L'utilisation de l'intégrale de Choquet en aide multicritère à la décision

Michel GRABISCH
Université Paris I - Panthéon-Sorbonne
Michel.Grabisch@lip6.fr

1. Introduction

Si l'intégrale de Choquet est une notion qui est apparue en 1953 (et même bien avant : en 1925, Vitali avait déjà proposé cette notion), il faut attendre les années 90 pour voir les premières applications en aide multicritère à la décision (MCDA), essentiellement faites au Japon (voir [1] pour une brève description de celles-ci). Depuis, la théorie s'est étoffée de nouveaux concepts pour l'aide multicritère, comme la notion d'interaction, et une méthodologie s'est développée, ainsi que des outils informatiques, si bien que maintenant il est tout à fait possible d'utiliser l'intégrale de Choquet dans des applications pratiques. Ce bref article a pour but d'introduire à cette méthodologie, et ne nous permet pas de donner une exposition technique complète ni une bibliographie détaillée. Le lecteur intéressé pourra consulter en particulier [2, 6] pour plus de détails.

2. Insuffisance de la somme pondérée et naissance de l'intégrale de Choquet

Bien que la plupart des méthodes existantes en MCDA se basent sur la somme pondérée, et ce pour des raisons évidentes de simplicité, il est bien connu que celle-ci présente des défauts fondamentaux qu'il n'est pas possible d'éliminer. Nous illustrons ceci par un exemple.

Example 1 : Considérons un problème MCDA à 2 critères, et 3 objets *a, b, c*, dont les scores sur les critères sont:

$$u_1(a) = 0.4 \quad u_1(b) = 0 \quad u_1(c) = 1$$
$$u_2(a) = 0.4 \quad u_2(b) = 1 \quad u_2(c) = 0$$

en supposant que les scores sont donnés sur une échelle de 0 à 1. Le décideur a comme préférence $a \succ b \sim c$. Cherchons w_1, w_2 tels que ce choix soit représenté par la somme pondérée. On obtient :

$$b \sim c \;\&\; \Leftrightarrow w_1 = w_2$$
$$a \succ b \;\&\; \Leftrightarrow 0.4\,(w_1 + w_2) > w_2$$

équivalent à $0.8\ w_2 > w_2$, ce qui est impossible. □

Comment expliquer cette contradiction ? Pour cela, il faut comprendre la signification des poids w_1, w_2. Il est bien connu qu'un poids sur un critère n'a pas de sens en soi, mais seulement dans un modèle donné. Pour la somme pondérée, w_1 est en fait le score global d'un objet ayant un score totalement satisfaisant (1) sur le premier critère, et inacceptable (0) sur les autres. Cependant, notre décideur est plus satisfait par un objet jugé de façon égale sur les deux critères, même si ce jugement reste moyen, que par un objet présentant une évidente faiblesse sur un des deux critères.

Il serait possible de tenir compte de cette préférence bien naturelle en considérant non pas que des poids sur les critères pris individuellement, mais aussi des poids définis pour des groupes de critères. Dans notre cas très simple à deux critères, cela revient à introduire un poids w_{12} sur les deux critères considérés ensemble, et nous gardons comme interprétation que w_{12} est le score global attribué à un objet étant totalement satisfaisant sur les deux critères.

Cet objet étant par conséquent le plus satisfaisant possible (car seulement 2 critères), il convient de lui donner le score maximal, soit 1. Afin de modéliser le fait que le décideur considère un objet ne satisfaisant qu'un des 2 critères comme peu acceptable, nous pourrions donner à w_1, w_2 une même valeur assez faible, 0.3 par exemple. Essayons maintenant de réinventer la somme pondérée en tenant compte du nouveau poids w_{12}. En s'en tenant à l'interprétation des poids ci-dessus, il est facile de calculer les scores globaux de *a, b, c* :

- *a* a ses scores égaux sur les deux critères, cela correspond donc à la situation représentée par w_{12}, au facteur 0.4 près. En supposant la propriété d'homogénéité du modèle, on pose donc comme score global $u(a) = 0.4\ w_{12} = 0.4$.
- *b, c* correspondent respectivement aux situations décrites par w_2, w_1. On pose donc $u(b) = w_2 = 0.3$, $u(c) = w_1 = 0,3$.

Les préférences du décideur sont modélisées. On voit que pour w_2, w_1 il aurait suffit de prendre n'importe quel chiffre entre 0 et 0.4 exclus. On voit aussi qu'il serait facile de modéliser n'importe quelle préférence entre *a, b, c* avec cette méthode.

Le lecteur peut cependant arguer que ce cas était extrêmement simple, car les scores correspondaient exactement aux situations décrites par les poids. Prenons alors un exemple plus compliqué : considérons un objet *d* dont les scores sont 0.2 et 0.8 respectivement (on peut supposer que notre décideur préférera *d* à *b* et *c*, mais sans doute préférera-t-il toujours *a* à *d*). En fait, on peut considérer que notre objet *d* est la somme de deux objets fictifs *d'*, *d''* définis par les scores suivants :

$$u_1(d') = u_2(d') = 0.2$$
$$u_1(d'') = 0,\ u_2(d'') = 0.6.$$

En supposant notre modèle linéaire, le score global de *d* sera la somme de scores de *d'* et *d''*. Or nous pouvons calculer ces derniers car ils correspondent à des situations décrites par des poids. Ainsi nous obtenons :

$$u(d') = 0.2\ w_{12} = 0.2$$
$$u(d'') = 0.6\ w_2 = 0.18$$
$$u(d) = u(d') + u(d'') = 0.38.$$

Remarquons que nous obtenons l'ordre de préférence désiré : $a \prec d \prec b \sim c$.

Cette méthode pour calculer le score global n'est en fait rien d'autre que l'intégrale de Choquet, et les poids sur les groupes de critères définissent une *capacité* ou *mesure floue*. En géneralisant le calcul ci-dessus à *n* critères, on arrive aisément aux définitions suivantes.

Définition 1 : *Soit $N = \{1,\ldots, n\}$ un ensemble de critères. Une capacité sur N est une fonction μ : $2^N \rightarrow [0,1]$ vérifiant $\mu(\emptyset)=0$, $\mu(N) = 1$, et $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subseteq B$ (monotonie).* □

La condition de monotonie provient du fait que l'importance d'un groupe de critères ne peut décroître si on ajoute un critère au groupe.

Définition 2 : *Soit μ une capacité sur N, et $f : N \rightarrow \Re$ une fonction représentant les scores d'un objet sur les n critères. L'* intégrale de Choquet *de f par rapport à μ (score global de l'objet) est donné par :*

$$C_\mu(f) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(\sigma(i)) - f(\sigma(i-1)) \right] \mu(A_i)$$

avec $A_i := \{\sigma(i),\ldots,\sigma(n)\}$, $f(\sigma(0))=0$, et σ est une permutation sur N telle que $f(\sigma(1)) \leq f(\sigma(2)) \leq \ldots \leq f(\sigma(n))$. □

3. Importance et interaction des critères

Supposons que nous ayons une capacité μ décrivant les poids sur les groupes de critères (nous verrons plus loin comment l'obtenir). Si l'interprétation des poids sur les critères d'une somme pondérée va de soi, il n'en est pas de même pour une capacité μ, car il y a 2^n coefficients ! Une première question naturelle est la suivante : dans un problème MCDA où l'on cherche à construire un modèle, il importe de savoir quels sont les critères importants et ceux qui sont négligeables. Par définition même d'une capacité, on pourrait penser qu'il suffit de regarder les valeurs de μ sur tous les singletons (critères pris individuellement). Que dire alors de l'exemple suivant avec 3 critères :

A	1	2	3
$\mu(A)$	0	0.2	0.2
A	12	13	23
$\mu(A)$	0.8	0.8	0.4

Puisque $\mu(1) = 0$, on pourrait conclure que le critère 1 est inutile. Cependant, un examen des valeurs montre que chaque fois que le critère 1 est ajouté a un groupe de critère *A*, la *valeur ajoutée* par le critère 1 est considérable: 0.6 quand $A = 2$ ou 3 ou 23. Il semble donc que ce critère soit en fait très important. Comment définir un *indice d'importance* ϕ qui rende compte de cela ? Cet exemple suggère que cet indice devrait être une moyenne des quantités $\mu(A \cup \{1\})$ - $\mu(A)$, pour tous les groupes *A* possibles (y compris $A= \emptyset$). En imposant de plus que la somme des indices sur tous les critères fasse 1, Shapley a montré que la seule définition possible est la suivante :

$$\phi(\mathrm{i}) = \sum_{A\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{(n-a-1)!a!}{n!} \times$$
$$\times\left[\mu(A\cup\{i\}) - \mu(A)\right]$$

avec $a = |A|$, le cardinal de *A*. Appliqué à l'exemple ci-dessus, on trouve $\phi(1) = 0.4$ et $\phi(2) = \phi(3)=0.3$.

Il est facile de voir que deux capacités différentes peuvent avoir les mêmes indices d'importance : pour l'exemple ci-dessus, il suffit de prendre $\mu'(1) = 0.4$, $\mu'(2) = \mu'(3) = 0.3$, et ensuite $\mu'(A) = \sum_{i\in A} \mu(\{i\})$, comme le lecteur pourra le vérifier. En effet, une telle mesure est dite additive, et l'on a toujours $\mu'(A \cup \{i\}) - \mu'(A) = \mu'(\{i\})$. Une question naturelle vient alors à l'esprit : comment distinguer, par un indice approprié, deux capacités qui ont les mêmes indices d'importance ? C'est là qu'intervient la notion d'*interaction* entre critères. Reprenons l'exemple ci-dessus et considérons les critères 1 et 2. L'interprétation des valeurs de $\mu(1)$, $\mu(2)$ et $\mu(12)$ suggère que les critères 1 et 2 pris individuellement ne sont pas importants (i.e., le décideur n'est pas satisfait par un objet étant bon sur seulement le critère 1 ou le critère 2), par contre la réunion des deux est importante (i.e., le décideur est satisfait pas un objet bon à la fois sur les critères 1 et 2).

Il y a donc un phénomène de *synergie* entre ces deux critères, on dira aussi de *complémentarité*. La quantité de synergie peut très bien être exprimée par $\mu(12) - \mu(1) - \mu(2) = 0.6$. Remarquons que l'on pourrait imaginer la situation inverse, où cette quantité serait négative. Cela voudrait dire que les critères 1 et 2 seraient par eux-même importants, et que les deux réunis ne seraient pas beaucoup plus importants (i.e., le décideur ce serait pas beaucoup plus satisfait par un objet bon sur les critères 1 et 2 que par un objet bon sur seulement l'un des deux critères). On parlerait alors de critères *redondants* ou *substituables*. Enfin, il pourrait arriver que la quantité de synergie soit nulle~: c'est le cas des critères 2 et 3. On dira alors que les critères sont indépendants (la satisfaction du décideur est additive avec de tels critères). L'*indice d'interaction* entre les critères *i* et *j* est la moyenne de la quantité de synergie entre *i* et *j* en présence d'un groupe de critères *A*, pour tous les groupes *A* possibles (y compris $A=\emptyset$) :

$$I_{ij} = \sum_{A\subseteq N\setminus\{i,j\}} \frac{(n-a-2)!a!}{(n-1)!} \times$$
$$\times\left[\mu(A\cup\{ij\}) - \mu(A\cup\{i\}) -\right.$$
$$\left.-\mu(A\cup\{j\}) + \mu(A)\right]$$

On pourra vérifier qu'avec l'exemple ci-dessus, on trouve $I_{12} = I_{13} = 0.3$ et $I_{23} = -0.3$, ce chiffre négatif provenant du fait que la quantité de synergie de 2 et 3 en présence de 1 est négative.

La même question nous revient à l'esprit : existe-t-il deux capacités différentes ayant les mêmes indices d'importance et les mêmes indices d'interaction ? Oui en général, mais il devient plus difficile d'en trouver. Pour notre exemple ci-dessus, on peut vérifier qu'il n'y en a pas, mais c'est un cas particulier. Par contre pour $n = 2$, il n'est pas possible de trouver deux capacités différentes ayant même indices d'importance et d'interaction, ceci parce que pour $n = 2$, le nombre de degrés de liberté pour définir μ est de 2, et si $\phi(1)$ et $I_{12}\}$ sont spécifiés, il ne reste plus de degrés de liberté. Si alors $n > 2$, par quel indice distinguer deux capacités ayant les mêmes indices ? La réponse est simple : on définit un indice d'interaction entre 3 critères d'une façon tout à fait similaire, en considérant la synergie entre 3 critères *i, j, k* : $\mu(ijk) - \mu(ij) - \mu(ik) - \mu(jk) + \mu(i) + \mu(j) + \mu(k)$. Il n'y aura alors pas deux capacités différentes possédant les mêmes indices d'importance et d'interaction pour 2 et 3 critères tant que $n \le 3$. On comprend alors le procédé général~: pour un problème à *n* critères, une capacité est déterminée de façon unique par ses indices d'importance et d'interaction entre 2, 3 et jusqu'a *n* critères.

4. Capacités *k*-additives

La souplesse de modélisation apportée par les capacités a un coût : pour *n* critères, le modèle comporte $2^n - 2$ paramètres libres, ce qui laisse présager une identification du modèle difficile. Il existe plusieurs moyens de remédier à cet inconvénient, en prenant des familles de capacités particulières demandant moins de coefficients : c'est le cas des capacités décomposables, qui satisfont la propriété $\mu(A \cup B) = S(\mu(A), \mu(B))$ pour *A, B* disjoints et *S* une *t*-conorme (pseudo-addition), des capacités *p*-symétriques, qui supposent que les critères peuvent être partitionnés en *p* groupes de critères indistinguables, et des capacités *k*-additives. Une capacité est dite *k-additive* si tous ses indices d'interaction sont nuls au-delà de *k* critères. Ainsi, une capacité *1*-additive a tous ses indices d'interaction nuls, c'est donc une capacité additive, et l'intégrale de Choquet correspondante est une simple somme pondérée. Une capacité 2-additive permet de représenter l'interaction entre 2 critères, mais pas davantage. Elle nécessite donc $n + \frac{n(n-1)}{2} - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ coefficients pour être déterminée. C'est un excellent compromis entre souplesse de modélisation et complexité du modèle. Expérimentalement, on montre que l'on gagne peu en précision du modèle en passant d'une capacité *2*-additive à une capacité générale (*n*-additive), par contre on perd beaucoup en passant de 2-additif à 1-additif. D'autre part, il est difficile pour un décideur humain d'appréhender le sens des interactions à plus de 2 critères.

L'intégrale de Choquet peut s'exprimer très simplement en fonction des indices
d'importance et d'interaction si la capacité est 2-additive :

$$C_\mu(f) = \sum_{i,j|I_{ij}>0} (f(i) \wedge f(j)) I_{ij} +$$
$$+ \sum_{i,j|I_{ij}>0} (f(i) \vee f(j)) \, | I_{ij} | +$$
$$+ \sum_{i \in N} f(i) \left[\phi(i) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} | I_{ij} | \right]$$

Cet expression est formée de trois sommes. La première somme agrège les paires de critères dont l'interaction est positive par l'opérateur minimum ; c'est une agrégation conjonctive : pour que le résultat soit satisfaisant, il faut que les deux critères soient satisfaits. La seconde somme agrège les paires de critères dont l'interaction est négative par l'opérateur maximum ; il s'agit d'une agrégation disjonctive, il suffit donc qu'un des deux critères soit satisfait pour que le résultat soit satisfaisant. La troisième somme n'est autre qu'une somme pondérée, dont les poids sont les indices d'importance diminués de la somme des interactions se rapportant au critère en question.

On comprend alors bien le sens exact de l'interaction entre critères, et comment celle-ci intervient dans le calcul du score global. D'autre part, on peut montrer que l'expression ci-dessus est une somme convexe : tous les coefficients sont positifs et se somment à 1. Cela veut dire que l'on est capable de dire, pour une capacité 2-additive donnée, quel est le pourcentage de linéarité ou de conjonction ou de disjonction du modèle, ce pourcentage pouvant même être donné pour un critère ou une paire de critères particulier.

5. Identification du modèle

Il nous reste à aborder le problème pratique de la détermination de la capacité dans une application donnée (afin de ne pas alourdir la présentation, nous supposons ici que les fonctions d'utilité $u_1, \ldots, u_n$ des critères sont déjà obtenues, par exemple par la méthode MACBETH). L'idée générale est de combiner deux types d'information :

- une information sur les préférences révélées par le décideur : l'objet *a* est globalement meilleur (ou indifférent) que *b*, etc. Ces objets peuvent être des objets réels, ou des objets fictifs (prototypes) ;
- une information sur l'importance des critères et leurs interactions, limitées aux paires de critères. Par exemple, le décideur peut stipuler que le critère *i* est plus important que le critère *j*, que les critères *i* et *j* sont complémentaires, etc.

La proportion de ces informations varie en fonction du type de problème pratique rencontré. Le deuxième type d'information est plus directif, en ce sens que le décideur donne des indications sur la façon dont selon lui les critères doivent être agrégés.

Toutes ces informations peuvent se traduire sous la forme de contraintes linéaires en fonction des 2^n -

2 (ou moins si une capacité k-additive est utilisée) coefficients de la capacité μ :

$$C_\mu(u_1(a_1),\ldots,u_n(a_n)) - C_\mu(u_1(b_1),\ldots,u_n(b_n)) \geq \delta$$
$$\phi(i) - \phi(j) \geq \delta'$$
$$I_{ij} \geq \delta''$$

et ainsi de suite, δ, δ', δ'' étant des seuils d'indifférence fixés. Afin d'assurer que μ soit une capacité, il faut de plus imposer des contraintes de monotonie :

$$\mu(A) - \mu(A \setminus i) \geq 0, \quad \forall A \subseteq N, \ \forall i \in A.$$

Il se peut que l'ensemble des contraintes exprimées définisse un domaine vide. En ce cas, les préférences et diverses informations données par le décideur sont soit contradictoires, au sens d'axiomes couramment admis en décision multicritère (par exemple la dominance, la non transitivité de la préférence stricte), soit que l'intégrale de Choquet n'est pas un modèle suffisamment puissant pour représenter les préférences du décideur. Dans le premier cas, il incombe au décideur de réviser ses préférences, dans le second cas, il faut envisager d'autres modèles (voir ci-après).

Il reste à spécifier une fonction objectif afin d'obtenir μ comme solution optimale d'un problème d'optimisation. Il existe tout un éventail de possibilités (voir [3]) : par exemple, on peut minimiser une distance entre μ et une capacité pré-spécifiée, ou minimiser un critère de dispersion (variance, entropie, etc.). Ces fonctions objectif sont par essence non linéaires, quadratiques dans le meilleur des cas. Un exemple simple de programme linéaire est le suivant~: maximiser ε sous les contraintes définies ci-dessus, mais en remplaçant δ par $\delta + \varepsilon$. Ainsi le programme donnera comme solution une capacité qui maximisera les écarts entre les scores globaux.

6. Vers d'autres modèles

On considère en général que les scores sont des quantités positives. Cependant, des études en psychologie ont montré que la décision humaine est basée sur l'*affect*, et que celui-ci a un caractère bipolaire. Cela signifie que l'échelle des scores traduisant la satisfaction du décideur comporte en général un niveau neutre qui est la frontière entre les scores ressentis comme satisfaisant et ceux ressentis comme mauvais.

Par exemple, dans le système français de notation des étudiants, l'échelle va de 0 à 20. La note 10 est le plus souvent considéré comme le niveau neutre, qui marque la frontière entre ceux qui ont réussi l'examen et ceux qui ne l'ont pas réussi. Des expériences ont clairement montré que l'attitude de décision dépend de la position des scores par rapport à ce niveau neutre : un décideur ayant une attitude disjonctive (tolérante) pour le calcul du score global peut devenir conjonctif (intolérant) suivant la position des scores par rapport au niveau neutre. Une solution simple pour modéliser la bipolarité est de construire deux capacités, l'une dévolue aux scores au-dessus du niveau neutre, l'autre étant pour les scores en-dessous de ce niveau.

Un modèle plus général est celui des bicapacités. Une *bicapacité* est une fonction v à deux arguments A, B, ceux-ci étant des groupes disjoints de critères, tel que $v(A,B)$ représente le score global attribué à un objet dont tous les critères appartenant à A seraient totalement satisfaits, tous les critères appartenant à B seraient totalement insatisfaisants, et tous les autres seraient au niveau neutre. Il est possible alors de définir une intégrale de Choquet par rapport à une bicapacité afin de calculer un score global, ainsi que des indices d'importance et d'interaction (voir [4 ,5]). L'inconvénient de ce modèle très puissant est sa complexité, puisqu'il nécessite $3^n - 3$ coefficients, mais là également il est possible de définir des modèles k-additifs, ainsi que des modèles hybrides entre capacités et bi-capacités.

7. Software

A notre connaissance, il existe encore très peu de logiciels implantant les méthodologies autour de l'intégrale de Choquet. Le package Kappalab, conçu sur la plate-forme R de statistiques, est un logiciel libre téléchargeable depuis http://www.polytech.univ-nantes.fr/kappalab ou http://cran.r-project.org. Celui-ci n'est pas dédié à la décision multicritère, mais est une boîte à outil générale permettant de manier dans un langage du type Matlab toutes les notions autour des capacités, et qui contient aussi des méthodes d'identification de capacités à partir de données (voir [3] pour une illustration). Le logiciel Myriad développé par Christophe Labreuche à Thales Research and Technology est par contre dédié à a décision multicritère, mais n'est pas un logiciel libre.

Références

[1] M. Grabisch. The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making. European Journal of Operational Research, 89 :445-456, 1996.

[2] M. Grabisch. évaluation subjective. In D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, and H. Prade, editors, Concepts et Méthodes pour l'Aide à la Décision, IC2, pages 175-232. Hermès, 2006.

[3] M. Grabisch, I. Kojadinovic, and P. Meyer. Using the Kappalab R package for Choquet integral based multi-attribute utility theory. In Proc. Int. Conf. on Information Processing and Management of Unicertainty (IPMU'06), pages 1702_1709, Paris, France, July 2006.

[4] M. Grabisch and Ch. Labreuche. Bi-capacities. Part I : denition, Möbius transform and interaction. Fuzzy Sets and Systems, 151 :211-236, 2005.

[5] M. Grabisch and Ch. Labreuche. Bi-capacities. Part II : the Choquet integral. Fuzzy Sets and Systems,151 :237-259, 2005.

[6] M. Grabisch and Ch. Labreuche. Fuzzy measures and integrals in MCDA. In J. Figueira, S. Greco, and M. Ehrgott, editors, Multiple Criteria Decision Analysis, pages 563-608. Springer, 2005.