Newsletter of the European Working Group "Multicriteria Aid for Decisions"

Bulletin du Groupe de Travail Européen "Aide Multicritère à la Décision"

Groupe de Travail Européen "Aide Multicritère à la Décision"
Série 3, nº12, automne 2005.

European Working Group "Multiple Criteria Decision Aiding"
Series 3, nº 12, Fall, 2005.

Forum

Une nouvelle approche de robustesse : α -robustesse lexicographique

M.A. Aloulou, R. Kalaï, D. Vanderpooten

LAMSADE- Université Paris Dauphine
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16
E-mail: aloulou,kalai,vdp@lamsade.dauphine.fr

Introduction

Évoquée dès la fin des années 1960 [5], l'idée de robustesse suscite un intérêt croissant à la fois de la part des praticiens et des théoriciens. Reflétant initialement une préoccupation de flexibilité dans un contexte d'incertitude vis-à-vis de l'avenir, ce concept paraît aujourd'hui s'adapter à un spectre beaucoup plus large de situations où l'on recherche "une aptitude à résister à des "à peu près" ou à des "zones d'ignorance" afin de se protéger d'impacts jugés regrettables" comme l'indique Roy [13].

De ce fait, il est important, lorsqu'on recourt à cette approche, de bien identifier le contexte dans lequel l'étude est faite. Dans cet article, nous nous intéressons à des problèmes de décision dans un contexte d'incertitude où les futurs possibles sont modélisés par un ensemble fini discret de scénarios et où l'on ne souhaite pas distinguer leur vraisemblance d'occurrence. Ceci peut résulter d'une situation d'incertitude pure où l'on ne disposerait d'aucune information sur ces vraisemblances, mais aussi de situations où l'on souhaite se prémunir contre toute éventualité même s'il est possible de distinguer des vraisemblances d'occurrence. Dans ce contexte, plusieurs approches de robustesse ont été proposées dans la littérature. Nous en présentons quelques-unes dans la section suivante et les classons en deux grandes familles. Nous nous intéressons, dans la section 3, à l'approche la plus utilisée, à savoir celle qui se base sur le pire cas. Nous mettons en évidence les limites du critère minmax et proposons une nouvelle approche de robustesse appelée α *-robustesse lexicographique.*

Les approches de robustesse en Aide à la Décision

La définition de la robustesse étant assez large, différentes approches ont été élaborées pour trouver des solutions robustes. On distingue, néanmoins, deux grandes familles d'approches: celles qui se basent sur l'optimisation d'un *critère de robustesse* et celles qui imposent des *conditions de robustesse* que la solution doit satisfaire pour être considérée comme robuste. Nous présentons, ci-après, une brève description de quelques travaux représentatifs de ces deux familles.

Approches basées sur l'optimisation d'un critère

- *Minimisation du coût ou du regret maximal* : Ce critère est le critère le plus utilisé dans la littérature concernant la recherche de solutions robustes. Certains auteurs identifient même la notion de robustesse à celle de regret maximal. La référence la plus importante sur ce critère est le livre de Kouvelis et Yu [8] où les auteurs traitent plusieurs problèmes d'optimisation discrète. Ils introduisent dans leur ouvrage trois critères de robustesse pour l'Aide à la Décision : la *robustesse absolue* (ou le critère du *coût maximal*), la *déviation robuste* (ou le critère du *regret maximal*) et la *robustesse relative* (ou le critère du *regret relatif*). Ces critères ont été beaucoup appliqués dans le cas où les scénarios sont représentés par des intervalles (voir notamment les travaux d'Averbakh *et al.*, par exemple [1,2,3,4]).

- *Maximisation d'un indicateur de flexibilité* : Dans le cas des problèmes de planification séquentielle et en présence d'incertitude, Rosenhead *et al.* proposent de mesurer la robustesse par la flexibilité qu'offre chaque décision prise à une étape donnée par rapport au reste du projet. La robustesse est donc perçue par ces auteurs comme le degré de flexibilité qu'offrent les décisions actuelles vis-à-vis de l'avenir [5,11].

- *Maximisation de la fréquence de quasi-optimalité* : Dans [10], Rosenblatt et Lee étudient un problème d'aménagement d'usine dans un contexte d'incertitude pure. Les auteurs utilisent un concept de robustesse lié à la stabilité du système vis-à-vis du traitement des demandes. Elle est mesurée par le nombre de fois où l'aménagement candidat conduit à un coût total de manutention inférieur à (100+*p*)% de l'aménagement optimal pour les différents scénarios, *p* étant fixé au préalable. Un aménagement le plus souvent proche de l'optimum est considéré comme robuste.

Approches basées sur des conditions de robustesse

- *Proximité de l'optimum pour tous les scénarios* : Kouvelis *et al.* [7] se fondent sur le travail de Rosenblatt et Lee pour chercher des aménagements robustes. Par contre, ils restreignent l'ensemble des solutions robustes à celles dont le coût est à moins de (100+*p*)% (*p* un réel positif fixé) de celui de la solution optimale pour *tous* les scénarios, et non pas pour un nombre maximal de scénarios comme proposé par Rosenblatt et Lee. Dans [14], Snyder appelle cette mesure de robustesse la *p-robustesse*. Snyder et Daskin [15] présentent une variante de cette approche qui cherche la (ou les) solution(s) *p*-robuste(s) qui minimise(nt) l'espérance du coût.

- *Dominance de Lorenz* : Perny *et al.* étudient dans [9] les problèmes de plus courts chemins et d'arbres couvrants dans un contexte d'incertitude modélisée par un ensemble fini de scénarios. Les auteurs définissent le concept de robustesse en se basant sur la *dominance de Lorenz*. Ils considèrent qu'une solution est robuste si elle est non dominée au sens de Lorenz. Etant donné le grand nombre possible des optima de Lorenz, un raffinement axiomatique est ensuite exposé, conduisant à préconiser l'emploi de l'opérateur OWA (Ordered Weighted Average) pour discriminer entre ces optima.

Une nouvelle approche de robustesse

Limites de l'approche minmax

Pour déterminer les solutions robustes, la plupart des auteurs se sont appuyés sur les critères du coût maximal ou du regret maximal : une solution robuste est celle qui minimise le coût ou le regret maximal. Néanmoins, appréhender la notion de robustesse à travers une seule mesure paraît extrêmement difficile, car cette démarche conduit le plus souvent à privilégier un seul aspect qui est celui du pire cas. De plus, aucune tolérance n'est envisagée par rapport à la solution trouvée.

Considérons l'exemple suivant :

Coûts	s_1	s_2	max
Solution *x*	10	10	10
Solution *y*	0	11	11
Solution *z*	20	0	20

Il est fort probable que, dans ce cas, le critère du coût maximal ne donne pas la solution que le décideur aurait choisie. En effet, la solution *x*, optimale pour le critère minmax, présente un coût élevé dans les deux scénarios. En revanche, la solution *y* a un coût légèrement plus élevé que celui de *x* dans l'un des scénarios, et un coût beaucoup plus bas dans l'autre.

Dans ce qui suit, nous présentons une nouvelle approche de robustesse palliant les inconvénients de celle basée uniquement sur le pire cas.

Définition d'une nouvelle approche de robustesse

Supposons que, pour un problème donné, l'un (ou plusieurs) des paramètres ne puisse être déterminé de façon certaine et qu'il existe un ensemble fini de réalisations (scénarios) possibles *S*. Notons *X* l'ensemble des actions ou solutions admissibles et *q* le nombre de scénarios. Pour un scénario *s* donné et un point *x* de *X*, on définit $C^s(x)$ le coût de la solution *x* pour le scénario *s*. Le raisonnement et les résultats étant valables pour les coûts ainsi que pour les regrets, on utilisera, dans ce qui suit, le terme "coût" et la notation *C* indifféremment pour le coût et pour le regret. La solution robuste au sens du critère du coût maximal est la solution x^* qui vérifie :

$$\min_{x\in X}\max_{s\in S} C^s(x)$$

A toute solution *x*, on associe le vecteur coût $C(x) = (C^{s^1}(x),\ldots,C^{s^q}(x))$, où $C^{s^i}(x)$ est le coût de la solution *x* sous le scénario s^i, $1 \le i \le q$. En ordonnant les coordonnées de $C(x)$ par ordre décroissant, on obtient un vecteur $\hat{C}(x)$ appelé *vecteur de désutilité*. On a donc :

$$\hat{C}^1(x) \ge \hat{C}^2(x) \ge \ldots \ge \hat{C}^q(x)\,.$$

Appelons $\hat{C}^j(x)$ *coût d'ordre j* de *x*.

Définition 1 : *Soient x et y deux solutions de X,* $\hat{C}(x)$ *et* $\hat{C}(y)$ *les vecteurs de désutilité associés. Soit*

α un réel positif. La relation α-leximax *est définie comme suit :*

$$x \succ_{lex}^{\alpha} y \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \{1,\dots,q\} : \hat{C}^k(x) < \hat{C}^k(y) - \alpha \\ \forall j \le k-1, \left|\hat{C}^j(y) - \hat{C}^j(x)\right| \le \alpha \end{cases}.$$

On dit que x est préférée (strictement) à y au sens de la relation α-leximax.

$$x \sim_{lex}^{\alpha} y \Leftrightarrow \forall k \in \{1,\dots,q\}, \left|\hat{C}^k(y) - \hat{C}^k(x)\right| \le \alpha$$

x et y sont dits indifférents au sens de la relation α-leximax.

On veut définir un ensemble de solutions robustes en s'appuyant sur la relation de préférence *α-leximax*. Soit x^* une solution idéale, fictive la plupart du temps, telle que :

$$\hat{C}(x^*) = (\hat{C}^1(x_1^*), \hat{C}^1(x_2^*), \dots, \hat{C}^1(x_q^*))$$

où $x_k^* = \arg\min_{x \in X} \hat{C}^k(x)$ pour tout $k \in \{1\dots, q\}$. Considérons l'ensemble suivant:

$$A(\alpha) = \{x \in X : x \sim_{lex}^{\alpha} x^*\}$$

D'après la définition de la relation *α-leximax* ainsi que celle de x^*, l'ensemble $A(\alpha)$ peut aussi s'écrire sous la forme :

$$A(\alpha) = \{x \in X : \forall k \le q, \hat{C}^k(x) - \hat{C}^k(x_k^*) \le \alpha\}$$

L'ensemble $A(\alpha)$ est donc l'ensemble des solutions de X dont le $k^{ème}$ plus grand coût est proche du minimum pour tout $k \le q$. Cette propriété peut être considérée comme une condition de robustesse. On peut alors dire que $A(\alpha)$ est un ensemble de solutions robustes que l'on appellera ensemble des *solutions α-robustes lexicographiques.*

Considérons l'exemple suivant où $X=\{a,b,c,d\}$ et $S=\{s_1,s_2\}$:

Coûts	s_1	s_2	$\hat{C}^1$	$\hat{C}^2$
solution *a*	14	30	30	14
solution *b*	25	25	25	25
solution *c*	27	16	27	16
solution *d*	18	28	28	18

Il est évident que l'ensemble des solutions α-robustes lexicographiques dépend du seuil choisi. Pour α variant de 1 à 4, nous avons :

$\alpha=1 \Rightarrow A(1)=\phi$.
$\alpha=2 \Rightarrow A(2)=\{c\}$
$\alpha=3 \Rightarrow A(3)=\{c\}$
$\alpha=4 \Rightarrow A(4)=\{c,d\}$

Deux propriétés importantes ressortent de cet exemple :

1. $A(\alpha)$ peut être vide : si le seuil est trop faible, c'est-à-dire qu'une solution n'est considérée robuste que si tous ses coûts d'ordre *k*, $k \in\{1,\dots,q\}$, sont très proches du minimum, il est clair qu'on ne peut pas toujours trouver des solutions robustes.
2. $A(\alpha)$ est "monotone" : $\forall \alpha \ge 0$ et $\alpha' \ge 0, \alpha \le \alpha' \Rightarrow A(\alpha) \subseteq A(\alpha')$.

Conclusion

Dans cet article, une nouvelle approche de robustesse, appelée *α -robustesse lexicographique*, a été introduite. Elle concerne les cas où l'incertitude sur les paramètres est modélisée par un ensemble fini discret de scénarios. Comparée à l'approche basée sur le pire cas, cette nouvelle approche présente plusieurs avantages:

1. Elle prend en compte plusieurs mesures, en l'occurrence les coûts ou les regrets du pire cas jusqu'au meilleur, et ceci de façon lexicographique respectant ainsi l'idée d'aversion du décideur pour le risque.

2. Elle offre une certaine tolérance puisqu'elle introduit un seuil d'indifférence α traduisant la dimension subjective de la robustesse [16].

3. Elle peut conduire à un ensemble vide de solutions robustes selon la tolérance fixée. Il paraît, en effet, souhaitable de mettre en évidence le fait que certaines instances n'admettent pas de solutions jugées robustes.

4. La version simple de l'approche que nous avons présentée peut être étendue de multiples manières. Tout d'abord, le seuil α peut être variable et différencié pour chaque mesure. De plus, on peut envisager d'étudier la robustesse non pas vis-à-vis de toutes les mesures, mais seulement vis-à-vis des *k* premières, $k \le q$. De telles études visent à dépasser la préoccupation de la recherche de solutions robustes (qui n'est pas toujours possible) et à s'orienter vers la détermination de ce que Roy appelle des *conclusions robustes* [12].

Il est clair que l'α -robustesse lexicographique est plus complexe à mettre en oeuvre que les approches minmax et minmax regret. C'est pourquoi il paraît raisonnable de n'appliquer cette approche que pour les problèmes qui sont "faciles à résoudre" pour ces critères. Il en est ainsi lorsque l'ensemble des solutions est défini par une liste exhaustive. Néanmoins, elle peut être intéressante même dans le cas d'un ensemble infini de solutions. En effet, Kalaï *et al.* [6] ont développé un algorithme en $O(nq^4)$ pour résoudre le problème de localisation 1-median α-robuste lexicographique sur un arbre où n est le nombre de sommets de l'arbre et q le nombre de scénarios.

Références

[1] Averbakh I. Minmax regret solutions for minimax optimization problems with uncertainty. *Operations Research Letters*, 27 :57–65, 2000.

[2] Averbakh I. and Berman O. Minimax regret p-center location on a network with demand uncertainty. *Location Science*, 5(4) :247–254, 1997.

[3] Averbakh I. and Lebedev V. Interval data minmax regret network optimization problems. *Discrete Applied Mathematics*, 138 :289–301, 2004.

[4] Averbakh I. and Lebedev V. On the complexity of minmax regret linear programming. *European Journal of Operational Research*, 160(1) :227–231, 2005.

[5] Gupta S.K. and Rosenhead J. Robustness in sequential investment decisions. *Management Science*, 15(2) :B18–B29, october 1968.

[6] Kalaï R., Aloulou M.A., Vallin P., and Vanderpooten D. Robust 1-median location problem on a tree. *In ORP3 (Euro Conference for Young OR Reserchers and Practitioners)*, Valencia, Spain, 6-10 september 2005.

[7] Kouvelis P., Kurawarwala A.A., and Gutiérrez G.J. Algorithms for robust single and multiple period layout planning for manufacturing systems. *European Journal of Operational Research*, 63(2) :287–303, 1992.

[8] Kouvelis P. and Yu G. *Robust Discrete Optimization and its Applications. Non Convex Optimization and Its Applications.* Kluwer Academic Publishers, 1997.

[9] Perny P., Spanjaard O., and Storme L.-X. Enumeration of robust paths and spanning trees in multivalued graphs. *Annals of Operations Research*, 2005. (to appear).

[10] Rosenblatt M.J. and Lee H.L. A robustness approach to facilities design. *International Journal of Production Research*, 25(4) :479–486, 1987.

[11] Rosenhead J., Elton M., and Gupta S.K. Robustness and optimality criteria for strategic decisions. *Operational Research Quaterly*, 23(4) :413–423, 1972.

[12] Roy B. A missing link in OR-DA : robustness analysis. *Foundations of computing and decision sciences*, 23(3) :141–160, 1998.

[13] Roy B. Robustesse de quoi, vis-à-vis de quoi, mais aussi robustesse pourquoi en aide à la décision ? *In Newsletters of the European Working Group «Multicriteria Aid for Decisions»*, number 6 in 3, pages 1–6, 2002.

[14] Snyder L.V. Facility location under uncertainty : A review. Technical *report 04T-015, Lehigh University, Dept. of ISE*, July 2004. to appear in IIE Transactions.

[15] Snyder L.V. and Daskin M.S. Stochastic p-robust location problems. *Technical report 04T-014, Lehigh University, Dept. of ISE*, July 2004.

[16] Vincke P. About robustness analysis. *In Newsletters of the European Working Group «Multicriteria Aid for Decisions»*, number 8 in 3, pages 7–9, 2003.