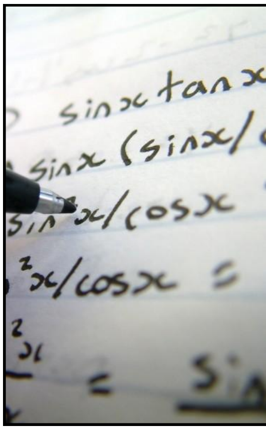


Wprowadzenie do informatyki

Jerzy Nawrocki
Wydział Informatyki
Politechnika Poznańska
jerzy.nawrocki@put.poznan.pl

Metody numeryczne

Wprowadzenie do informatyki

Obliczenia i metody numeryczne

$\sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + (b/a)^2} = b\sqrt{1 + (a/b)^2}$

```
begin
a:= 3e-25; b:= 4e-25;
m:= sqrt(a*a + b*b);
writeln(m)
end.
```

```
begin
a:= 3e-25; b:= 4e-25;
if a > b then
  m:= a*sqrt(1+ (b/a)*(b/a))
else
  m:= b*sqrt(1+ (a/b)*(a/b));
writeln(m)
end.
```

0.0000000000E+00 ≠ 5.0000000000E-25

Metody numeryczne (2)

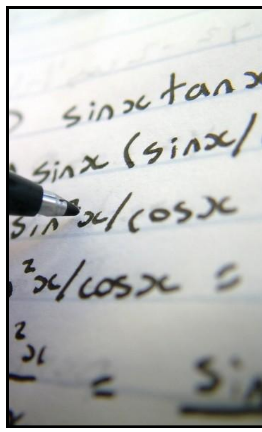
Wprowadzenie do informatyki

Cel wykładu

Przedstawić:

- klasyczną reprezentację liczb rzeczywistych
- sposób obliczania tzw. funkcji standardowych (e^x, cos x, π)
- szybką metodę obliczania wartości wielomianu

Metody numeryczne (3)



Wprowadzenie do informatyki

Plan wykładu

- **Reprezentacja liczb rzeczywistych**
- **Metoda stycznych i √x**
- **Wzór Maclaurina i funkcje e^x, cos x**
- **Wielomiany i schemat Hornera**

Metody numeryczne (4)

Wprowadzenie do informatyki

Reprezentacja stałopozycyjna

0	0	1	0	1	1	0	0

Część całkowita | Część ułamkowa

Metody numeryczne (5)

Wprowadzenie do informatyki

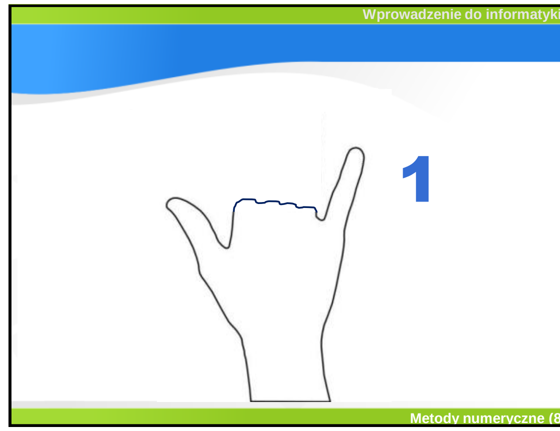
Reprezentacja stałopozycyjna

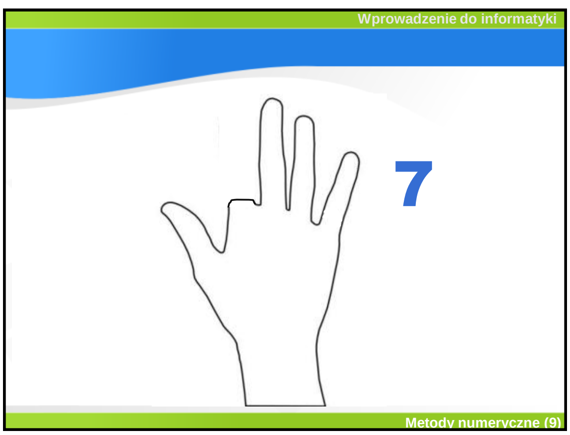
s	a_3	a_2	a_1	a_0	b_1	b_2	b_3	b_4

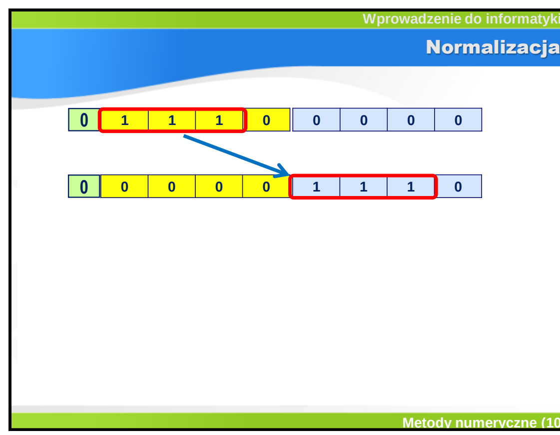
$(-1)^{s}\left(a_3\cdot2^3 + a_2\cdot2^2 + a_1\cdot2^1 + a_0\cdot2^0 + b_1\cdot2^{-1} + b_2\cdot2^{-2} + b_3\cdot2^{-3} + b_4\cdot2^{-4}\right)$

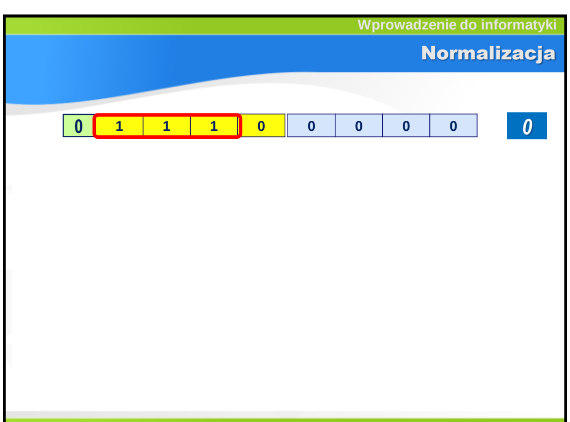
Metody numeryczne (6)

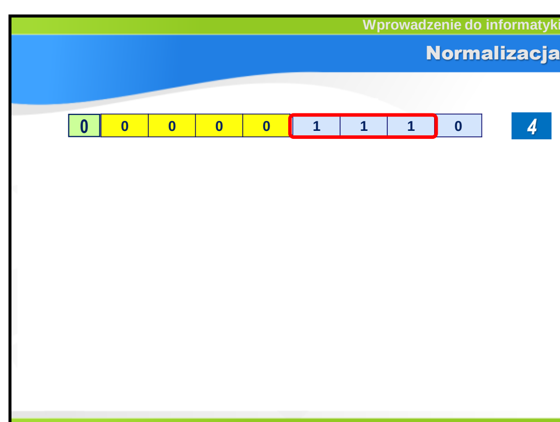

Wprowadzenie do informatyki
Reprezentacja stałopozycyjna – Wada
0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 1 1 1
Metody numeryczne (7)

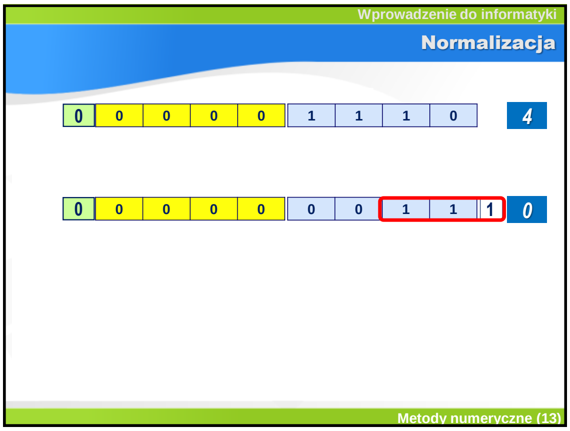

Wprowadzenie do informatyki
1
Metody numeryczne (8)

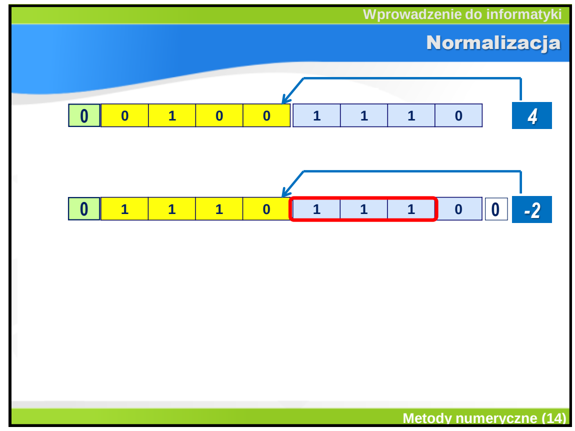

Wprowadzenie do informatyki
7
Metody numeryczne (9)

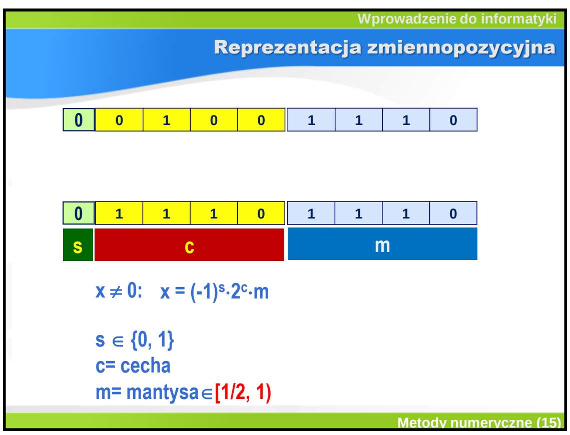

Wprowadzenie do informatyki
Normalizacja
0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 1 1 0
Metody numeryczne (10)

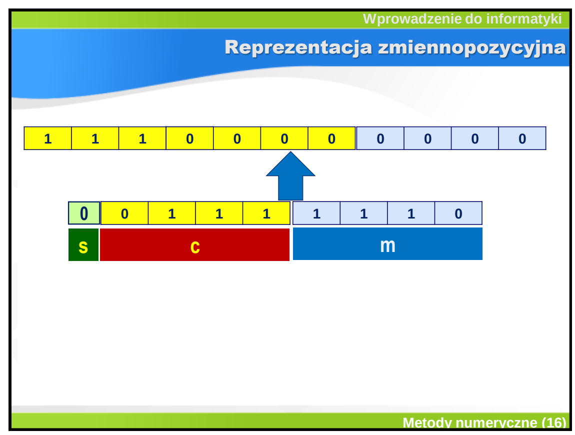

Wprowadzenie do informatyki
Normalizacja
0 1 1 1 0 0 0 0 0
0
Metody numeryczne (11)


Wprowadzenie do informatyki
Normalizacja
0 0 0 0 0 1 1 1 0
4
Metody numeryczne (12)

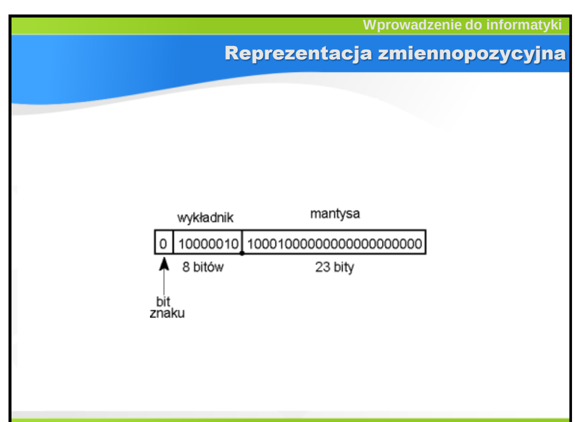

Wprowadzenie do informatyki
Normalizacja
0 0 0 0 0 1 1 1 0
4
0 0 0 0 0 0 0 1 1 1
0
Metody numeryczne (13)


Wprowadzenie do informatyki
Normalizacja
0 0 1 0 0 1 1 1 0
4
0 1 1 1 0 1 1 1 0 0
-2
Metody numeryczne (14)

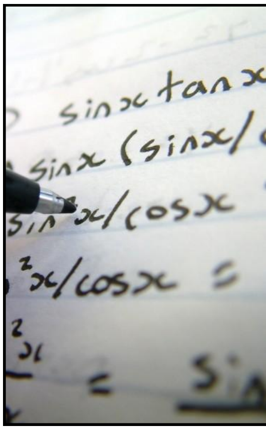

Wprowadzenie do informatyki
Reprezentacja zmiennopozycyjna
0 0 1 0 0 1 1 1 0
0 1 1 1 0 1 1 1 0
s
c
m
x ≠ 0: x = (-1)^s·2^c·m
s ∈ {0, 1}
c= cecha
m= mantysa ∈ [1/2, 1)
Metody numeryczne (15)


Wprowadzenie do informatyki
Reprezentacja zmiennopozycyjna
1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 0
s
c
m
Metody numeryczne (16)


Wprowadzenie do informatyki
Reprezentacja zmiennopozycyjna
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0
0 1 0 0 0 1 1 1 0
s
c
m
8 ≡ 7 + 12
Metody numeryczne (17)


Wprowadzenie do informatyki
Reprezentacja zmiennopozycyjna
wykładnik
mantysa
0
10000010
10001000000000000000000
8 bitów
23 bity
bit znaku
Metody numeryczne (18)

Plan wykładu



- Reprezentacja liczb rzeczywistych
- **Metoda stycznych i √x**
- Wzór Maclaurina i funkcje e^x, cos x
- Wielomiany i schemat Hornera

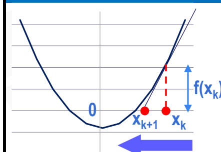
Obliczanie pierwiastków

$g(a) = \sqrt{a}$

Transformacja do problemu znajdowania miejsca zerowego f(x)

$f(x) = x^2 - a$

Metoda stycznych (metoda Newtona):



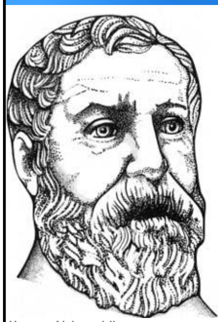
Geom. interpretacja pochodnej:

$f'(x_k) = f(x_k) / (x_k - x_{k+1})$

gdzie $f'(x) = 2x$. Po przekształceniu:

$x_{k+1} = ½ (x_k + a/x_k)$

Iteracyjne algorytmy numeryczne



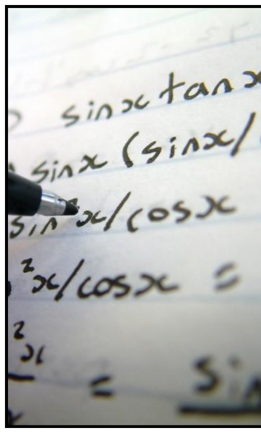
Heron z Aleksandrii
Rycina z niemieckiego tłumaczenia *Pneumatyki* z 1688 r.
http://pl.wikipedia.org/wiki/Heron_z_Aleksandrii

Algorytm Herona obliczania pierwiastka kwadratowego *a*

$$x_1 = \begin{cases} a & \text{jeśli } a >= 1 \\ 1 & \text{jeśli } a < 1 \end{cases}$$

$x_{k+1} = ½ (x_k + a/x_k)$

Plan wykładu



- Reprezentacja liczb rzeczywistych
- Metoda stycznych i √x
- **Wzór Maclaurina i funkcje e^x, cos x**
- Wielomiany i schemat Hornera

Wzór Taylora

Brook Taylor
1685 - 1731

1703 – 1709: Cambridge University

1712: Royal Society

1715: Wzór Taylora (szereg Taylora) (bez dowodu)

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}.$$

Wzór Maclaurina

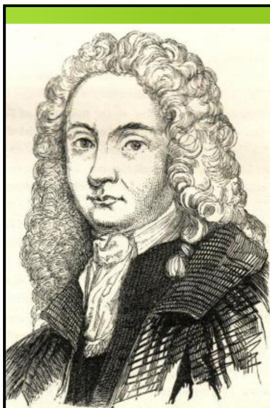
Colin Maclaurin (1698 – 1746)

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}.$$

Dla $x_0 = 0$ dostajemy:

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

Wprowadzenie do informatyki



Colin Maclaurin (1698 – 1746)

Wzór Maclaurina

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{N} \frac{\boxed{f^{(k)}(0)}\, x^k}{k!}$$

f(x) = e^x

- $(e^x)' = e^x$
- $e^0 = 1$

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{N} x^k / k!$$

$e^x \cong x^0/0! + x^1/1! + x^2/2! + x^3/3! + ..$

$= 1 + x / 1! + x^2/2! + x^3/3! + ..$

Metody numeryczne (25)

Wprowadzenie do informatyki

e^x

$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + ...$

e(1) = 2,71..
e(0) = 1

$T = \frac{num}{den}$ $\quad \frac{1}{1} \quad \frac{x}{1!} \quad \frac{x^2}{2!} \quad \frac{x^3}{3!}$

Metody numeryczne (26)

Wprowadzenie do informatyki

e^x

$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + ...$

e(1) = 2,71..
e(0) = 1

$T = \frac{num}{den}$ $\quad \frac{1}{1} \xrightarrow[*1]{*x} \frac{x}{1!} \xrightarrow[*2]{*x} \frac{x^2}{2!} \xrightarrow[*3]{*x} \frac{x^3}{3!}$

Metody numeryczne (27)

Wprowadzenie do informatyki

e^x

$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + ...$

e(1) = 2,71..
e(0) = 1

```
void main(){
  float x;          // Argument e(x)
  scanf("%g", &x);
  printf("e(%g)= %g\n", x, e(x));
  return;
  }
```

Metody numeryczne (28)

Wprowadzenie do informatyki

Colin Maclaurin (1698 – 1746)

Wzór Maclaurina

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{N} \frac{\boxed{f^{(k)}(0)}\, x^k}{k!}$$

f(x) = cos x

• $(\cos x)^{(0)} = \cos x$	1
• $(\cos x)' = -\sin x$	0
• $(\cos x)'' = -\cos x$	-1
• $(\cos x)^{(3)} = \sin x$	0
• $(\cos x)^{(4)} = \cos x$	1
• . . .	

$\cos x \approx 1 + 0 - x^2/2! + 0 + x^4/4! + ..$

Metody numeryczne (29)

Wprowadzenie do informatyki

cos(x)

$\cos x \approx 1 + 0 - x^2/2! + 0 + x^4/4! + ..$

cos(0) = 1
cos(1,57..) = 0

$T = \frac{num}{den}$ $\quad \frac{1}{1} \xrightarrow[*1*2]{*(-x^2)} \frac{-x^2}{2!} \xrightarrow[*3*4]{*(-x^2)} \frac{x^4}{4!}$

Metody numeryczne (30)

π

Colin Maclaurin (1698 – 1746)

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

tg(π/4)= ???

arctg(1) = π/4

$$\mathrm{arctg}(x) = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

$\pi/4 = 1 - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$

$= 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$

π

$\pi = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$

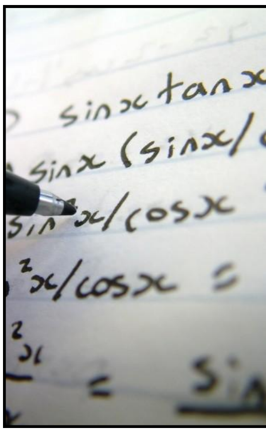
$$T = \frac{num}{den}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{-1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{-1}{7}$$

*(-1) *(-1) *(-1)

+2 +2 +2

Plan wykładu



- Reprezentacja liczb rzeczywistych
- Metoda stycznych i √x
- Wzór Maclaurina i funkcje e^x, cos x
- **Wielomiany i schemat Hornera**

Wielomiany

$$p(x) = \sum_{k=0} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

```
float p(float x, int n, float a[ ])
...
#define MaxN 50
void main(){
  float x;            // Zmienna x
  int   n;            // Stopien wielomianu
  float a[MaxN+1]; // Wspolczynniki wielomianu
  ...
  printf("%g\n", p(x, n, a));
  return;
}
```

Nagłówek p

Wywołanie p

Wielomiany

$$p(x) = \sum_{k=0} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

```
float p(float x, int n, float a[ ]){
   float result, PowerX;
   int k = 0;
   PowerX = 1;
   result = a[0] * PowerX;
   while (k < n){
      k = k+1;
      PowerX = PowerX * x;
      result = result + a[k] * PowerX;
   }
   return result;
}
```


Schemat Hornera

$p(x,n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_{n-1}x^1 + a_n$

$p(x,0) = a_0$

$p(x,1) = a_0x + a_1$

$p(x,2) = a_0x^2 + a_1x + a_2$

$p(x,3) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

$p(x,4) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

Obliczanie wielomianu – schemat Hornera

$p(x,n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_{n-1}x^1 + a_n$

$p(x,0) = a_0$

$p(x,1) = a_0x + a_1 = p(x, 0)x + a_1$

$p(x,2) = a_0x^2 + a_1x + a_2$

$p(x,3) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

$p(x,4) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

Obliczanie wielomianu – schemat Hornera

$p(x,n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_{n-1}x^1 + a_n$

$p(x,0) = a_0$

$p(x,1) = a_0x + a_1 = p(x, 0)x + a_1$

$p(x,2) = a_0x^2 + a_1x + a_2 = (a_0x^1 + a_1)x + a_2 = p(x,1)x+a_2$

$p(x,3) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

$p(x,4) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

Obliczanie wielomianu – schemat Hornera

$p(x,n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_{n-1}x^1 + a_n$

$p(x,0) = a_0$

$p(x,1) = a_0x + a_1 = p(x, 0)x + a_1$

$p(x,2) = a_0x^2 + a_1x + a_2 = (a_0x^1 + a_1)x + a_2 = p(x,1)x+a_2$

$p(x,3) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 =$

$= (a_0x^2 + a_1x^1 + a_2)x + a_3 = p(x,2)x + a_3$

$p(x,4) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 =$

$= (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3)x + a_4 = p(x,3)x + a_4$

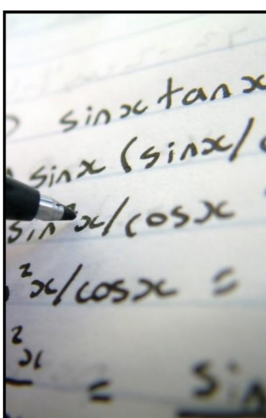
$p(x,n) = p(x, n-1)x + a_n$

Schemat Hornera

$p(x,n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_{n-1}x^1 + a_n$

$p(x,0) = a_0$

$p(x,n) = p(x, n-1)x + a_n$



Plan wykładu

- Reprezentacja liczb rzeczywistych
- Metoda stycznych i √x
- Wzór Maclaurina i funkcje e^x, cos x
- Wielomiany i schemat Hornera
- **Uwarunkowanie zadania**

Źle uwarunkowane zadania

Zadanie źle uwarunkowane:

Niewielkie względne zmiany danych → duże względne zmiany wyniku

$$p(x) = a_{20}\, x^{20} + \ldots + a_1\, x + a_0 = \prod_{k=1}^{20}(x-k) = 0$$

$x = 1, 2, \ldots, 20$

$a_{19} = -210 \rightarrow a_{19} = -(210 + 2^{-23})$

$x = 15 \rightarrow x = 13{,}99 + 2{,}5i$