Newsletter of the European Working Group
"Multicriteria Aid for Decisions"

Bulletin du Groupe de Travail Européen
"Aide Multicritère à la Décision"

Groupe de Travail Européen "Aide Multicritère à la Décision"
Série 3, nº22 automne 2010.

European Working Group "Multiple Criteria Decision Aiding"
Series 3, nº 22, Fall 2010.

Forum

Quelques réflexions sur la recherche de solutions robustes en programmation linéaire

Virginie Gabrel, Cécile Murat
Université Paris-Dauphine, LAMSADE, CNRS,
UMR7024,F-75016 Paris, France
E-mail: {gabrel,murat}@lamsade.dauphine.fr

Introduction

Lorsqu'un problème de décision est modélisé à l'aide d'un programme linéaire, il peut s'avérer très difficile d'attribuer une valeur unique plausible à chacun des paramètres du modèle. Les raisons peuvent être de natures différentes : technique (erreurs d'arrondis, difficulté à récupérer et à calculer certaines valeurs de paramètre) et/ou contextuelle (présence de phénomènes aléatoires, avenir incertain). Tous les paramètres du modèle ne sont pas entachés d'incertitude et d'indétermination simultanément : ces incertitudes peuvent peser uniquement sur la fonction objectif, sur les coefficients des variables dans les contraintes et/ou sur les seconds membres des contraintes. L'approche consistant à intégrer les éléments d'incertitude et d'indétermination dans le programme mathématique à résoudre peut alors s'avérer nécessaire. En l'absence de loi de probabilités décrivant l'incertitude, l'optimisation robuste a pour objectif de déterminer des solutions qui résistent au mieux aux aléas.
La première étape consiste donc à choisir un ensemble d'incertitude pour chacun des paramètres du programme (polyèdre, intervalle, ensemble discret de valeurs plausibles...) et, à décrire de quelle façon cette indétermination sera partiellement ou complètement levée au cours du processus de décision. La deuxième étape concerne la compréhension et l'analyse du contexte décisionnel afin de donner un sens à la notion de robustesse. Et enfin, il s'agit de résoudre la version robuste du programme mathématique considéré.
Nos recherches récentes sur ces problématiques de robustesse nous amènent à un certain nombre de conclusions que nous souhaitons exposer :

- les problématiques de robustesse et les réponses à y apporter diffèrent en fonction des paramètres incertains : l'incertitude concernant l'évaluation d'une solution (portant sur les coefficients dans la fonction objectif) doit être distinguée de l'incertitude concernant la réalisabilité d'une solution (portant sur les coefficients intervenant dans les contraintes),
- la théorie de la dualité reste pertinente mais doit être revisitée,
- le cas de l'incertitude pesant uniquement sur les seconds membres des contraintes mérite une étude spécifique,
- dans le cas où l'incertitude pèse sur la réalisabilité des solutions, les problèmes ne sont pas de même nature lorsque le système de contraintes présente ou non des égalités,
- la comparaison des approches de robustesse n'a de sens que vis-à-vis d'un contexte décisionnel clairement identifié.

Incertitude sur l'évaluation versus incertitude sur la réalisabilité

Nous considérons le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Les coefficients c_j des n variables x_j sont entachés d'incertitude. Un scénario s est un vecteur $c^s=(c_1^s, \dots, c_j^s, \dots, c_n^s)$, composé de valeurs considérées comme réalistes et plausibles. Nous supposons connu un ensemble S de scénarios (dénombrable ou non).
Dans la plupart des approches d'optimisation robustes, l'évaluation d'une solution x retenue est de la forme $f_{wor}(x) = \min_{s\in\Gamma} c^s x$, avec $\Gamma \subseteq S$. Lorsque Γ inclut tous les scénarios de S, la valeur de x n'est autre que la valeur obtenue sur le critère du pire cas. Ce critère est utilisé dans le cadre de la robustesse (cf. (Kouvelis & Yu, 1997)) dans la mesure où la valeur de x sur ce critère est une valeur garantie quel que soit le scénario. Appliquer le critère du pire cas revient à rechercher la solution maximisant sa pire valeur. Ce critère peut répondre à la préoccupation de robustesse d'un décideur très prudent qui cherche à ne prendre aucun risque. La faiblesse de ce critère est que le choix d'une solution est fondé sur un scénario unique peu probable : le plus défavorable pour cette solution. Aussi, des modèles plus récents s'intéressent à la définition d'un

ensemble Γ de scénarios permettant de nuancer le scénario le plus défavorable (par ex. (Bertsimas & Sim, 2004)).
Lorsque l'incertitude porte sur les coefficients intervenant dans les contraintes (A et/ou b), la notion de robustesse prend alors un autre sens. En effet, dans ce cas l'évaluation d'une solution x ne diffère pas selon les scénarios plausibles et, être robuste revient à garantir la réalisibilité de la solution x pour tous les scénarios de Γ (avec $\Gamma \subseteq S$) pouvant se réaliser (cf. (Soyster, 1973), (Bertsimas & Sim, 2004), (Ben-Tal, El Ghaoui, & Nemirovski, 2009)). Un scénario s est défavorable à une solution x lorsque x n'appartient pas à l'ensemble des solutions réalisables défini par : $X^s = \{x \in \mathbb{R}^n : A^s x \leq bs, x \geq 0$. Aussi, pour une solution x donnée, deux cas de figure sont à considérer :

- soit x est réalisable dans tous les scénarios s et dans ce cas, $f_{wor}(x) = cx$,
- soit il existe au moins un scénario s pour lequel x n'est pas réalisable et, dans ce cas, $f_{wor}(x) = -\infty$.

Comme on cherche à maximiser $f_{wor}(x)$, la solution optimale se trouve nécessairement parmi celles qui sont réalisables sur tous les scénarios de $\boldsymbol{\Gamma}$. Si l'intersection des ensembles X^s est vide, toutes les solutions ont pour évaluation $-\infty$ et le critère du pire cas ne permet plus de les discriminer. Une autre approche que celle du pire cas doit alors être appliquée.
Le critère du regret maximum, également très utilisé en analyse de robustesse, cf. (Kouvelis & Yu, 1997), est malheureusement équivalent au critère du pire cas dans le cas d'incertitude sur la réalisibilité. Rappelons que l'évaluation d'une solution x sur le critère du regret maximum est : $f_{reg}(x) = \max_{s\in\Gamma}(c\bar{x}^s - cx)$ avec $\bar{x}^s$ étant la solution optimale dans X^s, l'ensemble des solutions réalisables pour le scénario s. Comme précédemment, s'il existe un scénario s pour lequel $x \notin X^s$, alors $f_{reg}(x) = +\infty$. Si x est réalisable dans tous les scénarios, alors le regret maximum admet une valeur finie définie par $\max_{s\in\Gamma}(c\bar{x}^s) - cx$ car la valeur cx ne dépend pas de s. Il s'agit donc de minimiser cette valeur sur l'intersection des ensembles X^s et nous obtenons comme solution optimale x^*_{reg} telle que : $f_{reg}(x^*_{reg}) = \min_{x\in(\cap X^s)}(\max_{s\in\Gamma}(c\bar{x}^s) - cx)$. Comme la quantité $\max_{s\in\Gamma}(c\bar{x}^s)$ est indépendante de x, il s'en suit que $f_{reg}(x^*_{reg}) = \max_{s\in\Gamma}(c\bar{x}^s) + \min_{x\in(\cap X^s)}(-cx)$. En conséquence, la solution optimale selon le critère du regret maximum correspond à la solution optimale selon le critère du pire cas.
L'incertitude sur la réalisabilité induit donc des problématiques de robustesse de nature différente de celles induites par l'incertitude sur l'évaluation des solutions. En analyse de robustesse, la fonction objectif ne peut donc pas être interprétée comme une contrainte supplémentaire.

Théorie de la dualité en optimisation robuste

Dans le cas particulier où l'incertitude porte uniquement sur les seconds membres des contraintes, il est naturel de considérer le dual de (P) afin de transférer l'incertitude sur les coefficients dans la fonction objectif des variables duales (notées λ) et, d'y appliquer le critère du pire cas. Nous obtenons alors :

$$(D_{wor})\begin{cases} \min \max_{s\in\Gamma} \lambda b^s \\ \lambda A \geq c \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Néanmoins, le dual de (D_{wor}) ne permet pas de retrouver la valeur optimale de (P) selon le critère du pire cas. En effet, lorsque Γ contient un ensemble dénombrable de scénarios, (D_{wor}) peut s'écrire comme suit :

$$(D_{wor})\begin{cases} \min z \\ z \geq \lambda b^s, \forall s \in \Gamma \\ \lambda A \geq c \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Son dual est alors :

$$(\mathrm{H})\begin{cases} \max cx \\ \sum_{s\in\Gamma} u_s = 1 \\ Ax = \sum_{s\in\Gamma} b^s u_s \end{cases}$$

Ce programme linéaire permet de déterminer la solution optimale réalisable sur une combinaison convexe particulière de l'ensemble des scénarios : ceci ne garantit en aucun cas d'être réalisable sur tous les scénarios. Au mieux, la solution optimale de (H) correspondra-t-elle à une solution réalisable sur un des scénarios de $\boldsymbol{\Gamma}$. Il apparaît donc que (H) ne fournit pas une solution qui correspondrait à celle du pire cas pour le problème (P) dans lequel l'incertitude porte sur les seconds membres des contraintes.
Il est montré, dans (Gabrel & Murat, 2010), qu'optimiser selon le critère du pire cas un programme linéaire dans lequel les incertitudes portent sur les seconds membres ne revient pas à optimiser selon le même critère son programme dual dans lequel l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif. Plus exactement, nous montrons qu'il s'agit de dualiser le critère : du pire cas vers le meilleur cas. Il faut donc appliquer le critère "dual", à savoir celui dit du meilleur cas, sur le problème dual dans lequel l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif.
En conclusion, si nous souhaitons transférer la prise en compte de l'incertitude des seconds membres vers la fonction objectif (ou inversement), nous nous devons d'appliquer le critère "dual" sur le programme linéaire dual.

Le cas spécifique de l'incertitude sur les seconds membres

Dans un grand nombre d'applications, l'incertitude porte uniquement sur le vecteur des seconds membres (typiquement lorsque ce vecteur représente l'évolution de la demande d'un produit sur différentes périodes). Il est alors possible de tirer profit des relations de dualité exposées précédemment.
En outre, comme l'incertitude pèse alors sur une colonne de la matrice des contraintes, et non plus sur une ligne, certaines approches, celle de Bertsimas et Sim par exemple, ne sont plus pertinentes. En effet, dans l'approche proposée par Bertsimas et Sim, à chaque contrainte est associé un budget d'incertitude qui, lorsque seule la valeur du second membre est incertaine, va varier entre 0 et 1 pour chaque contrainte, ce qui revient à choisir une valeur pour le second membre.

Des égalités dans les contraintes

En optimisation robuste, l'approche classique qui consiste à transformer une contrainte d'égalité en deux contraintes d'inégalité de sens opposé n'a pas de sens. D'une part, on aboutit à un programme linéaire ne vérifiant plus l'hypothèse d'indépendance entre les coefficients incertains puisque les mêmes coefficients incertains se retrouvent dans deux contraintes différentes. D'autre part, dans l'une des deux contraintes, si la pire valeur pour un coefficient incertain est la plus petite, alors il s'agira de la plus grande valeur dans la contrainte opposée. Avec des égalités dans les contraintes, il n'existe plus de solution qui soit réalisable sur tous les scénarios de Γ.
Deux cas de figure sont alors envisagés :

- soit l'incertitude est levée avant la prise de décision et les contraintes peuvent être satisfaites à l'égalité,
- soit il faut choisir x en présence d'incertitude ce qui nécessite d'accepter et d'envisager la violation des contraintes d'égalité.

Dans le premier cas, il ne s'agit plus de déterminer une solution robuste. Néanmoins, en phase de planification ou d'optimisation multi-étape, cf (Gabrel, Murat, & Remli, 2010), on s'attachera à calculer des bornes sur les valeurs optimales du problème correspondant aux meilleur et pire optimum possibles.
Dans le second cas, d'autres modèles de robustesse doivent alors être appliqués nécessitant de bien appréhender le contexte décisionnel. A titre d'illustration, considérons un contexte où le fait de choisir une solution qui s'avèrera finalement non réalisable, engendre un surcoût émanant des corrections à appliquer à cette solution (pour la rendre admissible). Une solution robuste est alors une solution minimisant le maximum des surcoûts. Il s'agit en fait d'une solution dont la distance à la réalisabilité n'est jamais trop importante quel que soit le scénario qui se réalisera.
Analyse de robustesse liée au contexte décisionnel

L'approche choisie dans le cadre de l'optimisation robuste est intimement liée au décideur et au contexte décisionnel. La version robuste d'un problème varie donc en fonction :

- des ensembles d'incertitude retenus sur chacun des paramètres comme sur l'ensemble Γ des scénarios,
- de la façon dont les valeurs des paramètres seront révélées (en une seule fois ou en plusieurs étapes successives) et du statut des variables (dans le cadre de l'optimisation robuste multi-étape, cf (Ben-Tal, El Ghaoui, & Nemirovski, 2009)),
- et du critère choisi pour évaluer la robustesse (à coté des critères classiques du pire cas et du regret, il en existe de plus récents comme, par exemple, celui de la bw-robustesse introduit dans (Roy, 2010)).

Les études comparatives que l'on peut alors mener doivent nécessairement porter sur des versions en adéquation avec le contexte décisionnel. A notre sens il n'est pas pertinent, comme on peut le voir dans certaines études, de comparer une approche du type pire cas et une approche bi-étape : il est évident que la seconde fournira de meilleures solutions (au regard de la fonction objectif initiale) puisque le modèle contient plus d'informations (une partie de l'incertitude est levée au cours du processus de décision).

Les problématiques de robustesse en programmation linéaire constituent donc un champ d'investigations très dynamique, d'autant qu'il nous amène à revisiter un certain nombre de résultats bien établis en univers déterministe.

Bibliographie

Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., & Nemirovski, A. (2009). *Robust optimization.* Princeton: Princeton University Press.

Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations Research , 52 (1),* 35-53.

Gabrel, V., & Murat, C. (2010). Robustness and duality in linear programming. *Journal of the Operational Research Society , 61*, 1288-1296.

Gabrel, V., Murat, C., & Remli, N. (2010). Linear programming with interval right hand sides. *International Transactions in Operational Research , 17 (3),* 397-408.

Kouvelis, P., & Yu, G. (1997). *Robuste discrete optimization and its applications.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Roy, B. (2010). Robustness in operational research and decision aiding. *European Journal of Operational Research , 200(3)*, 629-638.

Soyster, A. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research , 21 (5)*, 1154-1157.