Programowanie logiczne z ograniczeniami (więzami)

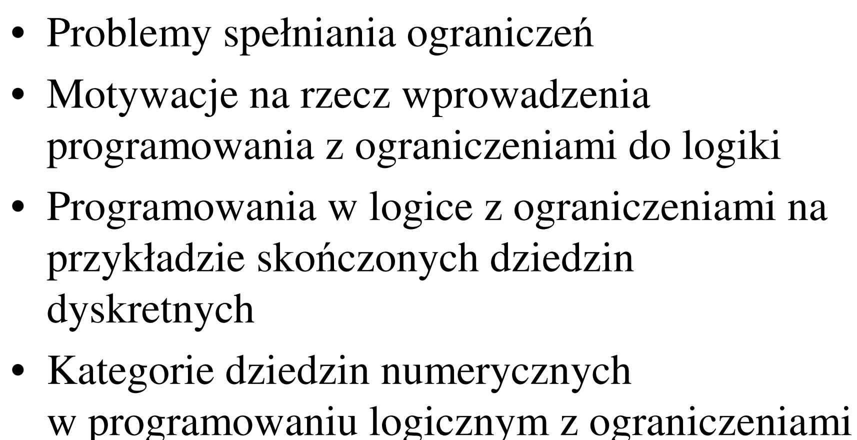
(ang. Constraint Logic Programming)

Artur Michalski

Informatyka II rok

♣AM♣

Plan wykładu



- Problemy spełniania ograniczeń
- Motywacje na rzecz wprowadzenia programowania z ograniczeniami do logiki
- Programowania w logice z ograniczeniami na przykładzie skończonych dziedzin dyskretnych
- Kategorie dziedzin numerycznych w programowaniu logicznym z ograniczeniami

♣AM♣

Problemy spełniania ograniczeń
(*ang. Constraints Satisfaction Problems*)

Problem spełniania ograniczeń opisujemy:

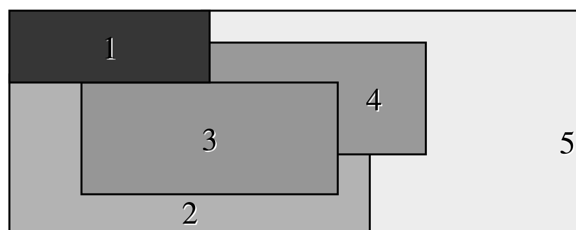
- Zbiorem zmiennych przedmiotowych
- Dziedzinami wartości wszystkich zmiennych
- Zbiorem ograniczeń, dotyczących zmiennych i określających zależności między nimi

Rozwiązaniem problemu spełniania ograniczeń jest taki zbiór podstawień zmiennych, który nie narusza nałożonych ograniczeń

♣AM♣

Przykład problemu spełniania ograniczeń

Problem kolorowania mapy:



<u>Cel:</u> przypisać krajom kolory w takim sposób, aby żadne dwa sąsiednie kraje nie miały tego samego koloru
<u>Zmienne:</u> *V1,...,V5* - kraje
<u>Dziedziny:</u> *D1,...,D5*: ze zbioru [red,blue,green,yellow,pink]
<u>Ograniczenia:</u> *adjacent(Vi,Vj)* $\Rightarrow$ *Vi≠Vj*

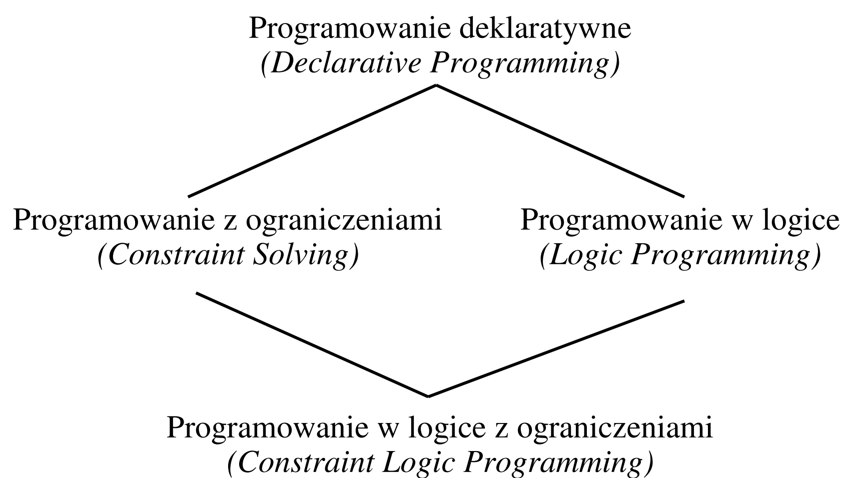
♣AM♣

Gdzie występują problemy spełniania ograniczeń?

- Szeregowanie
- Harmonogramowanie
- Alokacja zasobów
- Trasowanie/Marszrutowanie
- Planowanie zadań

♣AM♣

Deklaratywne programowanie w logice z ograniczeniami



♣AM♣

Dlaczego programowanie w logice z ograniczeniami?

Motywacje

- Rozszerzenie paradygmatu programowania deklaratywnego na dziedziny liczbowe (numeryczne)
- Lepsza integracja przetwarzania numerycznego i metod logiki obliczeniowej w programowaniu deklaratywnym (inne podejście do operatorów arytmetycznych)
- Zwiększenie efektywności procesu wnioskowania (skuteczniejsze nawroty)

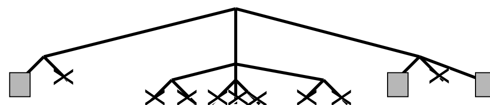
♣AM♣

Efektywność programowania z więzami i programowania w logice

Programowanie w logice

„najpierw generuj, potem testuj"

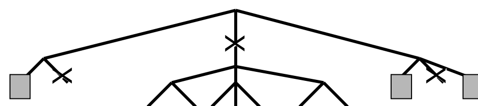
duża liczba nieużytecznych ścieżek wnioskowania



Programowanie w logice z ograniczeniami (więzami)

„najpierw testuj, potem generuj"

wczesna eliminacja zbędnych ścieżek wnioskowania



♣AM♣

Prolog - „generuj i testuj”

Przykład

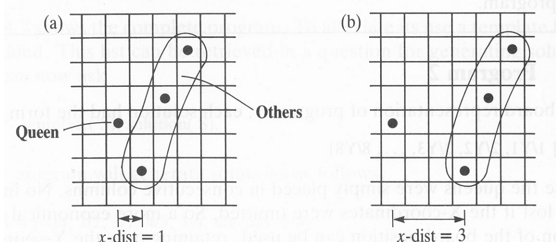
Predykat **queens8([Y1,…,Y8])** rozwiązuje problem 8 hetmanów i generuje prawidłowe położenia hetmanów **Y1,...,Y8**.

```
queens8([Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,Y8]):-
 permut([Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,Y8],[1,2,3,4,5,6,7,8]),
 safe([Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,Y8]).
permut([],[]).
permut([E|Perm],L):- select(E,L,RL), % usuń E z listy L
                     permut(Perm,RL).
safe([]).
safe([Q|Rest]):- noattack(Q,Rest,1), safe(Rest).
noattack(_,[],_).
noattack(Q,[H|Rest],N):- Q =\= H-N, Q =\= H+N,
 N1 is N+1, noattack(Q,Rest,N1).
```

♣AM♣

Prolog - „generuj i testuj”

Komentarz do predykatu **noattack(Queen,Others,Xdist)***:*



- położenie hetmanów określone jest tylko przez ich współrzędną Y, a współrzędna X nie jest jawnie podana; wiemy jednak, że współrzędne Y hetmanów zawsze będą różne, zaś ich kolejność na liście jest istotna (bo odpowiada współrzędnej X)
- zatem, aby hetman **Queen** nie atakował innych hetmanów **Others**, odległość **Xdist** między nim a pierwszym z nich musi być różna od 1, między kolejnym różna od 2, itd.

♣AM♣

Prolog - „generuj i testuj”

Komentarz do programu (1):

a) reprezentacja rozwiązania opiera się na spostrzeżeniu, że skoro co najwyżej jeden hetman może znajdować się w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie, to nie trzeba rozważać współrzędnych wiersza i kolumny, lecz wystarczy analizować permutacje zbioru elementów **`{1,2,...,8}`** - wartość *i*-tego elementu permutacji jest numerem wiersza, w którym znajduje się hetman z *i*-tej kolumny
b) metoda rozwiązania polega na generowaniu kolejnych permutacji powyższego zbioru elementów za pomocą predykatu **`permut`** a następnie testowaniu , czy nie narusza ona warunków sformułowanych w zadaniu (za pomocą predykatu **`safe`**)

♣AM♣

Prolog - „generuj i testuj”

Komentarz do programu (2):

c) rozwiązanie powyższe jest bardzo kosztowne; pierwsza sprawdzana permutacja **`{1,2,3,4,5,6,7,8}`** jest niepoprawna, bo hetmani stoją na głównej przekątnej; następuje nawrót i sprawdzenie permutacji **`{1,2,3,4,5,6,8,7}`**, która też jest błędna!
d) łatwo zauważyć, że wszystkie permutacje zaczynające się od **`{1,2,...}`** są niepoprawne, jednak program powyższy nie jest w stanie tego zweryfikować od razu; pierwsze prawidłowe rozwiązanie zostanie znalezione dopiero po analizie 2843 permutacji!!!

♣AM♣

Prolog - „generuj i testuj”

Program powyższy można usprawnić, testując nie kompletne permutacje, lecz sprawdzając je już w trakcie ich generowania.

Predykat **queens8(W,Closed,Open)** przechowuje na liście **Closed** pozycje wszystkich rozmieszczonych już hetmanów (w odwróconej kolejności), **Open** jest listą cyfr nie wykorzystanych jeszcze przy tworzeniu permutacji, listą **W** zaś zostanie przekazany wynik.

```
queens8(W):-
      queens8(W,[],[1,2,3,4,5,6,7,8]).
queens8([],_,[]).
queens8([H|Rest],Cl,Op):-
      select(H,Op,NewOp), % usuń H z listy Op
      noattack(H,Cl,1),
      queens8(Rest,[H|Cl],NewOp).
```

♣AM♣

Prolog - „generuj i testuj”

Komentarz do programu:

a) rozwiązanie powyższe jest dużo sprawniejsze od poprzedniego - pierwszy poprawny wynik uzyskiwany jest już po sprawdzeniu 336 permutacji (zysk o jeden rząd wielkości!)
b) nadal jednak nie jest w pełni wykorzystywane wiedza dostępna w trakcie rozwiązywania zadania - przykładowo, gdy pierwszy hetman znajdzie się w pierwszym wierszu, wiemy już, że cała główna przekątna jest zajęta, ale informacja ta jest wielokrotnie „odtwarzana i odrzucana” w trakcie poszukiwania rozwiązania

♣AM♣

Progr. w logice z ograniczeniami - „testuj i generuj”

Problem 8 hetmanów ma dwa ograniczenia:

- wartości współrzędnych muszą pochodzić ze zbioru liczb od **1** do **8**
- po ustawieniu hetmana poniższe nierówności redukują liczbę dalszych dopuszczalnych ustawień reszty hetmanów:

```
Hetman =\= Następny,
Hetman =\= Następny – N,
Hetman =\= Następny + N
```

W systemach spełniania ograniczeń tworzone są niejawnie dodatkowe struktury danych, w których przechowuje się informację o możliwych wartościach zmiennych użytych w predykatach i zgodnych w ograniczeniami.

♣AM♣

Progr. w logice z ograniczeniami - „testuj i generuj”

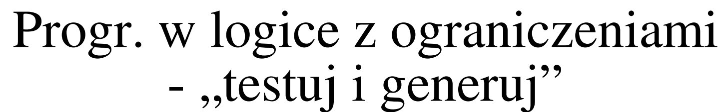
- Początkowo zbiory wartości wszystkich zmiennych w problemie 8 hetmanów są takie same:

$Y1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$Y2 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
...
$Y8 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

- Po ustawieniu pierwszego hetmana - przyjmijmy, że w 1-szym wierszu - następuje sprawdzenie ograniczeń i taka zmiana zbiorów wartości, która gwarantuje ich dalsze spełnienie:

$Y1 \in \{1\}$
$Y2 \in \{3,4,5,6,7,8\}$
$Y3 \in \{2,4,5,6,7,8\}$
$Y4 \in \{2,3,5,6,7,8\}$
$Y5 \in \{2,3,4,6,7,8\}$
$Y6 \in \{2,3,4,5,7,8\}$
$Y7 \in \{2,3,4,5,6,8\}$
$Y8 \in \{2,3,4,5,6,7\}$

♣AM♣



Progr. w logice z ograniczeniami - „testuj i generuj”

- Rozstawienie kolejnych hetmanów w wierszach 3,5 oraz 7 spowoduje ograniczenie zbiorów wartości do dziedzin:

Y1 ∈ {1}	Y5 ∈ {2,4}
Y2 ∈ {3}	Y6 ∈ {4}
Y3 ∈ {5}	Y7 ∈ {2,6}
Y4 ∈ {7}	Y8 ∈ {2,4,6}

- Po krótkiej analizie widać, że nie istnieje kompletne rozwiązanie, będące rozszerzeniem powyższego i konieczny jest nawrót (brak bowiem wiersza o wartości 8)
- Utrzymywanie informacji o ograniczeniach, a nie ciągłe ich sprawdzanie i „zapominanie”, jak ma to miejsce w Prologu, pozwala zwiększyć o rząd wielkości szybkość wyszukiwania rozwiązania

Progr. log. z ograniczeniami w dziedzinie wartości dyskretnych i skończonych

Predefiniowane predykaty :

- Definiowania dziedzin wartości zmiennych
- Zapisu ograniczeń arytmetycznych
- Formułowania ograniczeń kombinatorycznych
- Sterowania procesem poszukiwania rozwiązania

Definiowane dziedzin wartości

- Operator **`in`** jest spełniony, gdy *zmienna* lub elementy *listy zmiennych* przyjmują wartości z podanego zakresu; służy do definiowania ograniczenia przynależności do zbioru wartości całkowitych

```
?- X in 1..4, [Y,Z] in 3..7, X=Y.
X = {3..4}
Y = {3..4}
Z = {3..7}
?- X in 1..3, Y in 4..7, X=Y.
No
```

- Operator **`in`** dla *listy zmiennych* często występuje w postaci oddzielnego predykatu **`domain(Vars,Min,Max)`** lub **`vars_in(Vars,Min,Max)`**, które są równoważne zapisowi **`Vars in Min..Max`**, gdzie **`Vars`** oznacza listę zmiennych

♣AM♣

Definiowane dziedzin wartości

- Zakresy wartości dla operatora **`in`** mogą być definiowane jako przedział **`X..Y`**, gdzie końce przedziału **`X`** i **`Y`** mogą przybierać wartości:
  - **`X`** - zmienna lub liczba całkowita
  - **`min(X)`** - najmniejsza wartość z dziedziny zm. **`X`**
  - **`max(X)`** - największa wartość dziedziny zm. **`X`**
  - **`card(X)`** - liczność dziedziny wartości zmiennej **`X`**
- albo na inne sposoby:

`dom(X)` - jako dziedzina wartości zmiennej **`X`**

`Range1 /\ Range2` - jako iloczyn dwóch zakresów

`Range1 \/ Range2` - jako suma dwóch zakresów

`\ Range` - jako dopełnienie zakresu

♣AM♣

Definiowane dziedzin wartości

Przykłady definicji dziedzin wartości

```
?- X in 0..9, Y in dom(X).
X = {0..9}
Y = {0..9}
```

```
?- X in 0..4, Y in 5..9, Z in min(X)..max(Y).
X = {0..4}
Y = {5..9}
Z = {0..9}
```

```
?- X in 0..8, Y in 6..9, Z in dom(X)/\dom(Y).
X = {0..8}
Y = {6..9}
Z = {6..8}
```

♣AM♣

Ograniczenia arytmetyczne

- Związki między zmiennymi i/lub wyrażeniami mogą być zapisywane jako ograniczenia arytmetyczne postaci:
  `<Expr> <Op> <Expr>` ,
  gdzie **`<Op>`** jest jednym z operatorów:
  `#<   #>   #=<   #>=   #=   #\=` ,
  a **`<Expr>`** są dowolnymi wyrażeniami arytmetycznymi

```
?- X in 1..5, Z in 3..13, X+Y #= Z.
X = {1..5}
Z = {3..13}
Y = {-2..12}
```

- Wyrażenia w ograniczeniach arytmetycznych nie muszą być liniowe - algorytm spełniania ograniczeń będzie jednak opóźniał ich spełnianie do czasu, gdy staną się liniowe

♣AM♣

Ograniczenia arytmetyczne

- Ograniczenia arytmetyczne mogą dotyczyć całych list zmiennych, dzięki czemu ich zapis jest prostszy (unikamy definiowania ciągu ograniczeń elementarnych), a spełnianie mniej wymagające obliczeniowo
- Predykat **`scalar_product(Cs,Vars,Op,Value)`** jest spełniony, gdy iloczyn skalarny zmiennych z listy **`Vars`** i listy stałych **`Cs`** (tej samej długości) pełnia relację **`Op Value`**
- Predykat **`sum(Vars,Op,Value)`** jest spełniony, gdy suma wartości zmiennych z listy **`Vars`** spełnia relację **`Op Value`**

Przykład

```
?- X in 0..9, Y in 1..2, sum([X,Y],#=,2).
X = {0..1}
Y = {1..2}
```

♣AM♣

Ograniczenia kombinatoryczne

Predykat **`all_different(Vars)`** jest spełniony, gdy wszystkie zmienne z listy **`Vars`** mają parami różne wartości; spełnienie weryfikowane jest dopiero podczas wiązania (uzgadniania) zmiennych z listy **`Vars`**

```
?- [X,Y] in 0..1, all_different([X,Y]).
X = {0..1}
Y = {0..1}
?- [X,Y] in 0..0, all_different([X,Y]).
No
```

♣AM♣

Ograniczenia kombinatoryczne

Predykat **`all_distinct(Vars)`** jest spełniony, gdy zmienne z listy **`Vars`** o ukonkretnionych(określonych) i nieujemnych dziedzinach przyjmują różne wartości; predykat logicznie równoważny **`all_different(Vars)`**:

```
?- [X,Y,Z] in 0..1, all_dinstinct([X,Y,Z]).
No
?- [X,Y,Z] in 0..1, all_different([X,Y,Z]).
X in {0..1}
Y in {0..1}  } ← bo zmienne nie zostały jeszcze związane!
Z in {0..1}
?- [X,Y,Z] in 0..1, all_different([X,Y,Z]),X=1.
No           } ← bo zmienna X została związana!
```

♣AM♣

Sterowanie poszukiwaniem rozwiązania

Predykat **`indomain(Var)`** przypisuje zmiennej **`Var`** wartość z jej aktualnej dziedziny; wykonuje nawroty od najmniejszej możliwej wartości do największej

Przykład

Predykat **`delnum(L,RL)`** usuwa z listy **`L`** cyfry i w rezultacie otrzymujemy listę **`RL`**:

```
delnum(L,RL):- X in 0..9, indomain(X),
     delete(L,X,RL). % usuwa wszystkie X z L
?- delnum([a,1,b,0,c,0],RL).
RL = [a,1,b,c];        } ← dla 0
RL = [a,b,0,c,0];      } ← dla 1
RL = [a,1,b,0,c,0];    } ← 8 razy, bo zostało 8 cyfr!
...
```

♣AM♣

Przeszukiwanie z **indomain** - problem 8 hetmanów

```
:- use_module(library('clp/bounds')).%SWI-Prolog

queens8([Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,Y8]):-
      queens8([Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,Y8],8).

queens8([],_).
queens8([Q|Qs],N):- [Q|Qs] in 1..N,
                    all_different([Q|Qs]),
                    indomain(Q),
                    noattack(Q,Qs,1),
                    queens8(Qs,N). %recursion

noattack(_,[],_).
noattack(Q,[H|T],N):- Q #\= H-N, Q #\= H+N,
                      N1 is N+1,
                      noattack(Q,T,N1).
```

♣AM♣

Sterowanie poszukiwaniem rozwiązania

Predykat **`labeling(Opt,Vars)`** jest spełniony, gdy możliwe jest znalezienie dla wszystkich zmiennych z listy **`Vars`** takich podstawień wartości, które zachowują nałożone ograniczenia; parametr **`Opt`** jest 4-elementową listą predefiniowanych termów, które decydują o:

- strategii wyboru kolejnej zmiennej (**`leftmost`**, **`min`**, **`max`**, **`ff`**),
- strategii wyboru wartości dla zmiennej (**`step`**, **`enum`**, **`bisect`**),
- kierunku przeszukiwania dziedziny zmiennej (**`up`**, **`down`**),
- sposobie generowania rozwiązań (**`all`**, **`minimize(X)`**, **`maximize(X)`**).

```
?- [X,Y] in 0..1, labeling([],[X,Y]).
X = 0   Y = 0;
X = 0   Y = 1;
X = 1   Y = 0;
X = 1   Y = 1
```

♣AM♣

Przeszukiwanie z **`lebeling`** - problem 8 hetmanów

```
:- use_module(library('clp/bounds')).%SWI-Prolog

queens8([Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,Y8]):-
            Qs = [Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6,Y7,Y8],
            Qs in 1..8, safe(Qs),
            all_different(Qs),
            labeling([],Qs). % no recursion!
safe([]).
safe([Q|Qs]):-  noattack(Q,Qs,1), safe(Qs).

noattack(_,[],_).
noattack(Q,[H|Rest],N):-  Q #\= H-N, Q #\= H+N,
                          N1 is N+1,
                          noattack(Q,Rest,N1).
```


Przykłady zastosowań programowania w logice z ograniczeniami

- Arytmograf
- Problem kolorowania mapy

Przykłady zastosowań programowania w logice z ograniczeniami

Predykat **`sum(Arytm)`** rozwiązuje zadanie z arytmografem SEND+MORE=MONEY; zwraca *listę wartości* unikalnych zmiennych **`Arytm`** występujących w zadaniu.

```
sum(Arytm):-
   Arytm = [S,E,N,D,M,O,R,Y], %unique vars only!
   Arytm in 0..9, S #> 0, M #> 0,
   all_different(Arytm),
                  1000*S + 100*E + 10*N + D
   +              1000*M + 100*O + 10*R + E
   #=  10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y,
   labeling([],Arytm).

?- sum(L).
L = [9, 5, 6, 7, 1, 0, 8, 2]
```

♣AM♣

Przykłady zastosowań programowania w logice z ograniczeniami

Problem kolorowania mapy

Każdemu z krajów trzeba przypisać jeden z czterech kolorów tak, aby żadne dwa sąsiadujące ze sobą kraje nie miały tego samego koloru. Istnieje twierdzenie, które gwarantuje, że zawsze jest to możliwe.

<u>Opis mapy:</u> predykat **`nghb(Country,Neighbours)`** np.:

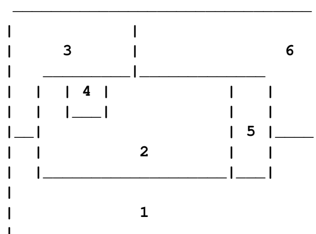
```
nghb(1,[2,3,5,6]).
nghb(2,[1,3,4,5,6]).
nghb(3,[1,2,4,6]).
nghb(4,[2,3]).
nghb(5,[1,2,6]).
nghb(6,[1,2,3,5]).
```

♣AM♣

Przykłady zastosowań programowania w logice z ograniczeniami

Problem kolorowania mapy

Przykładowa mapa byłej Jugosławii



Opis mapy:

```
nghb(1,[2,3,5,6]).    nghb(2,[1,3,4,5,6]).
nghb(3,[1,2,4,6]).    nghb(4,[2,3]).
nghb(5,[1,2,6]).      nghb(6,[1,2,3,5]).
```

♣AM♣

Przykłady zastosowań programowania w logice z ograniczeniami

Problem kolorowania mapy c.d.

Opis wyników:
Lista liczb reprezentujących kolory przypisane krajom:
`[1, 3, 4,...]`,
gdzie kolejność kolorów jest istotna i odpowiada kolejności w jakiej zdefiniowane zostały kraje za pomocą predykatu **`nghb`**.

Rozwiązanie:
Predykat **`colors(Country_colour_list)`** jest prawdziwy, o ile lista **`Country_colour_list`** spełnia ograniczenia narzucone przez relację **`ngb`** i treść zadania (m.in. cztery dostępne kolory reprezentowane przez zakres: **`1..4`**).

♣AM♣

Przykłady zastosowań programowania w logice z ograniczeniami

Problem kolorowania mapy c.d.

Sformułowanie rozwiązania w Prologu:

```
colors(Colors):- countries(C),
                 length(C,N),
                 length(Colors,N),
                 Colors in 1..4,
                 nghb_constr(N,Colors),
                 labeling([],Colors).

country(C):- nghb(C,_).
countries(CList):-setof(C,country(C),CList).
```

♣AM♣

Przykłady zastosowań programowania w logice z ograniczeniami

Problem kolorowania mapy c.d.

Pomocnicze predykaty:

```
nghb_constr(0,_):-!.
nghb_constr(N,Cs):- nghb(N,L),
                    nth1(N,Cs,Var),
                    adj_constr(Var,L,Cs),
                    N1 is N-1,
                    nghb_constr(N1,Cs).
adj_constr(_,[],Cs).
adj_constr(X,[A|As],Cs):- nth1(A,Cs,Var),
                           X #\= Var,
                          adj_constr(X,As,Cs).
```

♣AM♣

Typy dziedzin w programowaniu logicznym z ograniczeniami

Contraint Logic Programming - CLP(x)

- CLP(clpr/R) - liniowe ograniczenia rzeczywistoliczbowe
- CLP(clpfd/FD) - dziedziny skończone (ang. FD-finite domain)
- CLP(clpb/B) - logika booleowska (algebra Boole'a)
- CLP(clpq/Q) - liczby wymierne (często razem z CLP(R) jako CLP(Q,R))
- CHR - Constraints Handling Rules

♣AM♣

Programowanie w logice z ograniczeniami w Prologu

Zalety

- Rozszerzenie procesu unifikacji/uzgadniania na ogólniejsze mechanizmy spełniania ograniczeń
- Wprowadzanie ograniczeń różnych typów:
  - dziedzin skończonych: booleowskich, zbiorów skończonych, zbiorów uporządkowanych,...
  - dziedzin nieskończonych: liczb całkowitych, rzeczywistych,...
- Pojawienie się nowych metod rozwiązywania zadań z użyciem ograniczeń (efektywność!)

♣AM♣