

Małgorzata Jankowska, Andrzej Marciniak
Politechnika Poznańska, Instytut Informatyki
E-mail: mjank@wp.pl, anmar@sol.put.poznan.pl

Niejawne metody interwałowe typu Adamsa rozwiązywania zagadnienia początkowego

Błędy reprezentacji liczb rzeczywistych w komputerze oraz błędy zaokrągleń, powstające przy wykonywaniu operacji na liczbach zmiennoprzecinkowych, mogą powodować — nawet przy stosowaniu teoretycznie dokładnych metod obliczeniowych — uzyskiwanie wyników obarczonych dużymi błędami. W takim przypadku na ogół nie potrafimy realnie ocenić dokładności otrzymanego rozwiązania. Jednym ze sposobów oszacowania tych błędów jest zastosowanie zmiennoprzecinkowej arytmetyki interwałowej (przedziałowej). Wykorzystanie tej arytmetyki w metodach interwałowych powoduje, iż uzyskane przedziały-rozwiązania uwzględniają błędy reprezentacji danych, zaokrągleń oraz błędy stosowanych metod.

Znanymi metodami numerycznymi rozwiązywania zagadnienia początkowego są m.in. metody wielokrokowe typu Adamsa, które dzielimy na jawne (Adamsa-Bashfortha) i niejawne (Adamsa-Moultona). Interwałowe odpowiedniki tych metod pozwalają na uzyskiwanie wyników zawierających rozwiązanie dokładne w kolejnych punktach przedziału całkowania.

Jawne metody interwałowe typu Adamsa-Bashfortha były rozważane po raz pierwszy przez Ju. I. Śokina. Z klasycznej analizy numerycznej wiadomo, że niejawne metody wielokrokowe dają rozwiązanie tego samego rzędu, co metody jawne, przy mniejszej liczbie kroków. Własność ta stała się podstawą do podjęcia próby skonstruowania i zbadania niejawnych metod interwałowych typu Adamsa-Moultona.

Na podstawie przeprowadzonej przez autorów realizacji jawnych metod interwałowych typu Adamsa zaproponowanych przez Ju. I. Śokina (w zmiennoprzecinkowej arytmetyce interwałowej) okazało się, że dla pewnych zagadnień początkowych otrzymywane przedziały-rozwiązania nie zawierały w sobie rozwiązania dokładnego. Po szczegółowej analizie tych metod zmodyfikowano wzory Śokina, co pozwoliło wyeliminować generowanie błędnych przedziałów-rozwiązań.

W wyniku prowadzonych badań udowodnione zostały twierdzenia o przynależności rozwiązań dokładnego do przedziału-rozwiązania oraz twierdzenia pozwalające oszacować szerokości przedziałów-rozwiązań dla niejawnych metod interwałowych typu Adamsa-Moultona oraz zmodyfikowanej postaci jawnych metod interwałowych typu Adamsa-Bashfortha. Testy numeryczne potwierdziły, że przy ustalonej liczbie kroków w metodach niejawnych otrzymuje się przedziały-rozwiązania o mniejszej szerokości niż w metodach jawnych (inaczej: wymaganą dokładność osiąga się przy mniejszym nakładzie obliczeń, gdyż wystarcza mniejsza liczba podziałów przedziału całkowania). W przypadku metod interwałowych jest to o tyle ważne, że zbyt duża liczba obliczeń wykonywanych na przedziałach zazwyczaj zwiększa szerokości przedziałów-rozwiązań otrzymywanych w kolejnych krokach, co w rezultacie może dać wyniki mało przydatne z praktycznego punktu widzenia.

Obecnie autorzy prowadzą prace nad konstrukcją interwałowych metod wielokrokowych typu predyktor-korektor. W końcowej fazie realizacji jest też system obliczeniowy, przeznaczony do uruchamiania w środowisku Windows, służący do wyznaczania rozwiązania interwałowego dla zdefiniowanego przez użytkownika zagadnienia początkowego przy zastosowaniu wybranej interwałowej metody wielokrokowej i zmiennoprzecinkowej arytmetyki interwałowej.