a) + v_i$, to a staje się dużo gorsze od b i $d_i(a,b) = 1$

częstkowy współczynnik niezgodności $d_i(a,b)$ przyjmuje wartość 1, gdy na danym kryterium można zanegować hipotezę o przewyższaniu (czyli zachodzeniu relacji aSb , natomiast 0 jeśli nie ma ku temu podstaw

Metoda Electre Is – zgodność a niezgodność

- Współczynniki $c_i(a,b)$ oraz $d_i(a,b)$ można przedstawić na jednym wykresie
 - wykres dla kryterium g_i typu zysk przy ustalonym a



- wykres ten obrazuje warunek poprawności progów p_i , q_i i v_i :
 - $q_i \leq p_i \leq v_i$

Metoda Electre Is – liniowe progi

- Progi q_i , p_i , v_i w ELECTRE Is nie muszą być stałe. Mogą być wyrażone za pomocą funkcji liniowej
 - przykład: jeśli jeden przedmiot kosztuje 82 000 zł, a drugi 82 400 zł, to można je uznać za nierozróżnialne na tym kryterium (i ustawić próg q_i np. na 500 zł, wtedy różnica cen przedmiotów będzie mniejsza niż próg), ale jeśli porównujemy przedmioty o cenach ok. 400 zł, to próg nierozróżnialności 500 zł jest już zdecydowanie za duży (przedmiot o wartości 400 zł uznany byłby za tak samo drogi, jak przedmiot o wartości 900 zł). Stąd próg należy uzależnić od wielkości cen, jakie porównujemy
 - wartość progu określamy funkcją liniową względem wartości oceny wariantu na danym kryterium:
 - $q_i = \alpha_i^q (g_i(a)) + \beta_i^q$
 - $p_i = \alpha_i^p (g_i(a)) + \beta_i^p$
 - $v_i = \alpha_i^v (g_i(a)) + \beta_i^v$
 - standardowo wartości progów wyznacza się względem wariantu gorszego na danym kryterium g_i z porównywanej pary wariantów (metoda wprost)
- Uwaga: wszystkie parametry definiujące progi podaje decydent w ramach informacji preferencyjnej

Metoda Electre Is – agregacja testów

- Ustalenie wartości współczynników $c_i(a,b)$ oraz $d_i(a,b)$ dla każdego kryterium g_i i pewnej pary wariantów a i b pozwala na obliczenie zagregowanych współczynników $C(a,b)$ i $D(a,b)$
 - do utworzenia współczynników $C(a,b)$ i $D(a,b)$ na podstawie $c_i(a,b)$ i $d_i(a,b)$ wykorzystuje się odpowiednie [wzory agregacyjne](#)

Metoda Electre Is – agregacja testów

- Definicja współczynnika $S(a,b)$
 - ustalenie współczynników $C(a,b)$ i $D(a,b)$ dla pewnej pary wariantów pozwala na utworzenie współczynnika $S(a,b)$ dla tej pary, co jest równoważne z ustaleniem relacji S :
 - $S(a,b)=1 \Leftrightarrow aSb$
natomiast
 - $S(a,b)=0 \Leftrightarrow \neg aSb$
- Ustalenie zachodzenia relacji aSb oraz bSa pozwala na ustalenie relacji „decyzyjnej” zachodzącej dla pary wariantów a i b , tzn.:
 - $aSb \text{ i } bSa \Rightarrow alb$ (relacja I jest symetryczna, a więc także: bla)
 - $aSb \text{ i } \neg bSa \Rightarrow aPb$
 - $\neg aSb \text{ i } bSa \Rightarrow bPa$
 - $\neg aSb \text{ i } \neg bSa \Rightarrow aRb$ (relacja R jest symetryczna, a więc także: bRa)

Metoda Electre Is – macierze C, D, S

- Macierze C, D i S
 - w praktyce współczynniki $C(a,b)$, $D(a,b)$ oraz $S(a,b)$ wygodnie jest przechowywać w macierzach (odpowiednio) C, D i S o rozmiarach $M \times M$, gdzie M jest liczbą wariantów
 - odpowiednie wartości współczynników dla par uporządkowanych (a, b) znajdują się w wierszu a i kolumnie b
- Własności macierzy
 - wartości wszystkich elementów
 - macierzy C należą do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$
 - macierzy D oraz S należą do zbioru $\{0,1\}$
 - wartościami wszystkich elementów głównej przekątnej
 - macierzy C jest 1
 - macierzy D jest 0
 - macierzy S jest 1(pomyśl dlaczego?)

Metoda Electre Is – macierz S

- Macierz S można traktować jako macierz sąsiedztwa grafu skierowanego reprezentującego relację przewyższania S
 - wierzchołki tego grafu reprezentują warianty a jego krawędzie fakt przewyższania wariantu z wiersza względem tego z kolumny
 - wartościami głównej przekątnej macierzy S są (z definicji) jedynki, co wskazywałoby, że graf powinien zawierać auto-krawędzie, czyli krawędzie rozpoczynające się i kończące w jednym i tym samym wierzchołku
 - ponieważ auto-krawędzie nie wnoszą żadnej istotnej informacji do procesu poszukiwania rozwiązania, są one ignorowane i **nie należy ich uwzględniać rysując graf przewyższania**

Metoda Electre Is – jądro grafu S

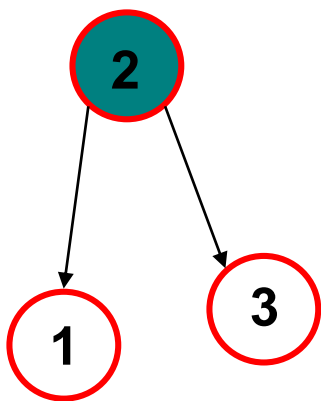
- Eksploatacja grafu relacji przewyższania pozwala na ustalenie ostatecznego rozwiązania dla problemu rozwiązywanego przez metodę Electre Is (czyli problemu wyboru, α)
- w tym celu metoda wyznacza tzw. **jądro grafu przewyższania**, które jest takim podzbiorem wariantów, dla którego zachodzą naraz dwa warunki:
 - żadne dwa warianty należące do jądra nie przewyższają się wzajemnie (tzw. **warunek stabilności wewnętrznej**)
 - każdy wierzchołek nie należący do jądra jest przewyższany przez co najmniej jeden wierzchołek należący do jądra (tzw. **warunek stabilności zewnętrznej**)

Metoda Electre Is – jądro grafu S

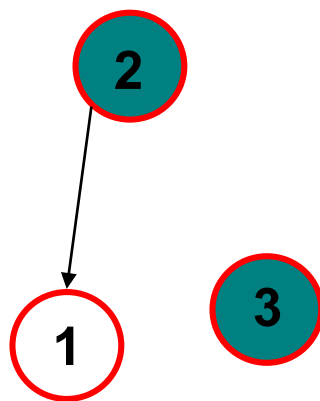
- jądro grafu przewyższania – **praktyczne uwagi**
 - warunek stabilności wewnętrznej (żadne dwa warianty należące do jądra nie przewyższają się wzajemnie) należy rozumieć, jako nieobecność bezpośredniego łuku między każdą parą wariantów z jądra (gdyż relacja S nie jest przechodnia!)
 - warunek stabilności zewnętrznej (każdy wierzchołek nie należący do jądra jest przewyższany przez co najmniej jeden wierzchołek należący do jądra) skutkuje włączeniem do jądra wszystkich wierzchołków początkowych oraz izolowanych
 - jądro grafu skierowanego ustala się tylko dla grafów acyklicznych – jeżeli powstały graf jest cykliczny, to wszystkie jego cykle muszą być usunięte przed rozpoczęciem procedury poszukiwania jądra grafu

Metoda Electre Is – jądro grafu S

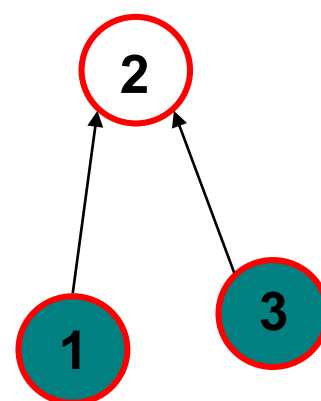
- Przykłady grafów acyklicznych z rozwiązaniami



$K = \{ 2 \}$



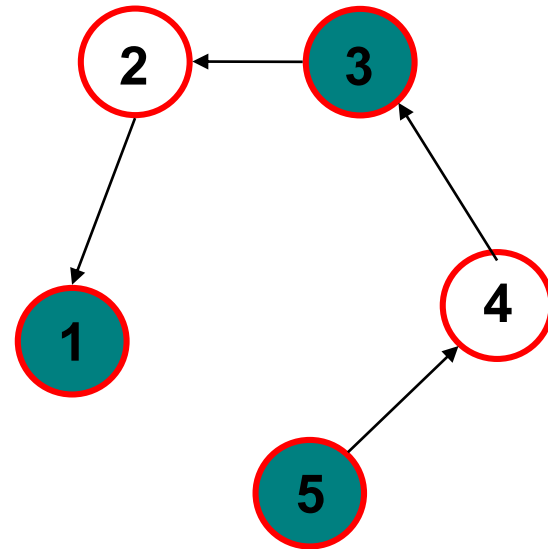
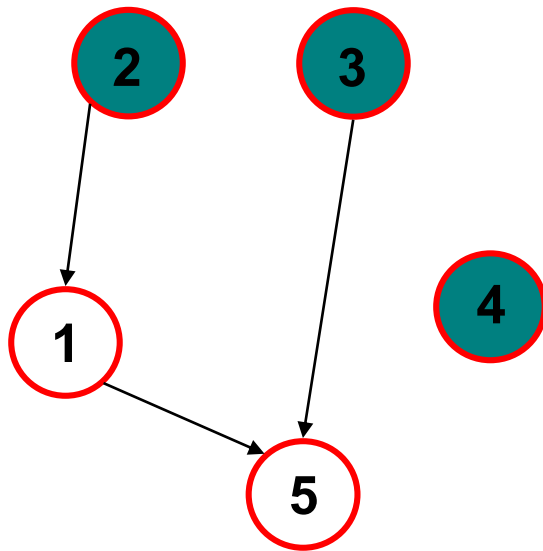
$K = \{ 2, 3 \}$



$K = \{ 1, 3 \}$

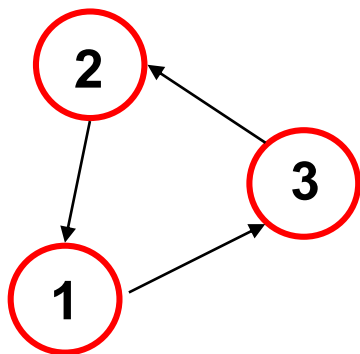
Metoda Electre Is – jądro grafu S

- Przykłady grafów acyklicznych z rozwiązaniami



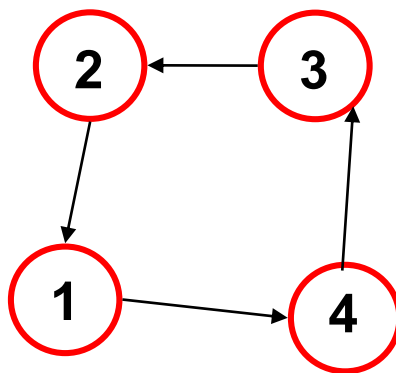
Metoda Electre Is – jądro grafu S

- Gdy grafy są cykliczne wyznaczenie jądra w sposób jednoznaczny może nie być możliwe, np.:



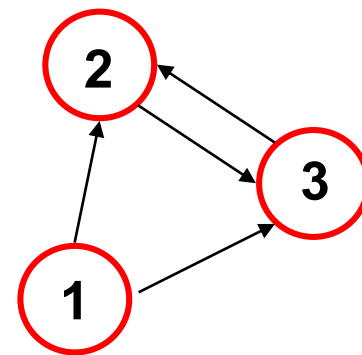
brak rozwiązania

(nie istnieje zbiór wierzch. spełniający warunki nałożone na rozwiązanie)



rozw. niejednoznaczne

(istnieją dwa zbiory wierzch. spełniających warunki rozwiązania: $\{1, 3\}$ i $\{2, 4\}$)



rozw. istnieje

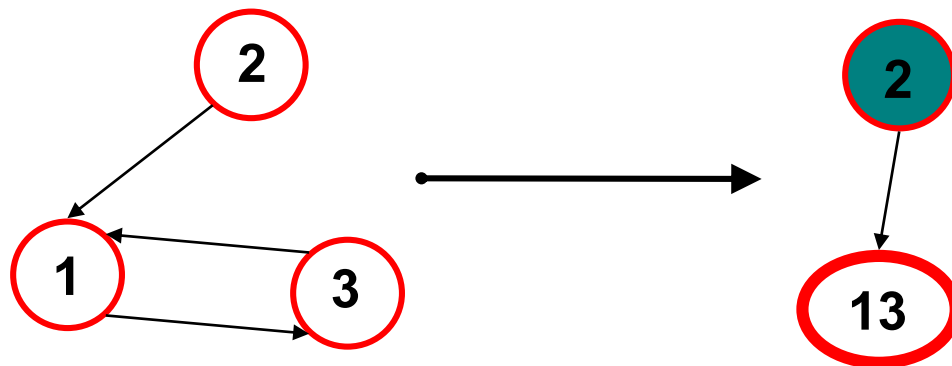
(istnieje zbiór wierzch. spełniający warunki rozwiązania: $\{1\}$)

Metoda Electre Is – jądro grafu S

- Znajdowanie rozwiązania w sytuacji gdy graf jest cykliczny zostaje – dla ujednolicenia postępowania (a tym samym: dla ujednolicenia wyników) – rozłożone na dwa etapy:
 - etap eliminacji cykli
 - eliminuje się wszystkie cykle (także takie, które nie uniemożliwiają znalezienia rozwiązania)
 - właściwy etap poszukiwania jądra grafu
 - dzięki wyeliminowaniu cykli rozwiązanie zawsze istnieje i jest jednoznaczne
- Eliminacja cykli może być zrealizowana np. w taki sposób, że graf przekształcamy do postaci, w której każdy cykl ma postać nowego, sztucznego wierzchołka

Metoda Electre Is – jądro grafu S

- Przykład przekształcanego grafu cyklicznego (wprowadzenie wierzchołków sztucznych) z rozwiązaniem



graf cykliczny

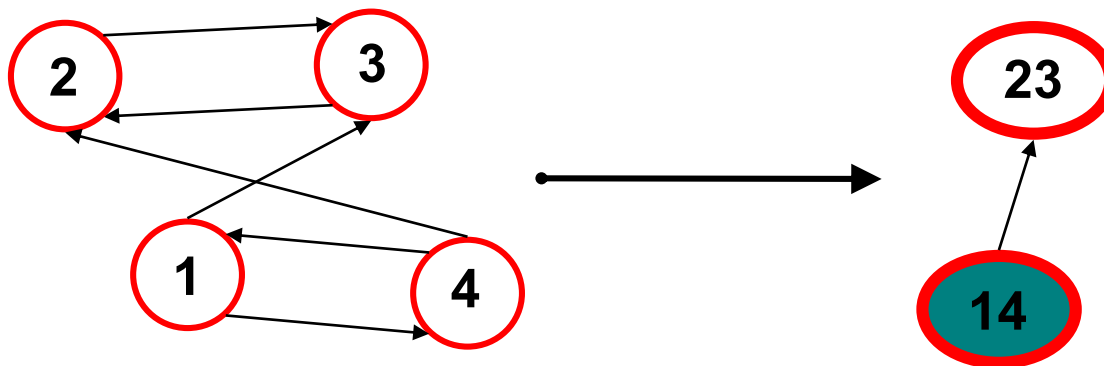
cykl obejmuje wierzchołki 1 i 3

graf acykliczny

wierzchołki 1 i 3 zastąpiono
wierzchołkiem sztucznym 13
rozwiązanie: { 2 }

Metoda Electre Is – jądro grafu S

- Przykład przekształcanego grafu cyklicznego (wprowadzenie wierzchołków sztucznych) z rozwiązaniem



graf cykliczny

jeden cykl: 1 i 4

drugi cykl: 2 i 3

graf acykliczny

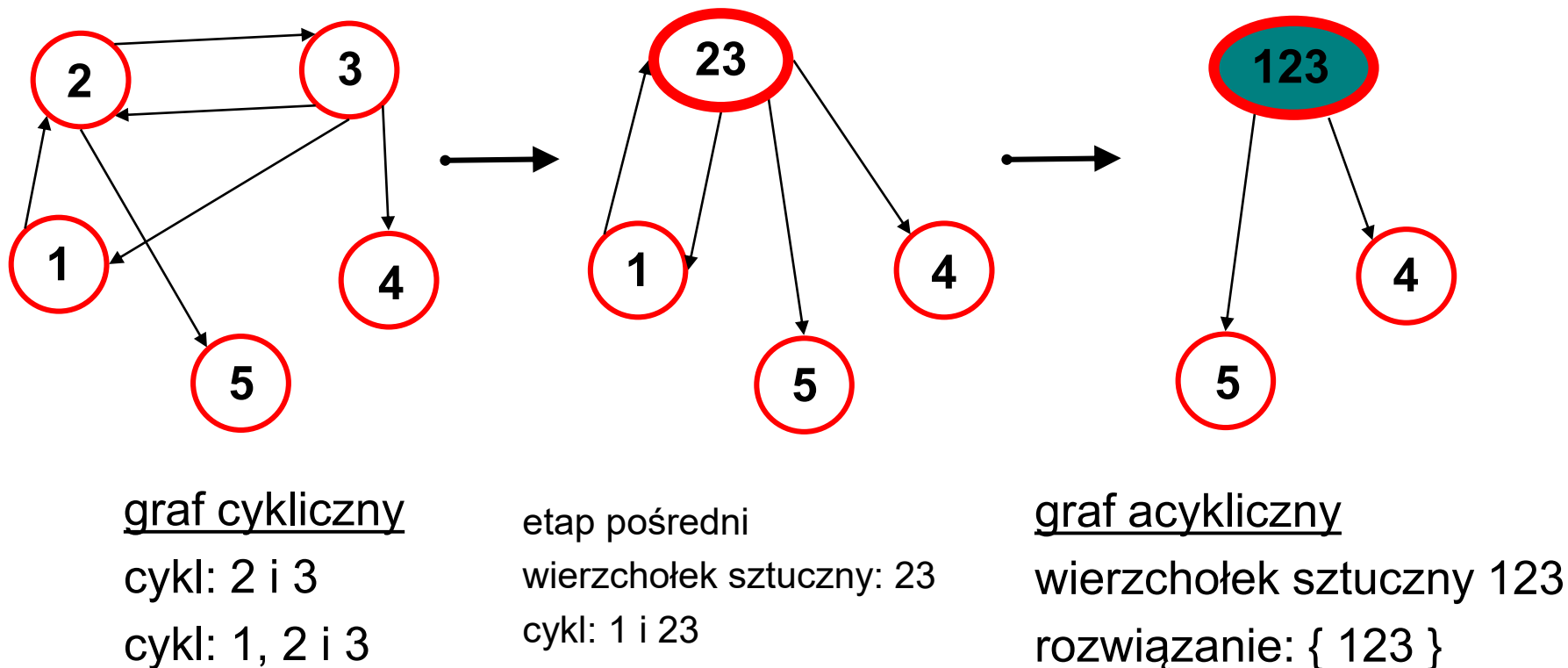
jeden wierzch. sztuczny 14

drugi wierzch. sztuczny 23

rozwiązanie: { 14 }

Metoda Electre Is – jądro grafu S

- Przykład przekształcanego grafu cyklicznego (wprowadzenie wierzchołków sztucznych) z rozwiązaniem



Metoda Electre Is – jądro grafu S

- Algorytm poszukiwania jądra acyklicznego grafu skierowanego
 - algorytm działa wykorzystując (bezpośrednio) zbiór wierzchołków i (pośrednio) zbiór krawędzi grafu
 - generuje zbiór K (zbiór wierzchołków należących do jądra grafu) oraz zbiór R (zbiór wszystkich pozostałych wierzchołków grafu)

Metoda Electre Is – jądro grafu S

- Algorytm poszukiwania jądra acyklicznego grafu skierowanego, cd.:
 - podstawienia początkowe: niech G będzie zbiorem wszystkich wierzchołków grafu oraz $K = \emptyset$ i $R = \emptyset$ (K – kernel, R – rest)
 - pętla główna algorytmu: dopóki G jest niepusty
 - niech x będzie dowolnym elementem zbioru G
 - dopóki x posiada jakiekolwiek poprzedniki w zbiorze G
 - pod x podstaw dowolnego poprzednika wierzchołka x
 - przenieść wierzchołek x ze zbioru G do zbioru K
 - przenieść wszystkie następniki wierzchołka x ze zbioru G do zbioru R
 - wynik: zbiór K

Metoda Electre Is – rozwiązanie

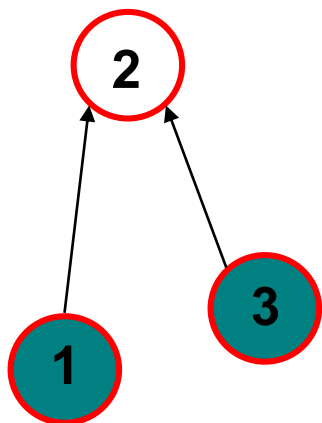
- Ostatecznym rozwiązaniem zadania stawianego przed metodą Electre Is jest **znalezienie zbioru najbardziej interesujących wariantów** (problematyka α)
 - ponieważ warianty są reprezentowane przez wierzchołki tworzonego przez metodę grafu skierowanego to problem ten sprowadza się do znalezienia **jądra grafu skierowanego**
 - ze względu na nieprzechodność relacji S oraz związane z tym badanie przewyższania między każdą uporządkowaną parą wariantów, **do jądra grafu przewyższania mogą należeć wierzchołki początkowe, pośrednie, a nawet końcowe**
 - w jądrze typowo znajdzie się **po jednym najlepszym wariantcie** z istniejących w zbiorze grup jakoś „podobnych” wariantów (np. najlepszy spośród tanich wariantów o przeciętnych parametrach oraz najlepszy z droższych o bardzo dobrych parametrach)

Metoda Electre Is – rozwiązanie

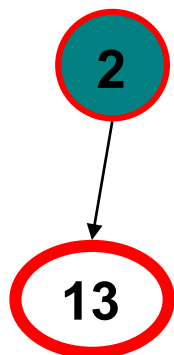
- W niektórych sytuacjach jeden wierzchołek odpowiada kilku wariantom (kiedy powstał ze „sklejenia” cyklu)
 - należy wówczas pamiętać, że do zbioru najbardziej interesujących wariantów wchodzi wszystkie warianty „ukryte” w wierzchołkach należących do jądra grafu
 - wniosek: zbiór najbardziej interesujących wariantów może być liczniejszy od zbioru wierzchołków stanowiącego jądro grafu skierowanego

Metoda Electre Is – rozwiązanie

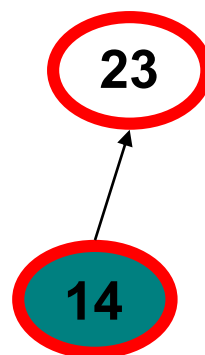
- Przykłady prostych grafów i ostatecznych rozwiązań proponowanych przez metodę Electre Is



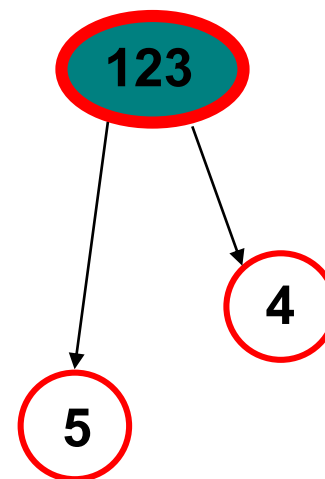
jądro: { 1,3 }
najbardziej
interesujące
warianty: 1,3



jądro: { 2 }
najbardziej
interesujące
warianty: 2



jądro: { 14 }
najbardziej
interesujące
warianty: 1, 4



jądro: { 123 }
najbardziej
interesujące
warianty: 1,2,3